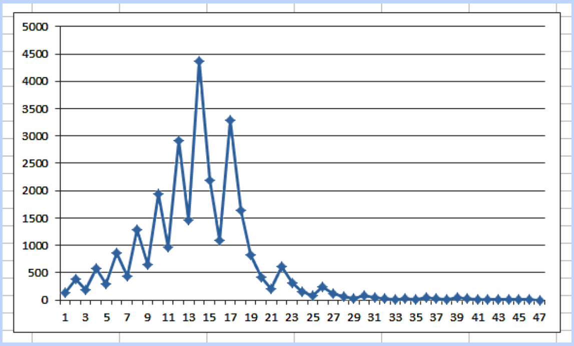
Números y hoja de cálculo IX



Curso 2016-17

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Al igual que en los anteriores, este documento recoge las entradas publicadas en nuestro blog “Números y hoja de cálculo” en la tmporada 2016-17. Con él llegamos a la novena temporada del blog y al resumen correspondiente. El objetivo es llegar a diez, y después ya se erá si sihuen surgiendo temas interesantes.

En esta temporada se han desarrolado con más profundidad los temas de productos cartesianos condicionados, en los que se ha aprovechado la potencia combinatoria de nuestra hoja de cálculo Cartesius. En la temporada próxima seguiremos con el tema.

También hemos desarrollado el tema de números piramidales, con el apoyo de nuestra calculadora Calcupol y la interpolación sobre los primeros números naturales. También proseguiremos con el tema, ampliando las dimensiones de las pirámides.

Por pura casualidad, se han desarrollado temas de Álgebra y descomposición en sumas. No estaba planificado, pero le ha dado variedad a este resumen.

CONTENIDO

Seguimos con las conjeturas

CONJETURA DE COLLATZ

Ya se trató esta conjetura en este blog, pero desde el punto de vista de su experimentación en un Taller de Matemáticas

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/la-conjetura-de-collatz-en-un-taller-de.html

En esta ocasión se buscarán rutinas y funciones que nos ayuden a comprobar la conjetura para muchos números, así como encontrar sus cúspides y órbitas. Se ha escrito mucho sobre esta conjetura, por lo que aquí se desarrollará sólo ese aspecto.

Planteamiento

Para quienes no conozcan esta conjetura recordaremos su planteamiento:

Se toma un número entero positivo N cualquiera, por ejemplo el 13, y se le aplica la siguiente operación, a la que llamaremos función COLL(N):

- Si el número es par, se divide entre 2.
- Si el número es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1.

En el caso del 13, como es impar, se le aplicará la segunda, y quedará COLL(13)=13*3+1=40.

La idea de la conjetura es que sigamos aplicando esta operación a todos los resultados que obtengamos, En nuestro caso sería COLL(40)=20 (por ser par), COLL(20)=10, COLL(10)=5, COLL(5)=3*5+1=16, COLL(16)=8, COLL(8)=4, COLL(4)=2, COLL(2)=1, y a partir del 1 se entra en el ciclo {4, 2, 1}

La conjetura afirma que este final en el 1 y el ciclo posterior **ocurre para cualquier otro entero positivo. Sea cual sea el comienzo, se llegará al número 1.** Todas las sucesiones construidas así terminarán en el ciclo 4, 2, 1.

Lo vemos con otro ejemplo:

COLL(6)=3, COLL(3)=10, COLL(10)=5, COLL(5)=16, COLL(16)=8, COLL(8)=4, COLL(4)=2, COLL(2)=1

Insistimos en que existen muchas publicaciones sobre esta conjetura y aquí sólo nos limitaremos a pequeñas comprobaciones. La más sencilla es mediante celdas en la hoja de cálculo.

Comprobación con celdas de hoja de cálculo

Escribimos el entero positivo inicial (lo podemos nombrar como *semilla*) en una celda, sea por ejemplo, la D4. En la celda inferior D5 escribimos SI(RESIDUO(D4;2)=0;D4/2;3*D4+1), que divide entre 2 el valor de la D4 si es par (porque entonces se verifica

RESIDUO(D4;2)=0) y lo multiplica por 3 añadiendo 1 si es impar. En la imagen vemos el resultado para el número 132:

	C	D
1		
2		
3		
4		**132**
5		66

Al ser par el 132 se ha dividido entre 2. Ahora lo único que tenemos que hacer es rellenar esa fórmula hacia abajo y parar cuando aparezca un 1:

132
66
33
100
50
25
76
38
19
58
29
88
44
22
11
34
17

52
26
13
40
20
10
5
16
8
4
2
1

(Troceamos la imagen porque aparecen muchos números)

La conjetura ha sido comprobada hasta números muy grandes, por lo que puedes tener la seguridad de que llegarás siempre al valor 1. Al conjunto de números que se recorren hasta llegar a ese valor le podemos llamar *órbita* del número dado, que aquí son los 29 números que aparecen en la imagen. Al número mayor que hayamos alcanzado en la órbita le llamaremos *cúspide*. En este ejemplo la cúspide es el mismo 132.

De esta forma tan simple podemos comprobar la conjetura dentro del alcance de la herramienta que usamos. Si la órbita tiene una longitud grande este procedimiento puede alargarse. Por ello acudiremos ahora a la definición de funciones:

Funciones sobre la conjetura de Collatz

Ya hemos presentado COLL(N). Sería bueno introducir su versión en VBA para poder construir sobre ella otras funciones más complicadas. Su código es muy sencillo:

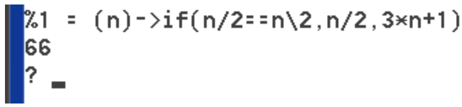
```
Public Function coll(n)
If n / 2 = n \ 2 Then coll = n / 2 Else coll = 3 * n + 1
End Function
```

No necesita grandes explicaciones. La condición n/2=n\2 equivale a indicar que n es par, ya que entonces el resultado de la división n/2 es idéntico al de la división entera n\2. El resto se entiende bien. Con esta función podemos reproducir las órbitas en columna de forma idéntica a como procedimos en el primer ejemplo.

En PARI el código es similar:

```
coll(n)=if(n/2==n\2,n/2,3*n+1)
```

En la imagen vemos el resultado de pedir coll(132)



Función orbicoll

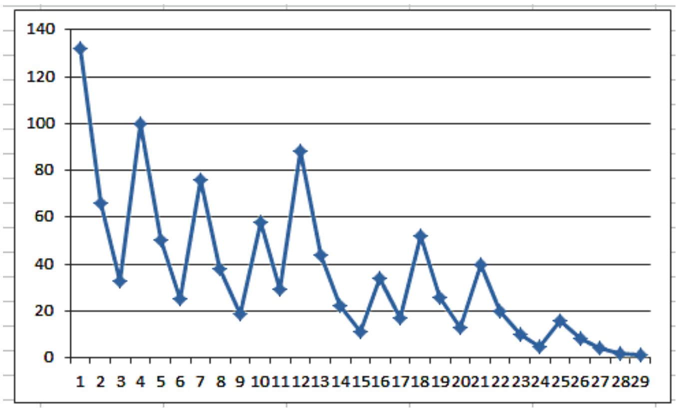
A cualquier número entero le podemos asignar una cadena que contenga todos los números por los que “pasa” hasta llegar al 1, es decir, su órbita. En VBA podía ser esta:

Public Function orbicoll(n)
Dim b
Dim s$ ‘Cadena (string) para recoger los resultados
b = n: s$ = Str$(b) ‘La cadena comienza con el número inicial (semilla)
While b <> 1 ‘Se trabaja hasta llegar al 1
b = coll(b) ‘ En cada paso se aplica la función COLL
s$ = s$ + Str$(b) ‘Se incorpora el resultado al string
Wend
orbicoll = s$
End Function

En la imagen puedes comprobar la creación de la órbita del número 132:

132	
132 66 33 100 50 25 76 38 19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1	

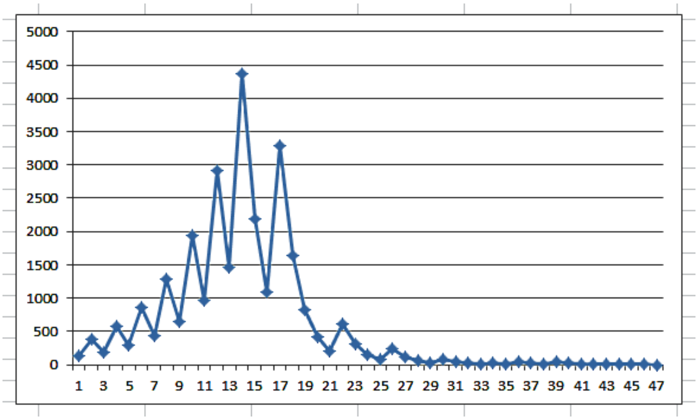
Después puedes usar la prestación de ***convertir texto en columnas*** (antes debes copiar la órbita en otra celda mediante *copiar valores*) y crear un gráfico que abarque toda la órbita:



Puedes observar que arranca en 132 y termina en 1. Los tramos ascendentes representan números impares, y los descendentes a los pares.

Puedes seguir este proceso con cualquier otro número entero y seguir la evolución de su órbita.

En la imagen aparece la órbita del número 127, más compleja y con una cúspide cercana a 4500:



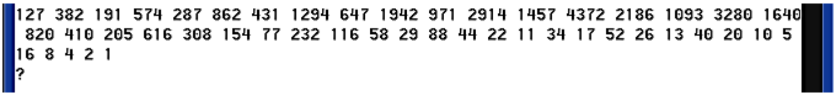
Función orbicoll en PARI

Es fácil la traducción de esta función a PARI:

coll(n)=if(n/2==n\2,n/2,3*n+1)

orbicoll(n)=my(b=n,s=Str(n));while(b<>1,b=coll(b);s=concat(concat(s," "),Str(b)));s

En la imagen se ha pedido la órbita de 127:



Estudia al código siguiente para la función *lorbicoll*, que devuelve el número de elementos de una órbita:

Public Function lorbicoll(n)
Dim a, b
a = 1: b = n
While b <> 1

b = coll(b)
a = a + 1
Wend
lorbicoll = a
End Function

Con ella podemos comprobar lo que ya sabemos, que 132 tiene una órbita de 29 elementos.

Con la versión PARI puedes abordar casos con números mayores:

```
coll(n)=if(n/2==n\2,n/2,3*n+1)
lorbicoll(n)=my(b=n,a=1);while(b<>1,b=coll(b);a+=1);
a
```

Te proponemos comprobar que el número 871 es el que posee la órbita de más longitud entre los de tres cifras, y que contiene 179 elementos. De los de cuatro cifras el de órbita de más longitud es el número 6171, con 262 elementos.

Función cuspicoll

Del mismo modo que construimos la órbita de un número entero positivo, podemos encontrar su cúspide. El procedimiento será similar, pero, en lugar de añadir resultados a un string, tomaremos nota en cada paso del máximo valor que ha aparecido:

```
Public Function cuspicoll(n)
Dim a, b
a = n: b = n
While b <> 1
b = coll(b)
If b > a Then a = b
Wend
cuspicoll = a
End Function
```

La instrucción clave es ***If b > a Then a = b***, que convierte a en el nuevo máximo si aparece un elemento b mayor que los precedentes.

Con las funciones definidas podemos construir un esquema en el que se analice el comportamiento de la conjetura de Collatz para una semilla dada:

Número	81
Órbita	81 244 122 61 184 92 46 23 70 35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1
Longitud	23
Cúspide	244

Finales previsibles

Algunos tipos de números presentan una órbita bastante previsible. Por ejemplo:

Potencias de 2: a partir de ellos se entra en una ruta descendente y previsible que finaliza en el 1.

Números tipo (2^n-1)/3: Desembocan en una potencia de 2, por lo que también inician una ruta directa, y esto ocurre una potencia sí y otra no, porque 2^n es del tipo 3k+1 o 3k+2 y al multiplicar por Si es 3k+1 es candidato a que (2^n-1)/3 sea entero, y si es del tipo 3k+2, la siguiente potencia será 6k+4, o sea del tipo 3k+1

Otros tienen recorrido corto, como el 6, el 10 o el 20.

Es normal que pensemos en que muchas órbitas pasarán por ellos, y existan pares de órbitas que pasan ambas por el mismo punto de entrada, más o menos primario.

Podemos intentar ver si dos números presentan alguna coincidencia en sus órbitas, porque entonces compartirán final. No es difícil programar una función que nos devuelva un punto de coincidencia en las órbitas de dos números. En primer lugar necesitamos una función que nos indique si el número **n** pertenece a la órbita del número **m**. Puede ser esta:

```
Public Function enlacoll(m, n) As Boolean
Dim e As Boolean
Dim p
If m = n Then
e = True
Else
e = False
p = m  ‘p recorrerá la órbita de m
While Not e And p <> 1
```

p = coll(p)
If p = n Then e = True ‘Si p es igual a n, sí pertenece
Wend
End If
enlacoll = e
End Function

Con esta función enlacoll(m,n) podemos saber si n pertenece a la órbita de m. Se puede organizar un esquema de cálculo:

m	57
n	52
¿Pertenece?	VERDADERO

En la imagen se ha verificado que 52 pertenece a la órbita de 57.

Coincidencia en las órbitas

Con la anterior función ya estamos preparados para encontrar la primera coincidencia entre dos órbitas. Si no existe una coincidencia anterior, se nos devolverá un cero. El código de la función es:

Public Function coincicoll(m, n)
Dim c, q
q = m
c = 0
While q > 1 And c = 0 ‘q recorre la órbita de m
If enlacoll(n, q) Then c = q ‘si q pertenece a la órbita de n, hay coincidencia
q = coll(q)

Wend
coincicoll = c
End Function

Con ella también podemos construir otro esquema de cálculo. En la imagen se comprueba que 125 y 126 comparten una subórbita de 95 elementos, que comienzan en 364.

m	125
n	126
Coincidencia	364
Órbita en común	95

Con estas ideas puedes construir otras muchas funciones, o emprender otras búsquedas. Sólo se ha pretendido aquí dar ideas para comprobaciones y experimentaciones sobre la conjetura, ya de por sí bastante estudiada en otros aspectos.

CONJETURA DE RASSIAS

Esta conjetura recibe el nombre de su autor, M. Th. Rassias, que la enunció siendo muy joven, mientras preparaba una Olimpiada Matemática. Se puede formular de varias formas, pero la que preferimos es la siguiente:

Para cada número primo $p>2$ existen dos primos p_1 y p_2, con $p_1<p_2$ tales que

(p-1)p$_1$=p$_2$+1

Es decir, que si el primer primo lo multiplicamos por **p-1**, conseguimos un número al que precede otro número primo. Por ejemplo:

Para el número 17, el par de primos puede ser 2 y 31, porque (17-1)*2=32=31+1. Para el primo 47 los primos pueden ser 3 y 137, porque (47-1)*3=138=137+1

La conjetura afirma que siempre se pueden encontrar esos dos primos para uno dado.

Obtención con hoja de cálculo

En teoría se podría comprobar esta conjetura mediante una tabla de doble entrada con los primeros números primos, pero sería un procedimiento costoso en espacio y tiempo. Es preferible acudir al VBASIC o lenguaje similar. En Excel puedes intentar una función que nos devuelva el más pequeño **q** de los dos primos, suficiente para comprobar la conjetura, ya que el otro lo podemos calcular mediante ***(p - 1) * q - 1***

Public Function rassias(p)
Dim a, q

If Not esprimo(p) Then rassias = 0: Exit Function ‘Si no es primo nos devuelve un cero
q = 2 ‘Posible valor del primo más pequeño
a = 0 ‘Si a=0 significa que aún no se han encontrado los primos

While a = 0

If esprimo((p - 1) * q - 1) Then ‘prueba para saber que se encontraron los primos

a = q

End If

q = primprox(q) ‘Se prueba con el siguiente primo

Wend

rassias = a ‘Se encontró el primo menor

End Function

Las funciones ESPRIMO y PRIMPROX las puedes copiar desde nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/04/proposito-de-ormiston.html

Con esta función y el cálculo posterior podemos construir una tabla en la que para cada número primo contenga los dos primos más pequeños que verifican la conjetura. Sería similar a esta:

Primo dado	P1	P2
3	2	3
5	2	7
7	2	11
11	2	19
13	2	23
17	2	31
19	3	53
23	2	43
29	3	83
31	2	59
37	2	71
41	2	79
43	2	83
47	3	137
53	2	103
59	3	173
61	3	179

Programa en PARI

Para quienes conozcan el lenguaje PARI, con este programa comprobamos la conjetura para los primos inferiores a 200:

```
p=2;while(p<200,p=nextprime(p+1);q=2;a=0;while(a=
=0,b=(p-1)*q-
1;if(isprime(b),a=q);q=nextprime(q+1));print(p,",
",a,", ",b))
```

Resultado:

```
? \r ini.txt
3, 2, 3
5, 2, 7
7, 2, 11
11, 2, 19
13, 2, 23
17, 2, 31
19, 3, 53
23, 2, 43
29, 3, 83
31, 2, 59
37, 2, 71
41, 2, 79
43, 2, 83
47, 3, 137
53, 2, 103
59, 3, 173
61, 3, 179
67, 2, 131
71, 2, 139
73, 5, 359
79, 3, 233
83, 2, 163
89, 3, 263
97, 2, 191
```

Con los cambios oportunos se puede lograr la comprobación para otros conjuntos de primos.

Otros puntos de vista

En la tabla anterior destaca la frecuencia con la que aparecen los valores 2 y 3 para el primo más pequeño. Es una indicación de que la conjetura no es algo complicado, sino que se comprueba fácilmente para valores pequeños. Podemos plantear una búsqueda para saber cuándo aparecerán otros valores, si es que lo hacen. Aquí tienes los resultados para la primera aparición de otros primos:

Primo menor	Primera ocurrencia
5	73
7	307
11	109
13	349
17	491
19	139
23	179
29	467
31	8689
37	1693

Esta tabla sugiere que la conjetura también se cumple para todo p_1. El problema radica en que no hay tope en la búsqueda de **p** y de $\mathbf{p_2}$, por lo que de no cumplirse para algún valor, entraríamos en un bucle sin fin. No obstante, lo intentamos con esta función:

Public Function rassias2(p)
Dim q, b, a

If Not esprimo(p) Then rassias2 = 0: Exit Function
q = 2
a = 0
While a = 0

```
b = (q - 1) * p - 1
If esprimo(b) Then
a = b
End If
q = primprox(q)
Wend
rassias2 = a
End Function
```

Con ella vemos que a todo valor de $\mathbf{p_1}$ le corresponde otro de $\mathbf{p_2}$. No tienen que resultar los mismos valores anteriores, porque al cambiar el punto de vista se encuentran otros mínimos, pero lo importante es que existe siempre una solución. Aquí tienes un resultado:

P1	P2	P
2003	8011	5
2011	4021	3
2017	12101	7
2027	12161	7
2029	4057	3
2039	20389	11
2053	73907	37
2063	12377	7
2069	12413	7
2081	20809	11
2083	12497	7
2087	33391	17

Por ejemplo, para 2081 como p_1, el valor de p_2 es 20809, calculado mediante p=11, ya que 20809=2081*10-1, y 20809 es primo.

No resistimos la elaboración de una función para p_2:

```
Public Function rassias3(p)
Dim q, b, a
```

```
If Not esprimo(p) Then rassias3 = 0: Exit Function
q = 2
a = 0
While a = 0
b = (p + 1) / q + 1
If esprimo(b) Then
a = b
End If
q = primprox(q)
Wend
rassias3 = a
End Function
```

Con ella se puede construir una tabla que relaciones $\mathbf{p_2}$ con $\mathbf{p_1}$ y **p**:

p2	p	p1
2	2	3
3	3	2
5	3	3
7	5	2
11	7	2
13	3	7
17	7	3
19	11	2
23	13	2
29	11	3
31	17	2

Todas estas tablas se podrían prolongar hasta números mucho mayores, y siempre existe una solución de dos primos respecto al dado, luego se puede dar por comprobada la conjetura dentro de la herramienta que hemos usado.

Primos relacionados con uno fijo

Por último, nos podríamos plantear si para cada valor de **p** podemos encontrar infinitos pares $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ que cumplan la conjetura. Lo dejamos como ejercicio. En la tabla observamos pares de seis cifras que cumplen la conjetura para **p=11**:

	Para p=11
p1	p2
100043	1000429
100109	1001089
100271	1002709
100361	1003609
100391	1003909
100523	1005229
100823	1008229
100937	1009369

Como los primos de la primera columna se multiplican por 10, los de la segunda terminan todos en 9. Este ejercicio lo podemos repetir para cualquier valor, y dentro del rango que deseemos. Terminamos con los primos de siete cifras que corresponden a p=137:

	Para p=137
p1	p2
1000037	136005031
1000367	136049911
1000397	136053991
1000547	136074391
1000577	136078471
1000763	136103767
1000793	136107847
1000889	136120903
1000973	136132327
1001177	136160071

HIPOTENUSEANDO

En mis exploraciones por la página OEIS (Enciclopedia On-line de sucesiones de números enteros, http://oeis.org/?language=spanish), me encontré con la sucesión http://oeis.org/A104863

10, 30, 31, 43, 53, 68, 86, 109, 138, 175, 222, 282, 358, 455, 578, 735, 935, 1189,…

En ella, a partir de los valores a(1)=10 y a(2)=30, se van formando los siguientes como **la parte entera de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los dos anteriores**.

Así, el tercer elemento es igual a

ENTERO(RAIZ(10^2+30^2))=ENTERO(RAIZ(1000))=ENTERO(31,62)=31.

Prueba a justificar que el siguiente es 43.

Esta definición equivale a que cada término es la hipotenusa truncada correspondiente a los términos anteriores tomados como catetos. Por eso le hemos llamado a esta sucesión la de "hipotenusear". Su expresión recurrente sería:

$$a_n = Int\left(\sqrt{{a_{n-2}}^2 + {a_{n-1}}^2}\right)$$

Esta sucesión presenta algunas características que le hacen merecer este estudio:

(1) El uso de la parte entera obliga a renunciar a las fórmulas teóricas. De hecho, en términos avanzados de la sucesión, el cumplimiento del Teorema de Pitágoras es deplorable. Observa este ejemplo, en el que a(n-2)=8348, a(n-1)= 10618 y a(n)=13506. Si elevamos al cuadrado obtenemos:

13506^2=182412036

8348^2+10618^2=182431028

Restamos y nos queda un error de 18992 unidades. Así que las hipotenusas que obtengamos con esta recurrencia **no son tales**, aunque seguiremos llamándolas así.

(2) Como también ocurre en las recurrencias lineales, el cociente entre dos términos consecutivos se va estabilizando y tiende a un límite. Esto nos permite "razonar en el límite", aunque sepamos que es una técnica aproximada, que sólo nos valdrá para explicar (y no demostrar) algunas conjeturas que se han afirmado para esta sucesión y otras similares.

(3) La sucesión presentada es sólo un caso particular de toda una familia en la que podemos fijar a(1) y a(2)

como deseemos. La mayoría de las propiedades se mantendrán. Vemos la primera:

Conjetura: El límite del cociente a(n+1)/a(n) es la raíz cuadrada del número áureo.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\emptyset}=1{,}27201965\ldots$$

La llamamos conjetura por causa de la parte entera, que nos impide mejores razonamientos. Esta cuestión, de manejarnos entre aproximaciones y conjeturas, es uno de los objetivos de este estudio.

Podemos comprobar lo anterior con hoja de cálculo. Escribimos dos catetos uno debajo de otro, como 2 y 5, y después, en columna rellenamos la fórmula

=ENTERO(RAIZ(CATETO1^2+CATETO2^2)).

No es difícil de organizar. Después, en la columna de la derecha calculamos los cocientes entre dos términos consecutivos. Algo así:

A(N)	Cociente A(N+1)/A(N)
2	
5	2,5
5	1
7	1,4
8	1,142857143
10	1,25
12	1,2
15	1,25
19	1,266666667
24	1,263157895
30	1,25
38	1,266666667
48	1,263157895
61	1,270833333

Al llegar al término 14 ya se adivina el valor deseado. Si seguimos bajando, la aproximación mejora mucho

709028	1,272018141
901897	1,272018877
1147230	1,272018867
1459299	1,27201956
1856257	1,272019648
2361195	1,272019446

Podemos razonarlo en el límite. Llamamos k al cociente a(n+1)/a(n). Por tanto, en la expresión de a(n) podemos escribir:

$$a_n = a_{n-1} Int\left(\sqrt{1 + 1/k^2}\right)$$

O bien, pasando a(n-1) al primer miembro,

$$k \cong \sqrt{1 + 1/k^2}$$

Elevando al cuadrado y agrupando, tenemos que k se debe aproximar a la solución de la ecuación $k^4 - k^2 - 1 = 0$, una bicuadrada cuya solución es el límite sugerido, la raíz cuadrada del número áureo.

Incluimos las cuatro soluciones tal como las da WolframAlpha:

Real solutions:

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Complex solutions:

$$x = -i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

$$x = i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

Elegimos la real positiva, y, efectivamente, resulta 1,27201964951407…

Manteniendo el razonamiento en el límite, si a(n-1) y a(n) se comportan como cateto e hipotenusa respectivamente con esa razón dada, el otro cateto, a(n-2), se podrá aproximar (también en el límite) de esta forma:

$$a_{n-2} = \sqrt{{a_n}^2 - {a_{n-1}}^2} = a_n \sqrt{1 - {}^{1}\!/_{\emptyset}} = \frac{a_n}{\emptyset}$$

Plantéate como ejercicio demostrar el último paso. Recuerda que φ-1=1/φ

En esta sucesión a(n) tiende en el límite a a(n-2)*φ

Lo hemos demostrado en el párrafo anterior. También lo podemos razonar mediante la idea de que si el cociente entre dos términos consecutivos se aproxima a la raíz del número áureo, el correspondiente a a(n) y a(n-2) será dicho número φ.

Por tanto, en el límite, cada tres términos consecutivos forman un triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a (1, 1,272019…, 1,618033…) y cuyo ángulo menor es de 38,17º.

Un ejercicio: ¿Cuál es, en el límite, el cociente entre el área del triángulo (a(n+1), a(n), a(n-1)) y el correspondiente a (a(n), a(n-1), a(n-2))?

Para quienes conozcáis el lenguaje PARI, con una línea de código similar a esta podéis estudiar la sucesión hasta términos más avanzados:

a=1;b=7;for(i=1,30,c=truncate(sqrt(a^2+b^2));a=b;b=c;print1(c,", "))

Podéis estudiar los cocientes añadiendo el código adecuado.

Conjetura: A partir de un término mínimo, a(n) se diferencia de a(n-2)+a(n-4) en a lo sumo una unidad.

Esta conjetura está publicada en la página OEIS citada para el caso a(1)=10 y a(2)=30, en el que la diferencia se estabiliza en 1. Su verificación no depende de los términos iniciales, salvo, quizás, el tope inferior de 1. Por ejemplo, lo comprobaremos con hoja de cálculo y los términos iniciales a(1)=4 y a(2)=7:

a(n)	a(n-2)+a(n-4)
4	
7	
8	
10	
12	12
15	17
19	20
24	25
30	31
38	39
48	49
61	62
77	78
98	99

En este caso vemos que a(n) tiende a coincidir con a(n-2)+a(n-4)-1

En el límite se puede justificar usando todos los cocientes presentados más arriba:

$a(n-2)+a(n-4) = a(n)/\varphi+a(n)/\varphi^2 = a(n)*(\varphi+1)/\varphi^2 = a(n)$

Así que en el límite la coincidencia es exacta: a(n-2)+a(n-4) = a(n), y la unidad como error aparece por los truncamientos.

Puedes cambiar la función ENTERO por la de REDONDEAR. Así lo hacen las sucesiones A104803, A104804, A104805 y A104806, con resultados similares.

NUMERADORES DE NÚMEROS ARMÓNICOS

Un número armónico H_n es un número racional formado mediante la suma de los inversos de los números naturales hasta n, es decir

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

La sucesión de los números armónicos tiene límite infinito, por ser divergente la serie armónica a la que pertenecen los sumandos. Es fácil ver que los denominadores de los números armónicos son, salvo simplificaciones, los primeros factoriales, pero aquí nos van a interesar los numeradores.

Con hoja de cálculo no es difícil encontrarlos, pues situamos en columna los distintos valores hasta n y en otra columna vamos dividiendo n! entre 1, 2, 3,… para después sumar la columna de cocientes (que serán todos enteros). Aquí tienes el desarrollo para n=6

	k	n!/k
	1	720
	2	360
	3	240
	4	180
	5	144
n=	6	120
	Numerador	**1764**

Se ha dividido el factorial de 6, 720, entre 1,2,…6, sumando los cocientes hasta conseguir 1764, luego el sexto número armónico tendrá la expresión 1764/720. Nos basamos en este cálculo en la operación de sacar el denominador común.

Si nos atenemos a la definición primera, vemos que H(n+1)=H(n)+1/(n+1). Si imaginamos mentalmente el resultado de esa suma entenderemos que el numerador de H(n) quedará multiplicado por n+1 con la suma posterior del primitivo denominador, es decir, n!. Esto nos lleva a una fórmula de recurrencia fácil para los numeradores: a(n+1)=a(n)*(n+1)+n!

Si aplicamos la fórmula de recurrencia al 1, obtenemos la sucesión 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584,…que coincide con los números de Stirling de primera clase, publicados en http://oeis.org/A000254 y que puedes estudiar allí. Nosotros simplificaremos las fracciones de los números armónicos, con lo que los valores anteriores se verán sustituidos por 1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993,...Estos son los numeradores que consideraremos en principio. Están también publicados (http://oeis.org/A001008)

Según las ideas contenidas en los párrafos anteriores, la primera suma que consideramos y la operación de simplificar, el algoritmo adecuado para generar estos numeradores simplificados puede ser el siguiente, que lo hemos orientado a una función de VBA:

Public Function numearmonico(n)
Dim i, v, f
v = 0
f = 1

For i = 1 To n: f = f * i: Next i ‘Se construye el factorial
For i = 1 To n
v = v + f / i ‘Se suman los cocientes del factorial con 1..n
Next i
v = v / mcd(v, f) ‘Simplificación de la fracción
numearmonico = v
End Function

Con esta función es fácil reproducir de nuevo los valores de los numeradores:

N	Numerador Hn
1	1
2	3
3	11
4	25
5	137
6	49
7	363
8	761
9	7129
10	7381

Todo lo anterior tenía por objeto que practicáramos un poco con cálculos y algoritmos, pero si hubiéramos acudido al lenguaje PARI, la generación de los numeradores es tan sencilla que se limita a su definición:

for(n=1,30,print1(numerator(sum(i=1, n, 1/i)),", "))

Obtenemos así rápidamente los primeros 30 términos:

```
? \r ini.txt
1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993, 1171733, 119
5757, 2436559, 42142223, 14274301, 275295799, 55835135, 18858053, 19093197, 4443
16699, 1347822955, 34052522467, 34395742267, 312536252003, 315404588903, 9227046
511387, 9304682830147,
? 
```

Propiedades

Estos numeradores son también interesantes por sus propiedades. Algunas sorprenden, como que el primo **p** al cuadrado divide al término **a(p-1)** para p>3 (teorema de Wolstenholme)

Lo vemos en la tabla:

a(n)	Primo p^2	Cociente
1		
3		
11		
25	25	1
137		
49	49	1
363		
761		
7129		
7381	121	61
83711		
86021	169	509
1145993		
1171733		
1195757		
2436559	289	8431

En ella se observa cómo los cuadrados de 5, 7, 11, 13 y 17 dividen a los términos de orden 4, 6, 10, 12 y 16 respectivamente. Sorprendente.

En http://oeis.org/A001008 puedes leer otras propiedades similares.

Desarrollo por Taylor

La función generatriz de los números armónicos es **log(1-x)/(x-1)**. Podemos aprovecharla para generar de nuevo estos numeradores mediante PARI. Basta desarrollar la F.G usando el desarrollo de Taylor:

print(taylor(log(1-x)/(x-1),x,20))

Obtenemos:

```
x + 3/2*x^2 + 11/6*x^3 + 25/12*x^4 + 137/60*x^5 + 49/20*x^6 + 363/140*x^7 + 761/
280*x^8 + 7129/2520*x^9 + 7381/2520*x^10 + 83711/27720*x^11 + 86021/27720*x^12 +
 1145993/360360*x^13 + 1171733/360360*x^14 + 1195757/360360*x^15 + O(x^16)
```

Y basta leer los denominadores.

Números armónicos generalizados

Todo lo que hemos estudiado se puede extender al caso en el que la suma de fracciones se efectúe con potencias en los denominadores:

$$H_{n,m=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots\frac{1}{n^m}}$$

Si repetimos el algoritmo que hemos usado, pero con potencias, resultarían los numeradores generalizados, que se obtienen cambiando los sumandos 1/n por 1/n^m en el algoritmo presentado más arriba.

En Hoja de Cálculo:

Public Function numearmonico(n, m) ‘Valores de **n** y el exponente **m**

Dim i, v, f
v = 0
f = 1
For i = 1 To n: f = f * i ^ m: Next i
For i = 1 To n
v = v + f / i ^ m
Next i
v = v / mcd(v, f)
numearmonico = v
End Function

Y en PARI:

for(n=1,30,print1(numerator(sum(i=1, n, 1/i^m)),", "))

Resultan una serie de sucesiones, a las que OEIS da el nombre de “Wolstenholme numbers”, y que tienen propiedades similares a los numeradores estudiados. Las primeras, según su exponente son:

Con el 2 http://oeis.org/A007406

1, 5, 49, 205, 5269, 5369, 266681,… y en ellas el primo p divide a a(p-1). Por ejemplo, el 5 divide a a(4)

Con el 3, http://oeis.org/A007408

1, 9, 251, 2035, 256103, 28567, 9822481,…

Con 4 http://oeis.org/A007410

1, 17, 1393, 22369, 14001361, 14011361,…

Con 5 http://oeis.org/A099828

1, 33, 8051, 257875, 806108207, 268736069,…

Todos tienen propiedades similares, según puedes consultar en los enlaces. Podemos resumir todos en una tabla de hoja de cálculo usando la función antes definida. Aquí tienes los primeros:

		Exponentes				
		1	2	3	4	5
Números	1	1	1	1	1	1
	2	3	5	9	17	33
	3	11	49	251	1393	8051
	4	25	205	2035	22369	257875
	5	137	5269	256103	14001361	806108207
	6	49	5369	28567	14011361	268736069
	7	363	266681	9822481	33654237761	4,51691E+12
	8	761	1077749	78708473	5,385894E+11	6,58584E+15

PRIMOS Y DIVISORES

SANDWICH DE SEMIPRIMOS

Unos comentarios de James Tanton (@jamestanton) en Twiter me han hecho interesarme por aquellos números tales que tanto su anterior como su posterior son semiprimos. No los recorreremos todos, porque son muchos, sino que los clasificaremos por tipos.

Todos los números que poseen esta propiedad han de ser pares, salvo el 5, porque si fueran impares, los semiprimos adyacentes deberían ser dobles de primos, que serían números consecutivos, lo que salvo el caso de 2 y 3 es imposible. Consecuencia inmediata es que un número primo mayor que 5 no puede estar encerrado entre dos semiprimos.

Los comentarios citados arriba se referían a los cuadrados, y estos ya están publicados en http://oeis.org/A108278

Con el Buscador de Naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) podemos encontrar estos números. Basta usar estas condiciones:

cuadrado
es omega(n+1)=2
es bigomega(n+1)=2
es omega(n-1)=2
es bigomega(n-1)=2

El que OMEGA (número de factores primos) y BIGOMEGA (los mismos contados con repetición) valgan 2, es señal de que son números semiprimos no cuadrados, tanto N+1 como N-1.

El resultado es:

Solución
144
900
1764
3600

Cuadrados "sandwicheados"

En realidad, en esa página figuran las bases, pero elevando al cuadrado nos resultarán los cuadrados pedidos:

144, 900, 1764,3600,10404, 11664, 39204, 97344, 213444, 272484, 360000, 656100, 685584, 1040400, 1102500, 1127844,1633284, 2108304, 2214144,…

En todos ellos el anterior y el posterior son semiprimos. Tomemos el cuadrado 213444=462^2. Su anterior 213443=461*463 y el posterior 213445=5*42689, ambos semiprimos. El primero nos lleva a una situación interesante, y es que si el cuadrado central es n^2, el anterior será n^2-1=(n-1)(n+1), y al ser semiprimo el producto ambos factores serán primos y más aún, primos gemelos. Es lo que ha ocurrido con el 144.

Si un cuadrado está rodeado por dos semiprimos, el anterior es producto de dos primos gemelos.

Respecto a los factores de n^2+1, han de ser del tipo 4k+1, según estudiamos hace tiempo. Puedes seguir el razonamiento en el apartado dedicado a “Un cuadrado y una unidad” en el documento

http://www.hojamat.es/publicaciones/hojanum1.pdf

Al deber ser pares, estos cuadrados serán todos múltiplos de 4.

Si deseas reproducirlos con PARI, este puede ser el código:

for(i=2,2000,n=i*i;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))

Triangulares entre semiprimos

También los triangulares pueden estar comprendidos entre dos semiprimos. Los primeros están publicados en http://oeis.org/A121898

120, 300, 528, 780, 2628, 3240, 3828, 5460, 13530, 18528, 19110, 22578, 25878, 31878, 32640, 37128, 49770, 56280, 64980, 72390, …

En PARI: ***for(i=2,2000,n=i*(i+1)/2;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))***

Además de ser pares, son múltiplos de 3, y por tanto de 6. En efecto, si un triangular no es múltiplo de 3 sólo puede ser porque su orden sea del tipo 3k+1, ya que entonces el triangular tendría la expresión (3k+1)(3k+2)/2, que no contiene ningún factor 3 (en los otros casos sí). Pero en este caso, al restarle 1 no obtendríamos un semiprimo. Lo desarrollamos:

$$T_{3k+1}-1=\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}-1=\frac{9k^2+9k+2-2}{2}$$
$$=9\frac{k(k+1)}{2}=9T_k$$

Al tener el factor 9 no puede ser semiprimo. Además hemos descubierto que es nueve veces el triangular de orden ***k***.

Por ejemplo, el número triangular de orden 13, 91=13*14/2, no es múltiplo de 3, y su anterior, 90, no puede ser semiprimo, y es igual a 9*10=9*T(4)

El desarrollo anterior se puede invertir, es decir, que si multiplicamos por 9 un triangular y sumamos 1, obtenemos otro triangular no múltiplo de 3 o 6.

Sólo los números triangulares N múltiplos de 6 pueden tener semiprimos N-1 anteriores a ellos.

Oblongos entre semiprimos

¿Ocurrirá algo similar con los oblongos? La respuesta es negativa.

Recordemos que los números oblongos son los dobles de los triangulares, es decir, los que se pueden expresar como N=k(k+1). Así, 56=7*8 es oblongo, y su anterior 55=5*11 y el posterior 57=3*19 son semiprimos. Cumple la condición de estar entre semiprimos, pero no es múltiplo de 3 (par sí tiene que ser).

Los primeros oblongos con la propiedad requerida son:

56, 552, 870, 1056, 1190, 1640, 1892, 2652, 4032, 5256, 5402, 6806, 8372, 9120, 9506, 9702, 10920, 11772, 12656, 12882, 15006, 15252, 15500, 16256, 16770, 17556, 18632, 23256, 24492, 27722, 29070, 30800, 33306, 33672, 34410, 36290, 40200, 40602, 44310, 45582, 46872, 49506,…

Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en https://oeis.org/A276565

Tomamos uno de ellos, por ejemplo 16256=127*128, y por tanto, oblongo. Su anterior es semiprimo, ya que 16255=5*3251, y 16257=3*5419, también lo es. No es múltiplo de 3.

El posterior no puede ser múltiplo de 5, porque los oblongos terminan todos en 0, 2 o 6, y al sumar no obtendremos ni 5 ni 0 como última cifra.

El anterior no puede ser múltiplo de 3. Si lo es el oblongo, es claro que al restar 1 deja de serlo. Si no lo es, sería del tipo

$(3k+1)(3k+2)-1 = 9k^2+9k+1$ y tampoco.

Si deseas obtener más términos, puedes adaptar este código en PARI:

for(i=2,2000,n=i*(i+1);if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))

Números de Fibonacci

Están publicados los números de la sucesión de Fibonacci comprendidos entre semiprimos. Sólo hay cuatro con pocas cifras: 5, 34, 144, 46368. Se conjetura que no hay infinitos.

Puedes estudiarlos en http://oeis.org/A167023

Cubos perfectos

Los cubos rodeados de semiprimos son muy escasos. El primero es 216=6^3, con 215=5*43 y 217=7*31.

Los siguientes llegan a ser casi inabordables: 216, 1302170688, 7211429568, 20346417000, 71887512312, 281268868608, 1394417360448, 17571944311992, 28350304855488, 170400029184000, 450335804625000, 504966851923968, 616121259098688, 1064394808685208, 3442267015299000, 3517494650695368, 3540860163178632, …

Es preferible tratar con sus bases. Las tienes publicadas en http://oeis.org/A268043

6, 1092, 1932, 2730, 4158, 6552, 11172, 25998, 30492, 55440, 76650, 79632, 85092, 102102, 150990, 152082, 152418, 166782, 211218,…

Estos números tienen una propiedad importante, y es que su anterior y posterior han de formar un par de primos gemelos. La idea es sencilla: si n^3-1 ha de ser semiprimo, al ser múltiplo de n-1, este ha de ser primo, pues en caso contrario el otro no sería semiprimo. Igual ocurre con n+1. Por ejemplo, 166782 está rodeado por los primos gemelos 166781 y 166783.

Los puedes encontrar con PARI:

for(i=2,2000,n=i^3;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(i,"; ")))

Potencias enteras

Hemos estudiado los cuadrados y cubos entre semiprimos, pero podríamos generalizar a todas las potencias de base y exponente enteros mayores que 1.

No es muy difícil encontrarlos si se dispone de una función ESPOTENCIA o similar. En nuestro equipo disponemos de ella, y hemos podido emprender la búsqueda, consiguiendo esta lista de los primeros:

144, 216, 900, 1764, 2048, 3600, 10404, 11664, 39204, 97344, 213444, 248832, 272484, 360000, 656100, 685584, 1040400, 1102500, 1127844, 1633284, 2108304, 2214144, 3504384, 3802500, 4112784, 4536900, 4588164, 5475600, 7784100, 7851204, 8388608, 8820900, 9000000, 9734400…

Los hemos publicado en https://oeis.org/A276564

Puedes reproducirla con PARI:

for(i=2,10^7,if(ispower(i)&&bigomega(i-1)==2&&bigomega(i+1)==2,print1(i,", ")))

Con base prima hay muy pocos. Los primeros son 2048 y 8388608

Otros casos

Podríamos seguir el estudio con pentagonales (los primeros serían 5, 92, 590, 1080, 1820, 8400,…) o hexagonales (120, 780, 3828, 19110,…), pero por hoy ya está bien. Lo dejamos como propuesta.

NÚMEROS 3-FRIABLES

Estudiaremos en este apartado los números que sólo poseen como factores primos el 2 y el 3. De nuevo nos inspiramos en una sucesión de OEIS. Esta vez en la A003586 (http://oeis.org/A003586), que presenta los que llama "3-smooth numbers", que se puede traducir como "liso o alisado (o regular) de grado 3". En francés se les denomina 3-friables, y en nuestro idioma "friable" equivale a "fácilmente desmenuzable". Si alguien conoce otra denominación española puede comunicármelo. Mientras tanto, utilizaré una denominación similar a la francesa. Hendrik Lenstra les llama *armónicos*, en recuerdo de un texto de Phillipe de Vitry, obispo de Meaux, compositor del siglo XIV.

Me quedaré con la nomenclatura francesa: Un número es B-friable si todos sus factores primos son menores o iguales a B. En nuestro caso los números que estudiaremos son 3-friables.

Simplemente son números cuyos únicos factores primos son el 2 o el 3 (o ambos), es decir, que tienen la forma N=2^i*3^j con i,j≥0.

Los primeros son estos:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96, 108, 128, 144, 162, 192, 216, 243, 256, 288, 324, 384, 432, 486,…

Es fácil ver que desde el 1=2^0*3^0 hasta el final, todos tienen como únicos factores primos el 2 y/o el 3.

Existe una prueba muy sencilla para averiguar si un número es de este tipo. Consiste en dividir entre 2 y entre 3 mientras sea posible, es decir, mientras el número y los cocientes sucesivos sean múltiplos de uno de los dos. Si al final del proceso nos queda un 1, es que los únicos factores son 2 y 3, como se pide. Lo podemos concretar mediante la función *solo23*, que devuelve VERDADERO o FALSO. Adjuntamos la versión para el Basic de hojas de cálculo:

Public Function solo23(n) As Boolean
Dim m
m = n ‘m representa los cocientes sucesivos
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: Wend ‘Divide entre 2 mientras se pueda
While m Mod 3 = 0: m = m / 3: Wend ‘Hace lo mismo con el 3
If m = 1 Then solo23 = True Else solo23 = False ‘Si al final queda un 1, es de ese tipo
End Function

La siguiente tabla aparece en la hoja con bastante rapidez:

1
2
3
4
6
8
9
12
16
18
24
27
32
36
48
54
64
72
81
96

La versión en PARI puede ser esta:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,300,a=m23(i);if(a,print1(i,", ")))

Es idéntica a la anterior, pero con otras reglas de sintaxis.

Esta misma idea puede servir para descomponer un número 3-friable en sus dos componentes 2^p y 3^q. Insertamos las funciones COMP2 Y COMP3 que no necesitan explicación:

Public Function comp2(n)
Dim m
m = n
While m Mod 3 = 0: m = m / 3: Wend 'Divide entre 3 mientras se pueda
comp2 = m
End Function

Public Function comp3(n)
Dim m
m = n
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: Wend 'Divide entre 2 mientras se pueda
comp3 = m
End Function

En la siguiente tabla se han descompuesto los primeros números 3-friables:

N	comp2	comp3
1	1	1
2	2	1
3	1	3
4	4	1
6	2	3
8	8	1
9	1	9
12	4	3
16	16	1
18	2	9
24	8	3
27	1	27
32	32	1
36	4	9

Generación recursiva

Es tentador generar nuevos términos si se conocen los anteriores. Se puede lograr siguiendo algunas ideas sugeridas en la sucesión A003586 (Hai He y Gilbert Traub, Dec 28 2004). El procedimiento se basa en que las potencias de 2 aparecen con más frecuencia que las de 3. Usamos estas potencias 3^q como indicadores del progreso de creación: mientras se pueda, se añaden factores 2 a los términos anteriores, y cuando ya sea imposible, se aumenta el exponente del 3 y se toma como nuevo término.

Dada una potencia de 3 cualquiera, 3^q, que sea término de la sucesión:

(1) Se prueba a multiplicar por 2 todos los términos anteriores que den lugar así a términos nuevos

(2) Si se agotan las multiplicaciones por 2 (al sobrepasar 3^q), se pasa a 3^(q+1) y se vuelve al paso 1.

El problema de este procedimiento es que para multiplicar por 2 quizás debamos retroceder bastante en la sucesión, con lo que habría que definir variables locales que almacenaran los términos, con ocupación de memoria y la ignorancia previa de qué dimensión darles. Para resolverlo usaremos la primera columna de una hoja de cálculo. Definiremos como u(k) el valor de la celda k de la primera columna, y usaremos una subrutina es_u(k,v) para escribir el valor v en esa celda k. Lo escribimos para Excel:

Public Function u(i)
u = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, 1).Value ‘la variable u(i) representa la celda i
End Function
Sub es_u(i, a)
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, 1).Value = a ‘esta rutina lee el valor de la celda i
End Sub

Con la ayuda de estas dos rutinas, podemos ya presentar el algoritmo completo:

Sub engendram23()
Dim k, j, n

Call es_u(1, 1) 'rellena con un 1 la primera celda de la columna 1
k = 1 'la variable k lleva la cuenta de los términos engendrados
j = 1 'la variable j lleva la cuenta de los exponentes del 3
For n = 1 To 100 'así se generan 100 términos. Lo podemos cambiar.
k = k + 1 'se busca un nuevo elemento
If 2 * u(k - j) < 3 ^ j Then 'se retrocede para multiplicar por 2
Call es_u(k, 2 * u(k - j)) *'si no se llega a la potencia 3^j, se almacena un nuevo término*
Else
Call es_u(k, 3 ^ j): j = j + 1 'si ya no es posible multiplicar por 2, se almacena 3^j y se incrementa
End if
Next n
End Sub

Aquí tienes el resultado de los primeros, ordenado por filas:

	A
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	8
7	9
8	12
9	16
10	18
11	24
12	27
13	32
14	36
15	48
16	54
17	64

¿Por qué no un producto cartesiano?

Los anteriores cálculos se han introducido para que los números 3-friables aparezcan ordenados, pero si renunciamos a ese detalle, se pueden generar sencillamente con un producto cartesiano entre el conjunto de las potencias de 2 y el de 3. Si trabajamos con hoja de cálculo podemos posteriormente ordenar la columna que los contiene.

Así hemos procedido acudiendo a nuestra hoja *Cartesius*, de pronta publicación. Hemos definido dos conjuntos de potencias (2 y 3) que hemos combinado formando un producto cartesiano, indicando a la hoja que nos presente el producto de cada par. Las instrucciones han sido estas:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
Xtotal=2	
x1=1..40	
x1=suc(2^(n-1))	
x2=1..25	
x2=suc(3^(n-1))	

Se adivina que se han definido dos conjuntos, uno de potencias de 2 a partir de 1 (de ahí el **n-1**) y otro de potencias de 3. A los pares que resultan se les ha convertido en producto, creando así una columna desordenada de números del tipo 2^p*3^q. Después sólo queda copiar esa columna en otra hoja y proceder a ordenarla. De esa forma dispondremos de (en este caso 1000) los números 3-friables hasta donde deseemos.

En esta captura de pantalla puedes ver algunos de ocho cifras:

192	10077696
193	10616832
194	11337408
195	11943936
196	12582912
197	12754584
198	13436928
199	14155776
200	14348907

Número de divisores y sigmas de los números 3-friables

Las funciones dependientes de divisores serán en este caso muy simples, ya que sólo manejaremos los exponentes de 2 y 3. Vemos algunas:

Número de divisores (función TAU)

Nos basaremos en la expresión general de estos números, sea

$$N = 2^p 3^q$$

Consultamos nuestra publicación sobre funciones multiplicativas (http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf) y vemos que TAU se expresa respecto a los exponentes como

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a_1}) * (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a_2}) \dots (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{a_k})$$

En este caso D(N)=(1+p)(1+q). Por tanto, nunca tendrán un número de divisores primo si son múltiplos de ambos 2 y 3, pero sí pueden serlo si sólo son múltiplos de uno de ellos. En otros casos sí será semiprimo el número de divisores, como en el caso 2^2*3^6 cuyo número de divisores es 3*7, semiprimo.

También se puede dar la casualidad, al tener pocos factores, de que el número 3-friable sea múltiplo de TAU. Pues bien, resultan muchos números con esta propiedad. Los primeros son:

1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, 96, 108, 128, 288, 384, 864, 972, 1152, 1944, 3456, 6144, 6561, 6912, 7776, 13122, 18432, 26244, 31104, 32768, 52488, 55296, 62208, 69984, 98304,…

Los puedes conseguir con PARI:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,10^5,if(m23(i)&&i%sigma(i,0)==0,print1(i,", ")))

Función SIGMA

La función SIGMA suma todos los divisores de un número, al igual que la anterior los cuenta. Su expresión es

$$\sigma(N) = \prod \frac{{p_i}^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Es fácilmente adaptable a nuestro caso. Sería así:

$$\sigma(N) = (2^{p+1} - 1)(3^{q+1} - 1)/2$$

Por ejemplo, el elemento 384=2^7*3 tendrá (1+7)(1+1)=16 divisores. En efecto, son estos: 384, 192, 128, 96, 64, 48, 32, 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.

Su suma, la función SIGMA, tendrá el valor (2^8-1)(3^2-1)/2=255*4=1020, como puedes comprobar sumando los 16 divisores.

¿Puede ser prima la sigma de estos números?

Para ello, uno de los factores debería ser primo, y el otro la unidad. Si observas los paréntesis de la fórmula de arriba, sólo valdrán 1 si p=0 o q=0. Sólo pueden tener sigma prima aquellos elementos que sólo sean múltiplos de 2 o de 3. En concreto son los siguientes:

2, 4, 9, 16, 64, 729, 4096, 65536, 262144,…

Los puedes conseguir con este algoritmo en PARI

```
m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,300000,a=m23(i);if(a&&isprime(sigma(i)),print1(i,", ")))
```

Vemos que aparecen números de la forma 2^p, como 2, 4, 16, 64, 4096, y otros del tipo 3^q, que serían 9 y 729. Los vemos por separado:

Los elementos del tipo 2^p serán aquellos en los que 2^(p+1)-1 sea primo, pero esos son los primos de Mersenne: 3, 7, 31, 127, 8191,…, por lo que serán los únicos casos posibles, según la tabla siguiente:

Número	Sigma	Exponente Mersenne en 2^p-1
2	3	2
4	7	3
16	31	5
64	127	7
4096	8191	13
65536	131071	17
262144	524287	19
1073741824	2147483647	31

Aquí tienes la lista de los primeros casos del tipo 2^p:

2, 4, 16, 64, 4096, 65536, 262144, 1073741824, 1152921504606846976, 309485009821345068724781056, 81129638414606681695789005144064, 85070591730234615865843651857942052864,…

Es fácil ver que en esta tabla sigma(sigma(n))=2n. En efecto, los primeros de la tabla son fácilmente comprobables:
sigma(sigma(4))=sigma(7)=7+1=2*4,…Mediante cálculos tendríamos que
sigma(sigma(2^p))=sigma(2^(p+1)-1)=2^(p+1)-1+1, por ser prima la sigma, luego

Sigma(sigma(2^p))=2^(p+1)=2*2^p

Por tener esta propiedad, a estos números se les llama *superperfectos*, y están publicados en

http://oeis.org/A019279

Los del tipo 3^q tendrán sigma prima si (3^(q+1)-1)/2 es primo, lo que obliga a que q sea par, como ocurre en los casos vistos de 9=3^2 y 729=3^6 y podemos añadir 3^12=531441. Esta es la lista de los primeros:

9, 729, 531441,
2503155504993241601315571986085849,
463839768658810197932815016789059145431896769
8009,…

Están publicados en http://oeis.org/A255510

¿Podría ser semiprima?

La sigma de los números 3-friables también puede ser semiprima. Basta exigir en los algoritmos que bigomega(N) sea igual a 2, si recordamos que BIGOMEGA cuenta los factores primos con repetición. Si unimos las funciones solo23 (o m23 en PARI) con bigomega obtendremos las soluciones. En la tabla puedes estudiar los primeros ejemplos, obtenidos con hoja de cálculo

N	sigma(N)	Factores
3	4	[2,2]
8	15	[3,1][5,1]
18	39	[3,1][13,1]
36	91	[7,1][13,1]
81	121	[11,2]
144	403	[13,1][31,1]
256	511	[7,1][73,1]
576	1651	[13,1][127,1]
1024	2047	[23,1][89,1]
1458	3279	[3,1][1093,1]
2916	7651	[7,1][1093,1]

La primera columna contiene los números (3-friables), la segunda su sigma y la última los dos factores de la misma que la convierten en semiprima.

Podemos ampliar la lista usando PARI:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=2,10^11,if(m23(i)&&bigomega(sigma(i))==2,print1(i,", ")))

Obtendremos:

3, 8, 18, 36, 81, 144, 256, 576, 1024, 1458, 2916, 6561, 11664, 36864, 46656, 59049, 589824, 1062882, 2125764, 2359296, 2985984, 4194304, 8503056, 34012224, 43046721, 47775744, 191102976, 387420489, 2176782336, 9663676416, 31381059609, 34828517376, 68719476736, 139314069504,…

Este algoritmo es muy lento, por lo que podemos usar la idea del producto cartesiano que desarrollamos anteriormente. Sólo hay que ordenar al final la lista que creemos término a término. Quedaría así:

l=List();for(i=0,40,for(j=0,25,a=2^i*3^j;if(bigomega(sigma(a))==2,listput(l,a))));listsort(l);print(l)

Nos da más términos de una forma muy rápida:

3, 8, 18, 36, 81, 144, 256, 576, 1024, 1458, 2916, 6561, 11664, 36864, 46656, 59049, 589824, 1062882, 2125764, 2359296, 2985984, 4194304, 8503056, 34012224, 43046721, 47775744, 191102976, 387420489, 2176782336, 9663676416, 31381059609, 34828517376, 68719476736, 139314069504, 782757789696, 1099511627776, 570630428688384,…

Y los que son sólo potencias de 2

8, 256, 1024, 4194304, 68719476736, 1099511627776, 281474976710656, 288230376151711744, 73786976294838206464, 48357032784585166988 24704, 79228162514264337593543950336, 1267650600228229401496703205376, 5070602400912917605986812821504, 324518553658426726783156020576256,

Se encuentran fácilmente con PARI:

```
for(n=1,120,a=2^n;if(bigomega(sigma(a))==2,print1(a,", ")))
```

Se corresponden con los exponentes 3, 8, 10, 22, 36, 40, ,48, 58, 66, 82, 96, 100, 102, 108,…

Indicatriz de Euler

Para estos números N es muy fácil obtener la indicatriz, número de números coprimos con N y menores que él. Disponemos de una fórmula sencilla, publicada en muchos medios

$$\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

En este caso: φ(N)=φ(2^p*3^q)=2^p*3^q*(1-1/2)(1-1/3)=2^p*3^(q-1)

Existen relaciones muy sencillas en este caso entre N y φ(N)

(a) Si q>0 y p>0 , la indicatriz **es un tercio del número**, como es fácil de ver por su expresión.

(b) Si q=0 tenemos que usar φ(N)=φ(2^p)=2^p*(1-1/2)=2^(p-1) y sería **la mitad**.

(c) Si p=0 tenemos φ(N)=φ(3^q)=3^q*(1-1/3)=3^(q-1)*2 y equivaldría a los dos tercios de **N**.

En la siguiente tabla lo puedes comprobar: los cocientes entre N y su Indicatriz siempre son 3, 2 o 1,5, según si son potencias dobles de 2 y 3 o sólo de 2 o sólo de 3:

N	PHI(N)	COCIENTE
2	1	2
3	2	1,5
4	2	2
6	2	3
8	4	2
9	6	1,5
12	4	3
16	8	2
18	6	3
24	8	3
27	18	1,5
32	16	2
36	12	3
48	16	3
54	18	3
64	32	2
72	24	3
81	54	1,5
96	32	3
108	36	3

Consecuencia importante: **La indicatriz de un número 3-friable es también 3-friable**.

Las propiedades que hemos estudiado se pueden unificar en una sola fórmula:

φ(6N)=2N

Recorremos los casos:

Si q>0 y p>0 , 6N=2^(p+1)*3^(q+1), luego la indicatriz valdrá un tercio, es decir 2^(p+1)*3^q, que equivale a 2N

Si q=0, 6N=2^(p+1)*3, y la indictariz también será un tercio, es decir 2^(p+1)=2N

Si p=0, 6N=2*3^(q+1). La indicatriz vuelve a ser un tercio, y queda 2*3^q=2N

Divisores unitarios

Un divisor k de N es unitario si es primo con el cociente N/k, que por tanto también sería unitario. Los unitarios forman pares, comenzando con (N,1). Es sencillo razonar que en los números 3-friables 2^p*3^q con p>0 y q>0 sólo existirá otro par, el (2^p,3^q). Por tanto, la función USIGMA, suma de unitarios, valdrá en este caso

Usigma(n)=2^p*3^q+2^p+3^q+1=(2^p+1)(3^q+1).

Podemos interpretarlo como que se incrementan en una unidad las componentes 2^p y 3^q y después se multiplican, siempre que p>0 y q>0. Hemos construido una tabla en la que se confirma que usigma es igual a ese producto.

N	comp2	comp3	comp2+1	comp3+1	USIGMA
6	2	3	3	4	12
12	4	3	5	4	20
18	2	9	3	10	30
24	8	3	9	4	36
36	4	9	5	10	50

UN POCO DE ÁLGEBRA CON ENTEROS

EXPRESIÓN CUADRÁTICA X^2+KY^2 = N

Hace unos meses publiqué en Twiter, como una curiosidad, esta tabla de desarrollos para el número 4516

Expresión	4516
x^2+y^2	54^2+40^2
x^2+2y^2	58^2+2×24^2
x^2+3y^2	29^2+3×35^2
x^2+4y^2	54^2+4×20^2
x^2+5y^2	4^2+5×30^2
x^2+6y^2	46^2+6×20^2
x^2+7y^2	22^2+7×24^2
x^2+8y^2	58^2+8×12^2
x^2+9y^2	40^2+9×18^2
x^2+10y^2	66^2+10×4^2

No existen muchos números que admitan esas diez expresiones cuadráticas con enteros. En concreto estos son los primeros:

1009, 1129, 1201, 1801, 2521, 2689, 3049, 3361, 3529, 3889, 4036, 4201, 4516, 4561, 4729, 4804, 5209, 5569, 5881, 6841, 7204, 7561, 7681, 8089, 8521, 8689, 8761, 8929, 9081, 9241, 9601, 9769,…

¿Qué hay detrás de esta lista?

Realmente, el problema radica en resolver la ecuación $X^2+kY^2=N$, con $k>0$ buscando soluciones enteras $X>1$ $Y>1$, para evitar trivialidades.

Despejando X en $X^2+kY^2=N$ nos queda

$$X = \sqrt{N - kY^2}$$

Por tanto, para averiguar si un número se puede desarrollar de esta forma, bastará recorrer los valores de Y entre 1 y la raíz cuadrada de N/k. El valor que dé como resultado un cuadrado en el radicando será válido.

Por ejemplo, hemos afirmado arriba que 4516 se puede desarrollar como X^2+9Y^2, con $X>1$ e $Y>1$. Según lo anterior, buscamos la raíz cuadrada de 4516/9, que resulta ser 22 (si tuviera decimales, truncaríamos). Por tanto habrá que ir probando desde Y=1 hasta Y=22 para ver qué valor da un cuadrado perfecto.

Si se posee la función ESCUAD (puedes copiarla desde nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/02/numeros-especiales-que-son-un-producto.html) para ver si un número es cuadrado perfecto, lo podemos organizar en una hoja de cálculo.

Valor de Y	$4516-9Y^2$	Es cuadrado
1	4507	FALSO
2	4480	FALSO
3	4435	FALSO
4	4372	FALSO
5	4291	FALSO
6	4192	FALSO
7	4075	FALSO
8	3940	FALSO
9	3787	FALSO
10	3616	FALSO
11	3427	FALSO
12	3220	FALSO
13	2995	FALSO
14	2752	FALSO
15	2491	FALSO
16	2212	FALSO
17	1915	FALSO
18	**1600**	**VERDADERO**
19	1267	FALSO

No hemos encontrado una solución hasta el valor 18, que junto a la raíz cuadrada de 1600 forma la expresión vista en el primer párrafo 40^2+9*18^2=4516

Función esforma(N;k)

Esta búsqueda que hemos efectuado se podría automatizar. Dado un número N y un coeficiente k podemos diseñar una función que devuelva TRUE si es posible la expresión $N=X^2+KY^2$ y FALSE en caso contrario. Existe una variante más útil, y es que si la expresión es posible, la devuelva en forma de String, y en caso contrario la frase “NO”.

En el Basic de VBA podría tener este código (añadimos la función ESCUAD por si no la has encontrado)

```
Public Function escuad(n) As Boolean
If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad = False
End If
End Function

Public Function esforma(n, k) As String
Dim a, b, i
Dim es As Boolean
If k <= 0 Then esforma = "NO": Exit Function ‘Para k<=0 no hay solución
a = Int(Sqr(n / k)) ‘Tope de búsqueda
es = False
i = 1
While i <= a And Not es
b = n - k * i * i
If escuad(b) And b > 0 Then es = True: b = Sqr(b) ‘Se encuentra una solución
i = i + 1
Wend
If es Then
esforma = Str$(b) + "^2+" + Str$(k) + "*" + Str$(i - 1) + "^2" ‘Construcción del String
```

Else
esforma = "NO" 'No es expresable
End If
End Function

Con esta función podemos construir un esquema para ver si un número admite la expresión $N=X^2+KY^2$ con un valor de k dado. En esta imagen encontramos el desarrollo de 4516 con coeficiente 5:

Número N		4516
Coeficiente k		5
Es forma		4^2+ 5* 30^2

Hay que advertir que la función ESFORMA sólo da la primera solución posible, sin descartar que existan otras.

En esta otra imagen se comprueba que el número 1298 no admite la expresión $N=X^2+7Y^2$

Número N		1298
Coeficiente k		7
Es forma		NO

Ordenando un poco los cálculos podemos reproducir la imagen con la que comenzamos (con formato de hoja de cálculo)

Valor de K	Forma cuadrática
1	54^2+ 1* 40^2
2	58^2+ 2* 24^2
3	67^2+ 3* 3^2
4	54^2+ 4* 20^2
5	4^2+ 5* 30^2
6	46^2+ 6* 20^2
7	22^2+ 7* 24^2
8	58^2+ 8* 12^2
9	40^2+ 9* 18^2
10	66^2+ 10* 4^2
11	NO
12	38^2+ 12* 16^2
13	NO

En el caso de k=3 nos devuelve una solución distinta, ya que hay más de una, y hemos prolongado la tabla para comprobar que para los valores k=11 y k=13 no existe solución.

Listado de números expresables

Con esta función y un bloque FOR-NEXT podemos encontrar la lista de los primeros números que se pueden expresar como $N=X^2+kY^2$ para un valor de k determinado, e incluso con un doble bucle, los que son expresables para varios valores. Así hemos construido la lista de los que son expresables para los valores k=1..10: 1009, 1129, 1201, 1801, 2521, 2689,…

Números que se puedan expresar con los valores de k=1..11 existen muchos menos. Los primeros son: 7561, 10756, 14116, 14281,…

El número 21961 satisface las expresiones para k=1..13 y los números 32356, 35044 y 35281 llegan al valor 14. Llegan hasta el 15 los números 32356, 35044 y 35281.

Y así podríamos seguir, con valores cada vez más altos y escasos.

En estos listados están incluidos valores de k que pueden resultar redundantes. Por ejemplo, si un número es expresable como X^2+8Y^2, también lo es como X^2+2(2Y)^2. Así que si comprobamos la expresión X^2+8Y^2 lo estamos haciendo también con X^2+2Y^2. Como los cálculos no eran muy lentos, hemos preferido dejarlos. En otros trabajos similares se suelen estudiar tan solo los valores primos de k.

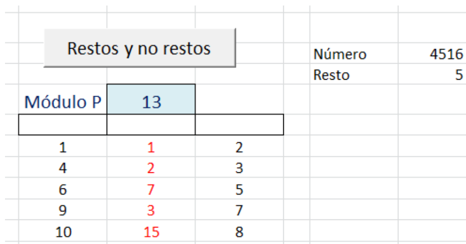
Aspecto modular

Si nos fijamos en los restos módulo k, es fácil ver que para que $N=X^2+kY^2$ ha de ser N congruente con X^2 módulo k, es decir, que N ha de ser **un resto cuadrático** módulo k. Si se dispone de un listado de esos restos, o un programa que los genere, podemos averiguar para qué polinomios del tipo dado es expresable un número. La hoja que hemos alojado en esta dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/hoja/congruencias2.xlsm

contiene restos cuadráticos para cada caso

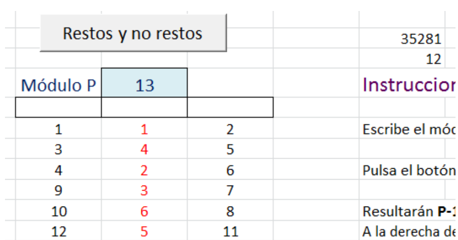
Hemos adaptado provisionalmente esta herramienta para este caso particular. A cada número que probemos le calculamos el resto respecto a k y lo comparamos con la lista de cuadráticos. Esta prueba sólo la efectuaremos para valores de k que sean primos impares. Los demás casos se reducen a este. Vemos unos ejemplos mediante imágenes:



Restos y no restos			Número	4516
			Resto	5
Módulo P	13			
1	1	2		
4	2	3		
6	7	5		
9	3	7		
10	15	8		

Aquí vemos que el resto 5 no figura en el listado de restos cuadráticos (columna de la izquierda), 1, 4, 6, 9, 10,…módulo 13, por lo que no es expresable para ese coeficiente.

El mismo resultado obtendríamos mediante ESFORMA(4516,13).



Restos y no restos			35281
			12
Módulo P	13		Instruccior
1	1	2	Escribe el móc
3	4	5	
4	2	6	Pulsa el botón
9	3	7	
10	6	8	Resultarán **P-1**
12	5	11	A la derecha de

Por el contrario, el número 35281 sí es expresable mediante X^2+13Y^2, ya que su resto respecto al 13 es 12, y ese valor sí figura como resto cuadrático (el último de la primera columna). Lo dejamos aquí por si te apetece profundizar en la teoría de los restos cuadráticos.

DESCOMPOSICIONES EN DIFERENCIA DE CUADRADOS

Después de jugar bastante con los números naturales, he observado la disparidad existente entre ellos respecto al número de sus descomposiciones en diferencias de cuadrados. Nos referimos al número de soluciones de

N=a^2-b^2 con a y b enteros y a>0 y b>=0 para un N dado.

Hay números que no admiten ninguna descomposición de este tipo, como el 22, y otros que admiten muchas. Un ejemplo es el 1680, que admite doce:

1680=421^2-419^2=212^2-208^2=143^2-137^2=109^2-101^2=89^2-79^2=

=76^2-64^2=67^2-53^2=52^2-32^2=47^2-23^2=44^2-16^2=43^2-13^2=41^2-1^2

En la tabla lo puedes comprobar:

a	b	a^2-b^2
421	419	1680
212	208	1680
143	137	1680
109	101	1680
89	79	1680
76	64	1680
67	53	1680
52	32	1680
47	23	1680
44	16	1680
43	13	1680
41	1	1680

¿De qué depende esto? Lo iremos viendo más adelante.

Obtención del número de descomposiciones

Al igual que hemos procedido con otros temas, comenzaremos encontrando las soluciones sin apoyo de la teoría, para más adelante fundamentarlo y después extraer propiedades y curiosidades.

Cualquier algoritmo para resolver esta cuestión se puede basar en el hecho de que una descomposición de este tipo equivale a expresar N mediante **un producto de factores con la misma paridad**, ambos pares o ambos impares. En efecto, si N=b^2-a^2 resultaría N=(a+b)(a-b), y ambos factores tienen la misma paridad, como se comprueba estudiando los cuatro casos posibles para a y b: par-par, par-impar, impar-par e impar-impar. Es fácil. A la inversa: si N=m*n, ambos de la misma paridad resultaría que (m+n)/2 y (m-n)/2 serían enteros, cumpliéndose que N=((m+n)/2)^2-((m-n)/2)^2

El número de descomposiciones de N en diferencia de cuadrados coincide con el de productos con factores de la misma paridad y resultado N.

Para hacer más fáciles los trabajos, admitiremos que **b** pueda ser nulo, o de forma equivalente, que **los dos factores sean iguales**.

Establecida esta propiedad, la búsqueda se efectuaría encontrando divisores **d** de **N** tales que **d y N/d tengan la misma paridad**. Esto lo podemos lograr fácilmente, usando divisiones enteras y aritmética modular. En el siguiente ejemplo lo implementamos como función Basic para hojas de cálculo:

Public Function numdifcuad(n)
Dim i, m
m = 0 ‘Contador de casos
For i = 1 To Sqr(n) ‘Se llega a la raíz cuadrada para evitar repeticiones de divisores
If n / i = n \ i Then ‘Si el cociente es igual al cociente entero, es que es divisor
If Abs(i - n / i) Mod 2 = 0 Then m = m + 1 ‘el divisor i y el cociente n/i tienen la misma paridad, ‘porque su diferencia da resto 0 módulo 2, luego incrementamos el contador.
End If
Next i

numdifcuad = m
End Function

Así de sencillo. Con esta función podemos contar las descomposiciones posibles para cada número. En la tabla puedes observar las correspondientes a los primeros números:

N	Núm. Descomp.
1	1
2	0
3	1
4	1
5	1
6	0
7	1
8	1
9	2
10	0
11	1
12	1
13	1
14	0
15	2
16	2
17	1
18	0
19	1
20	1
21	2
22	0

Verás que se dan muchos casos, desde el 22 o el 14, que no admiten descomposiciones, hasta el 16 o el 15, que admiten 2. Si siguiéramos leyendo hacia abajo descubriríamos que 45 es el primero que admite 3 casos: 45=23^2-22^2=9^2-6^2=7^2-2^2.que se corresponden con las descomposiciones en producto 45=45*1=15*3=9*5, todas con factores de igual paridad.

El primero con cinco casos es el 96, y así podríamos seguir hasta 1680 que vimos presenta doce.

N	NUMDIFCUAD(N)
1680	12

Estos resultados están ya publicados en https://oeis.org/A034178

A034178 Number of solutions to n = a^2 - b^2, a > b >= 0.

1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 3, 0, 1, 3, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 3, 3, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 1, 3, 3, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 1, 0, 3 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Podemos comprobar que coinciden con nuestros resultados

Análisis teórico de la situación

Es importante distinguir en principio si N es par o impar.

Caso 1: N es impar

Si N es impar, todos los posibles pares de factores N=m*n tendrán la misma paridad, luego sólo tenemos que contarlos. Recordamos que la función TAU, que cuenta los divisores, viene dada por la fórmula

$$\tau(a^p b^q c^r \ldots) = (1+p)(1+q)(1+r)\ldots$$

En ella a, b c,…representan los factores primos y p, q, r,…sus exponentes. Como los divisores han de formar pares, deberemos encontrar la mitad de la función (si esta es par), por tanto, si expresamos el número de descomposiciones mediante la función ND, tendremos:

$$ND(n) = \frac{\tau(n)}{2}$$

Lo comprobamos. Según la tabla el 21 admite dos descomposiciones. Como 21=3*7, τ(21)=(1+1)(1+1)=4, y su mitad entera es dos, como indica la tabla.

Si TAU es impar, será porque todos los exponentes serán pares, con lo que N será un cuadrado, apareciendo entonces un par nuevo al multiplicar la raíz cuadrada por sí misma. Podemos unificar ambas situaciones:

$$ND(n) = Int\left(\frac{\tau(n)}{2}\right) + (\tau(n)\ mod\ 2)$$

El segundo paréntesis valdrá cero en el caso par y uno en el impar.

Es el caso del número 3969:

N	Factores	TAU	NUMDIFCUAD
3969	[3,4][7,2]	15	8

Los factores son todos impares, los exponentes, 4 y 2, pares. TAU valdrá en este caso (1+4)(1+2)=15. Su mitad entera es 7, y añadimos 1 por su raíz cuadrada. Coincide entonces con el valor 8 que nos da NUMDIFCUAD.

Caso 2: N es par

En este caso aparece el factor 2, lo que obliga a que los dos factores que buscamos sean ambos pares y deban contener el 2 como factor. Esto no es posible si el factor 2 es único, con exponente 1, y esa es la causa de que 6, 10, 14 o 22 no presenten descomposiciones.

No admiten descomposiciones en diferencias de cuadrados los múltiplos de 2 que no lo sean de 4, es decir, los del tipo 4k+2

N es potencia de 2

Siguiendo un razonamiento similar al caso impar, deberemos encontrar la función TAU. Como tratamos con un solo exponente, sea p, el número de divisores será 1+p, pero al ser el caso par, el divisor 1 no nos interesa, y nos quedarían tan solo p divisores. Así, para p=5 dispondríamos de 2, 4, 8, 16 y 32. La potencia completa, en este caso 32, no nos valdría, porque tendría que formar par con el 1, que es impar, luego sólo nos quedan p-1 divisores disponibles. Esto vuelve a confirmar que el caso p=1 no produce pares de la misma paridad.

Los pares engendrados por el 2 serán pues, (p-1)/2 si p es impar y Int((p-1)/2)+1 si es par, por el par que se gana por su raíz cuadrada. Unificando:

$$ND(n) = Int\left(\frac{p-1}{2}\right) + ((p-1)\ mod\ 2)$$

N no es potencia de 2

Si el número es potencia de 2, sin factores impares, esta expresión vale, pero, en caso contrario, estas posibilidades del factor 2 se deberán multiplicar por las correspondientes al factor impar. La complicación surge del hecho de cada par puede producir productos idénticos, que se contarían dos veces, y hay que tener en cuenta los pares de factores repetidos en el caso de que p sea par. Por ello, la única forma de encajar todo es:

$$ND(n) = Int\left(\frac{p-1}{2}\right) * \tau(q) + \left((p-1)\ mod\ 2\right) * \left(Int\left(\frac{\tau(n)}{2}\right) + (\tau(n)\ mod\ 2)\right)$$

Multiplicamos el número de pares con factores desiguales de la potencia de 2 contenida en N por todos los factores de la parte impar de N, y después, en otro producto, los factores con repetición se multiplican sólo por los pares que se forman en la parte impar. Algo complicado, pero funciona.

Hemos plasmado los tres casos en una única función, a la que llamaremos NUMDIFCUAD2:

Public Function numdifcuad2(n)
Dim p, q, r, s, t, m

m = n: p = 0
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: p = p + 1: Wend ‘Extraemos la potencia de 2
If p = 1 Then numdifcuad2 = 0: Exit Function ‘Caso imposible

q = n / 2 ^ p ‘q es la parte impar
If q = 1 And p > 1 Then numdifcuad2 = Int((p - 1) / 2) + (p - 1) Mod 2
‘Es potencia de 2 pura
If p = 0 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): numdifcuad2 = Int(t / 2) + t Mod 2
‘Es un número impar
If p > 1 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): numdifcuad2 = t * Int((p - 1) / 2) + ((p - 1) Mod 2) * (Int(t / 2) + t Mod 2)
‘Tiene parte par y parte impar
End Function

La complejidad del cálculo nos ha aconsejado comprobar mediante tablas si las dos versiones de NUMDIFCUAD coinciden. Lo hemos probado desde 1 hasta 100000, sin que aparecieran discrepancias. Como ejemplo, adjuntamos los valores de algunos números de seis cifras entre los que hay impares, pares y una potencia de 2 pura:

N de seis cifras	NUMDIFCUAD	NUMDIFCUAD2
199291	4	4
896064	20	20
163449	12	12
511488	32	32
524288	9	9

Otra interpretación

Como todo cuadrado es suma de números impares consecutivos, como por ejemplo 16=1+3+5+7, al restar dos cuadrados se eliminarán sumandos impares, quedando tan sólo aquellos que no sean comunes. Es, por ejemplo, el caso de 44=12^2-10^2=21+23 o el de 72=9^2-3^2=7+9+11+13+15+17

Así que el número de descomposiciones que estamos estudiando coincide con el de formas de expresar el número como suma de impares.

SUMAS DE CUADRADOS CON DIFERENCIAS SIMÉTRICAS

Preparando unos cálculos sobre fechas en Twitter, me he encontrado con desarrollos dobles en suma de tres cuadrados, cuyas bases presentan diferencias simétricas en ambas sumas. El primer ejemplo fue el de 6/1/17, que escrita como 6117 se descompone así:

6117=(46-6)^2+46^2+(46+3)^2

6117=(44-3)^2+44^2+(44+6)^2

En las dos sumas las diferencias son las mismas, 3 y 6, pero situadas de forma simétrica.

Tres días más tarde, el 9/1/17, me encontré con que 9117 presentaba una propiedad similar:

9117=(56-6)^2+56^2+(56+3)^2

9117=(54-3)^2+54^2+(54+6)^2

Decidí entonces estudiar esta situación, que no parece darse a menudo. El que estos dos, 6117 y 9117 aparecieran tan seguidos pudo ser una casualidad. Después he visto que se encuentran más de los que creía.

Planteamiento del problema

En esta situación intervienen cuatro parámetros: las diferencias (en el ejemplo 3 y 6), a las que asignaremos las variables **a** y **b**, el número total (6117 o 9117 en nuestro ejemplo), al que llamaremos **N**, y el desplazamiento que existe entre los dos cuadrados centrales de la suma, que representaremos con la letra **m**. En ambos ejemplos el desplazamiento es de 2 (46-44 o 56-54). Con estos convenios, nuestro problema se puede plantear así:

$(x-a)^2+x^2+(x+b)^2 = (x+m-b)^2+(x+m)^2+(x+m+a)^2$

Se observa enseguida que aquí se pueden simplificar bastantes términos y, en efecto, la ecuación queda así:

$(4a-4b+6m)x = m(2b-2a-3m)$

Como, según hemos comprobado en los ejemplos, el valor de **x** no depende del de **m**, la única solución es que ambos paréntesis sean nulos, lo que nos lleva a que

$$m = \frac{2b-2a}{3}$$

Esta relación supone dos condiciones:

***b-a* ha de ser múltiplo de 3**, es decir, **b=a+3k** (en los ejemplos, 3 y 6 la cumplen)

***m* ha de ser par** (en los ejemplos m=2)

Si no lo ves claro con la variable x, aquí lo tienes con dos enteros p y q, p<q, a<b:

(p-a)^2+p^2+(p+b)^2 = (q-b)^2+q^2+(q+a)^2

3q^2-3p^2=-q(2a-2b)+p(2b-2a)

3(p+q)(q-p) = (p+q)(2b-2a)

3(q-p)=2(b-a)

Llegamos a la misma conclusión.

Para fijar mejor el problema suponemos que a<b y que las sumas no contienen sumandos nulos.

Relación de las sumas con N

Volvemos a una de las sumas equivalentes:

$(x-a)^2+x^2+(x+b)^2 = N$

Para valores dados de **a** y de **b**, será posible despejar x en la ecuación, y así relacionarla con N. Simultáneamente descubriremos qué condiciones ha de cumplir **N** para que **x** sea entero.

Simplificando y despejando x llegamos a

$$x = \frac{a - b \pm \sqrt{3N - 2a^2 - 2b^2 - 2ab}}{3}$$

a-b es múltiplo de 3, según vimos anteriormente, luego el radicando será equivalente a 9 veces un cuadrado. Pues ya tenemos la condición que ha de cumplir N:

$$\frac{3N - 2a^2 - 2b^2 - 2ab}{9} = p^2$$

Representamos por p^2 un cuadrado adecuado para que se verifique la igualdad. Si en cada caso particular sustituimos a y b por su valor, podremos saber si N puede presentar o no, una suma con diferencias simétricas.

Volvemos a nuestros ejemplos, en los que a=3, b=6 y m=2. Si sustituimos en la condición anterior nos resulta que

$$\frac{3N - 126}{9} = p^2$$

Esto también obliga a que N (en este caso) sea múltiplo de 3.

Hemos aplicado esta condición a los números comprendidos entre 5000 y 10000 y ahí han aparecido nuestros conocidos 6117 y 9117:

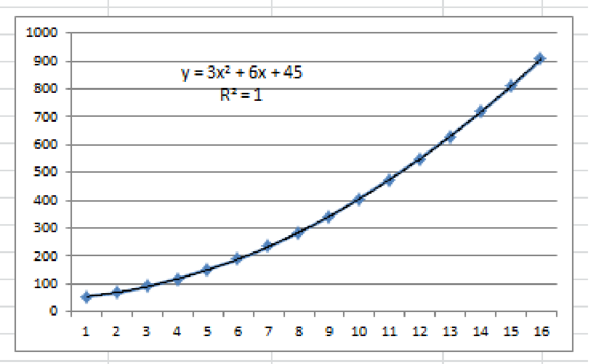
Para a=2 b=6	
N	x
5085	40
5334	41
5589	42
5850	43
6117	**44**
6390	45
6669	46
6954	47
7245	48
7542	49
7845	50
8154	51
8469	52
8790	53
9117	**54**
9450	55
9789	56

De forma simultánea, hemos despejado x, con lo que comprobamos que al 6117 le corresponde el 44, como ya sabíamos, y al 9117 el 54.

No es de extrañar que las soluciones de x hayan resultado consecutivas. En realidad, para cada valor de x podemos encontrar N mediante un polinomio de segundo grado. En el ejemplo sería:

$N=(x-3)^2+x^2+(x+6)^2 = 3x^2+6x+45$

Así que para cada par de valores a y b, los valores de N presentan una relación cuadrática con x. Si tomo valores de N más pequeños, para que x comience en 1, y construyo un gráfico, se percibe claramente la relación cuadrática:



Puedes ir comprobando, en otros valores de la tabla, si se cumple la condición encontrada y si x tiene el valor esperado.

Valores de N con esta propiedad

En principio, no todos los números naturales tienen por qué presentar esta equivalencia de sumas. Por ejemplo, 4258 no la posee. ¿Cómo podíamos encontrar los números que admiten esta descomposición para valores adecuados de a, b y m?

La búsqueda de números con la propiedad de simetría se puede basar en recorrer, para cada uno, los valores posibles de **a** y **b**, y en lugar de usar **m**, apoyarnos en los criterios estudiados en párrafos anteriores.

Si consideramos, por ejemplo, que b>a, es claro que **b** no puede sobrepasar la raíz cuadrada de **N**, y **a**, menor que **b**, de la mitad de esa raíz, ya que ambos se suman. Se podía estudiar una acotación más fuerte, pero esta no nos retrasa mucho. Para cada valor de **a** y **b** se estudia si se cumple la condición para **N**, y después un pequeño ajuste para que las bases de los cuadrados sean todas no negativas.

Hemos creado una función tal que a cada valor de **N** le hace corresponder la palabra “NO” si no presenta la simetría buscada, o una cadena con los valores de **a**, **b**, **x** y **m** en caso afirmativo.

Su código es el siguiente:

Public Function essumasim(n) As String
Dim a, b, r, m, p, q, d
Dim es As Boolean
Dim s$
es = False ‘variable que controla si se ha encontrado una solución
a = 1
r = Sqr(n)
s$ = ""
While a <= r / 2 And Not es ‘la variable a no sobrepasa la mitad de la raíz de N
b = a + 1
While b <= Sqr(r ^ 2 - a ^ 2) And Not es ‘acotación para b
q = (3 * n - 2 * a ^ 2 - 2 * b ^ 2 - 2 * a * b) / 9 ‘condición para que exista simetría
If escuad(q) Then
q = (a - b + Sqr(q * 9)) / 3 'valor de x
d = (b - a) * 2 / 3 'desplazamiento

If q + d - b >= 1 Then es = True: m = a: p = b 'evita un sumando negativo o cero

End If

b = b + 1

Wend

a = a + 1

Wend

If es Then essumasim = Str$(m) + ", " + Str$(p) + ", " + Str$(q) + ", " + Str$((p - m) * 2 / 3) Else essumasim = "NO" ‘salida de la función, o un NO o las variables deseadas

End Function

Si aplicamos esta función a los primeros números nos damos cuenta de que existen con simetría más de los esperados. Los primeros son los siguientes (hemos añadido los cuatro parámetros a su derecha).

	a	b	x	d
62	1	4	3	2
89	1	4	4	2
101	2	5	4	2
122	1	4	5	2
134	2	5	5	2
146	1	7	4	4
150	3	6	5	2
161	1	4	6	2
173	2	5	6	2
185	1	7	5	4
189	3	6	6	2
203	2	8	5	4
206	1	4	7	2
209	4	7	6	2
218	2	5	7	2
230	1	7	6	4

Los primeros valores con descomposición simétrica de este tipo son:

62, 89, 101, 122, 134, 146, 150, 161, 173, 185, 189, 203, 206, 209, 218, 230, 234, 248, 254, 257, 266, 269, 270, 278, 281, 285, 299, 305, 314, 317, 321, 326, 329, 338, 341, 342, 347, 356, 357, 362, 374, 377, 378, 386, 389, 398, 401, 404, 405, 414, 419, 422, 425, 426, 434, 437, 441, 446, 449, 458, 461, 467, 470, 474, 477, 485, 488, 489, 494, 497,…

Por ejemplo, el 62 presentará las diferencias 1 y 4, un valor central de 3 y un desplazamiento de 2. Lo comprobamos:

(3-1)^2+3^2+(3+4)^2 = 4+9+49 = 62

(5-4)^2+5^2+(5+1)^2 = 1+25+36 = 62

Obtenemos los dos desarrollos con diferencias simétricas, tal como esperábamos.

Los que no aparecen en la tabla, o bien no admiten descomposición en suma de tres cuadrados, como le ocurre al 40, bien las admiten sin simetría o si son simétricas las diferencias, una de ellas es nula. En el caso del 69 admite dos sumas, pero sus diferencias no son simétricas:

(2-1)^2+2^2+(2+6)^2 = 1+4+64 = 69

(4-2)^2+4^2+(4+3)^2 = 4+16+49 = 69

Otro número, el 114, presenta diferencias simétricas, pero una es nula. Por eso no se incluye en la lista:

114=(7-3)^2+7^2+(7+0)^2

114=(5-0)^2+5^2+(5+3)^2

Versión en PARI

Esta sucesión estaba inédita, y la hemos publicado en OEIS mediante este código en PARI:

```
is_sym_sum(n)=local(x,e=0,a,b,p);x=1;while(x^2<n\3
&&e==0,a=1;while(x^2+(x+a)^2<n&&e==0,z=n-x^2-
(x+a)^2; if(issquare(z),z=sqrtint(z);b=z-x-
a;if(b>a,p=1;while(p^2<=n/3&&e==0,if(p^2+(p+b)^2+(
p+a+b)^2==n,e=1);p+=1)));a+=1);x+=1);e

for(i=1,1000,if(is_sym_sum(i),print1(i,", ")))
```

Sigue a misma metodología organizada de otra forma.

La puedes consultar en la dirección

http://oeis.org/A282241

Nos alegra haber podido profundizar en este tema, pues no hemos encontrado un estudio similar.

DESCOMPOSICIONES DEL TIPO X^2+KY^2

Últimamente nos han surgido cuestiones sobre descomposiciones en suma de cuadrados. Recordamos dos:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2016/09/expresion-cuadratica-x2ky2-n.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2017/01/numero-de-descomposiciones-en.html

Siguiendo esta línea, hoy recorreremos aquellos números que se pueden descomponer en una suma del tipo x^2+ky^2, con k>1, x>0, y>0 **de varias formas distintas**. Expresado así, es un problema bastante general, que se presta a muchos casos y subcasos, por lo que sólo se desarrollarán algunos, con el fin de aprender a tratarlos y sacar alguna posible propiedad.

Hay un hecho que vale para todos ellos, y es que si N admite una descomposición de un tipo dado x^2+ky^2, con k>1, si lo multiplicamos por un cuadrado admitirá el mismo número de descomposiciones al menos, luego muchas soluciones que encontremos engendrarán otras al multiplicarlas por un cuadrado.

Caso k=2

Si deseamos encontrar todas las expresiones de un número de la forma x^2+2y^2, nuestra mejor herramienta es la que hemos presentado hace pocas semanas bajo el nombre de Cartesius, hoja de cálculo especializada en productos cartesianos condicionados. Puedes descargarla en versión para Excel y LibreOffice Calc, así como las instrucciones en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

En este caso bastará concretar: 2 sumandos, uno de ellos un cuadrado, el otro doble de un cuadrado, y que la suma de ambos sea igual al número propuesto. Por ejemplo, para saber cuántas descomposiciones de este tipo permite el número 969, daríamos a *Cartesius* estas instrucciones:

xtotal=2
xt=1..33
x1=suc(n^2)
x2=suc(2*n^2)
suma=969

La primera exige que sean dos sumandos. La segunda fija un rango de búsqueda de 1 al 33, para que no se nos escape ningún cuadrado inferior a 969, y las siguientes determinan un sumando n^2 y otro 2*n^2. Así se recorrerán todas las posibilidades, que resultan ser cuatro. Si copias esas instrucciones en Cartesius (zona de condiciones) y pulsas el botón **Iniciar** obtendrás estos cuatro sumandos:

X1	X2
1	968
169	800
841	128
961	8

Traducidos a nuestra cuestión, equivalen a las igualdades

969=1^2+2*22^2=13^2+2*20^2=29^2+2*8^2=31^2+2*2^2

No seguiremos por ahí. Nos interesa buscar números con este tipo de propiedad, y podemos dejar Cartesius solo para comprobar. Nos pasamos al VisualBasic de las hojas de cálculo.

Es fácil diseñar una función que recorra todas las posibilidades de suma del tipo x^2+ky^2 para un número dado. El que tenga forma de función nos permite construir tablas para distintos valores, cosa imposible con Cartesius. Proponemos esta:

Public Function numsumacuad(n, k) ‘Tiene dos parámetros, el número n y k
Dim x, p

p = 0 ‘Iniciamos el contador a cero
For x = 1 To Sqr(n - k) ‘Al estar x elevada al cuadrado, será inferior a una raíz cuadrada
If escuad((n - x ^ 2) / k) Then p = p + 1 ‘Si la diferencia dividida entre k es cuadrado, vale
Next x

numsumacuad = p ‘Contamos las veces
End Function

Esta función no se puede aplicar a 1, pero ya sabemos que no es suma de cuadrados no nulos.

Así podemos formar tablas como esta:

Número	Soluciones de N=x^2+ky^2
20	0
21	0
22	1
23	0
24	1
25	0
26	0
27	2
28	0
29	0
30	0

Vemos que entre 20 y 30 solo tienen solución 22, 24 y 27, y esta, doble. Todos los números que admiten al menos una de estas descomposiciones, se podrán representar como suma de tres cuadrados simétricos. Es sólo una curiosidad, pero atractiva. Así, 24=2^2+4^2+2^2

Este número de soluciones, asignando un 0 al 1, está publicada en http://oeis.org/A216278 Destacamos en negrita el intervalo entre 20 y 30.

0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, **0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0**, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2…

Con la función ***numsumacuad*** podemos seleccionar aquellos números que admiten dos representaciones (al menos) distintas del tipo x^2+2y^2. Los primeros son estos:

27, 33, 51, 54, 57, 66, 81, 99, 102, 108, 114, 123, 129, 132, 153, 162, 171, 177, 187, 198, 201, 204, 209, 216, 219, 228, 243, 246, 249, 258, 264, 267, 291, 297, 306, 321, 323, 324, 339, 342, 354, 363, 369, 374, 387, 393, 396, 402, 408, 411, 417, 418, 432, 438, 451, 456, 459, 473, 486, 489, 492, 498,…

Todos los números de la sucesión son compuestos, pues Fermat, Euler y Gauss demostraron que los números primos sólo podían descomponerse como x^2+2y^2 de forma única, y no todos, porque deberían ser congruentes con 1 o 3 respecto al módulo 8.

Primo	Resto mod 8
3	3
11	3
17	1
19	3
41	1
43	3
59	3
67	3
73	1
83	3
89	1
97	1

En esta tabla figuran los primeros números primos que se pueden descomponer de la forma dada, y vemos que sus restos son 1 o 3 módulo 8. Un buen ejercicio es adivinar la descomposición en cuadrados mentalmente: 73=1^2+2*6^2, 89=9^2+2*2^2,…

En este tipo de búsquedas siempre recomendamos el lenguaje PARI como complemento o ampliación. En esta cuestión el código adecuado sería, por ejemplo:

for(n=3,500,p=0;for(x=1,sqrtint(n-2),if(issquare((n - x ^ 2) / 2),p+=1));if(p>1,print1(n,", ")))

Si cambiamos la condición p>1 por p==2 obtendremos los números que admiten exactamente dos descomposiciones del tipo que estamos estudiando:

27, 33, 51, 54, 57, 66, 81, 102, 108, 114, 123, 129, 132, 162, 177, 187, 201, 204, 209, 216, 219, 228, 246, 249, 258, 264, 267, 291, 321, 323, 324, 339, 354, 374, 393, 402, 408, 411, 417, 418, 432, 438, 451, 456, 473, 489, 492, 498,…

Vemos que faltan algunos, como el 99, que admiten más de una descomposición.

En todos estos números se dará la siguiente igualdad

$N= a^2+2b^2=c^2+2d^2$ que equivale a $(a+c)(a-c)=2(d+b)(d-b)$

De esa identidad se deduce que a y c han de tener la misma paridad, para que coincida con el múltiplo de 2 del segundo miembro, pero entonces (a+c)(a-c) será múltiplo de 4, lo que obliga a que también d y b tengan la misma paridad. Lo puedes comprobar con los ejemplos.

Algunos de estos elementos son cuadrados

81, 324, 729, 1089, 1296, 2025, 2601, 2916, 3249, 3969, 4356, 5184, 6561, 8100, 9801,…

En ellos se cumple que n^2=x^2+2y^2, o bien (n^2-x^2)/2=y^2, es decir, que (n+x)(n-x)/2=y^2. Podemos interpretar que estos números generan triángulos de catetos enteros cuya área coincide con la de un cuadrado. Por ejemplo, tomamos 1089=33^2. Según nuestra hoja Cartesius admite cuatro descomposiciones del tipo deseado:

X4	X5
11	22
17	20
21	18
31	8

Si tomo la segunda, tendré: n=33, x=17, y=20, y se cumple 33^2=17^2+2*20^2, y aplicando los cálculos anteriores, se puede formar el triángulo de lados (33+17, 33-17), es decir 50 y 16, con área 50*16/2=400=20^2, que efectivamente, es un cuadrado.

Con el primero: (33+11,33-11) se convierte en los lados 44 y 22 de área 44*22/2=484=22^2.

Tipo x^2+3y^2

Este caso ofrece menor interés. Estos son los primeros números que admiten más de una descomposición de ese tipo:

Con más de un caso de sumas de cuadrados

28, 52, 76, 84, 91, 112, 124, 133, 148, 156, 172, 196, 208, 217, 228, 244, 247, 252, 259, 268, 273, 292, 301, 304, 316, 336, 343, 364, 372, 388, 399, 403, 412, 427, 436, 444, 448, 468, 469, …

Los puedes generar con este código PARI o con Cartesius o nuestra función en Visual Basic para Excel.

for(n=4,1000,p=0;for(x=1,sqrtint(n-3),if(issquare((n - x ^ 2) / 3),p+=1));if(p>1,write1("final.txt",n,", ")))

Por ejemplo, 469 se descompone como

469=13^2+3*10^2=19^2+3*6^2

Podemos seguir con otros números de casos. Por ejemplo, con tres o más descomposiciones están:

28, 52, 76, 84, 112, 124, 148, 156, 172, 196, 208, 228, 244, 252, 268, 292, 304, 316, 336, 364, 372, 388, 412, 436, 444, 448, 468, 496,…

Vemos que falta el 469, pero no el 468, que admite tres descomposiciones:

468=6^2+3*12^2=15^2+3*9^2=21^2+3*3^2

Puedes intentar descubrir casos llamativos. Un ejemplo: 2548 es el primero con nueve descomposiciones distintas. Insertamos el desarrollo con Cartesius. Las columnas X4 y X5 son los valores de x e y respectivamente:

X1	X2	X3	X4	X5
25	2523		5	29
196	2352		14	28
361	2187		19	27
961	1587		31	23
1225	1323		35	21
1681	867		41	17
2116	432		46	12
2401	147		49	7
2500	48		50	4

Tipo x^2+4y^2

Su interés radica en que produce sumas simétricas de cinco cuadrados. No lo estudiaremos. Tan sólo un ejemplo:

464=10^2+10^2+8^2+10^2+10^2

Tipo 2x^2+3^y2

También este caso presenta el interés de obtener una suma de cinco cuadrados que sea simétrica y con bases alternantes. También damos un ejemplo:

365 =3^2+13^2+3^2+13^2+3^2

La reiteración mata el interés. Es mejor parar aquí y dejar abiertos otros caminos de investigación.

TROCEAR Y DESPLAZAR

En este apartado estudiaremos algunos números enteros que mantienen una propiedad (ser primos, cuadrados, triangulares,…) si rotamos algunas de sus cifras, es decir, que algunas situadas a la derecha las desplazamos a los primeros lugares de la izquierda, o la operación inversa, rotar de izquierda a derecha. Por brevedad, sólo consideraremos el desplazamiento de derecha a izquierda.

Por ejemplo, 622521 es cuadrado perfecto, porque 622521=789^2. Si ahora rotamos las cifras de la derecha 21 y las situamos al principio, resulta otro cuadrado: 216225=465^2. Recorreremos algunos casos concretos, diferenciándolos por la propiedad que conservan y por el número de cifras rotadas

Cuadrados con rotación de una cifra

El cuadrado de 13516 es 182682256. Si desplazamos el 6 al primer lugar queda otro cuadrado: 618268225=24865^2. Todos los números que poseen una propiedad similar están recogidos en http://oeis.org/A045877 y los primeros son: 1, 2, 3, 16, 21, 31, 129, 221, 247, 258, 1062, 1593, 1964, 2221, 13516, 17287, 18516,… En esta lista figuran las bases de los cuadrados que presentan esa propiedad, no los cuadrados.

Este ejemplo ya publicado nos servirá de guía para presentar la función ***rotate(m,n)***, que rota **n** cifras de la derecha en el número m. La idea de la función es calcular en primer lugar el módulo de m respecto a 10^n, porque ese será el número formado por las cifras que rotan. Una vez obtenido, lo multiplicamos por 10^(número de cifras –n), lo que sitúa esas cifras en la parte izquierda. Para rellenar la parte derecha, tomaremos las otras cifras, que son el cociente entero del número entre 10^n. Esas no las multiplicamos porque quedan a la derecha. La expresión completa sería a = (m Mod 10 ^ n) * 10 ^ (k - n) + m \ 10 ^ n.

Adjuntamos la función completa en Basic VBA:

```
Public Function rotate(m, n)
Dim a, k

If m < 10 ^ n Then rotate = m: Exit Function
k = Int(Log(m) / Log(10) + 1)
a = (m Mod 10 ^ n) * 10 ^ (k - n) + m \ 10 ^ n
rotate = a
End Function
```

Hemos usado módulo y división entera. Otra técnica sería convertir el número en una cadena, trocearla, rotarla después y volverla a convertir en número. Esa técnica no nos viene bien en hoja de cálculo, porque introduce unos molestos espacios en blanco. Sí es adecuada en PARI. El listado siguiente lo podrás entender con facilidad:

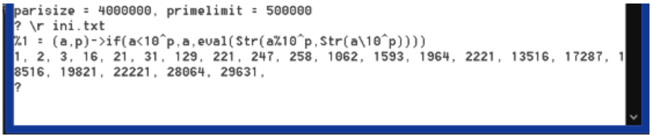
rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p, Str(a\10^p))))

La función ***Str*** convierte en cadena tanto el módulo ***a%10^p*** como el cociente entero ***a\10^p***. El paréntesis que los une sirve para concatenar las cadenas en orden inverso, y ***eval*** las convierte de nuevo en número.

Con el siguiente código podemos reproducir la sucesión presentada arriba, de números cuyos cuadrados siguen siéndolo si rotamos una cifra:

rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p, Str(a\10^p))))
for(i=1,10^5,s=i*i;r=rotate(s,1);if(issquare(i)&&issquare(r),print1(i,", ")))

Aquí tienes el resultado, que coincide con el de arriba.



Cuadrados con rotación de dos cifras

Si la función ***rotate*** la usamos con dos cifras podemos descubrir qué cuadrados siguen siéndolo si trasladamos sus dos últimas cifras de derecha a izquierda. Para simplificar el problema eliminaremos de la lista los que terminen en dos ceros, que introducirían demasiados elementos en el listado. Basta concretar el parámetro de cifras en dos y exigir que el módulo de cada candidato respecto a 100 no sea cero.

Con hoja de cálculo descubrimos sólo tres casos de tres cifras con esas condiciones: 144, 196 y 625, que se convierten en los cuadrados 441, 961 y 256 respectivamente. Con cuatro cifras no aparecen, y con cinco 21609, 38416, 60025 y 86436.

Para mayor número de cifras usaremos PARI. El código es similar al que usamos más arriba, con dos ligeros retoques:

```
rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p,
Str(a\10^p))))
for(i=10,10^5,if(i%10>>0,n=i*i;r=rotate(n,2);if(issquar
e(r),print1(n,", "))))
```

Con él aparecen todos los casos hasta 10^10:

144, 196, 625, 21609, 38416, 60025, 86436, 120409, 161604, 236196, 272484, 363609, 436921, 481636, 622521, 638401, 646416, 870489, 904401, 1560001, 6240004, 14010049, 20602521, 29822521, 77422401, 82410084, 1632321604, 3672723609, 6023622544, 6529286416, 9089524921,…

Es atractivo 60025=245^2, que se convierte en 25600=160^2

Puedes adaptar el código para encontrar cuadrados que con la rotación de tres cifras sigan siendo cuadrados. Los primeros son estos:

16384, 25600, 36864, 61009, 2896804, 7049025,…

Y aquí tienes los primeros que rotan cuatro cifras. Los incluimos como un reto para reproducirlos:

166464, 210681, 214369, 216225, 364816, 690561, 842724, 898704, 962361, 1560001, 2010724, 6240004, 8042896, 14010049, 20412324, 23242041, 32410249, 56040196, 81649296, 82410084, 92968164,…

Triangulares con rotación de cifras

Se puede repetir el estudio con los triangulares. Con rotación de una cifra ya están publicados en http://oeis.org/A068071:

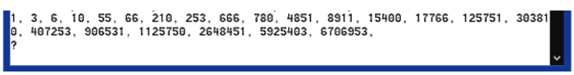
1, 3, 6, 10, 55, 66, 210, 253, 666, 780, 4851, 8911, 15400, 17766, 125751, 303810, 407253, 906531, 1125750, 2648451, 5925403, 6706953, 15772536, 22207780, 50085036, 78406503, 438094800, 1623331710, 1764803755,…

Por ejemplo, 407253 es el triangular número 902, porque 407253=902*903/2, y al desplazar la cifra 3 queda 340725, triangular número 825.

Para que podamos reproducirlos necesitamos recordar que un número N es triangular si 8*N+1 es un cuadrado. Todo lo que hemos presentado en PARI hasta ahora nos vale, sustituyendo issquare(i) por issquare(8*i+1)

Así, la sucesión anterior la podemos reproducir así (en sus primeros términos):

rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p, Str(a\10^p))))
for(i=1,10^4,n=i*(i+1)/2;r=rotate(n,1);if(issquare(8*r+1),print1(n,", ")))



```
1, 3, 6, 10, 55, 66, 210, 253, 666, 780, 4851, 8911, 15400, 17766, 125751, 30381
0, 407253, 906531, 1125750, 2648451, 5925403, 6706953,
?
```

Con rotación de dos cifras, a partir de 100 resultan:

300, 325, 666, 5050, 5151, 5565, 6105, 6555, 13530, 14196, 36046, 78606, 187578, 395605, 508536, 837865, 975106, 1400301, 7340196, 9135675, 14426506, 24580566, 36265386, 38434528, 209582101, 338715378, 495070311, 2936270028, 4201373611, 5664257830, 5735794065, 8997105153, 9652787040, …

Con el código en PARI

```
rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p, Str(a\10^p))))
for(i=24,10^5,n=i*(i+1)/2;r=rotate(n,2);if(issquare(8*r+1),print1(n,", ")))
```

Prueba a reproducir esta sucesión, y comprueba algún caso, como el de 187578, que es el triangular número 612, mientras 781875 es el número 1250.

Y con tres a partir de 1000:

1035, 1485, 1891, 30135, 46360, 60031, 75078, 96141

Rotación de primos

Con una cifra están publicados en A234901:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 173, 197, 199, 271, 277, 311, 313, 337, 373, 379, 397, 419, 479, 491, 571, 577, 593, 617, 631, 673, 719, 733, 811, 839, 877, 911, 919, 971, 977…

Para no cansar, reproducimos los primos que rotan dos cifras:

Con dos: 101, 103, 107, 113, 127, 131, 149, 157, 163, 181, 191, 197, 199, 307, 311, 317, 331, 337, 359, 367, 373, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 757, 761, 787, 797, 907, 919, 937, 941, 947, 971, 983, 991

Podemos usar la siguiente rutina en PARI para ir descubriendo rotaciones de primos con más cifras. Basta ir cambiando el valor del segundo parámetro de rotate. La siguiente sirve para obtener las rotaciones de dos cifras:

```
rotate(a,p)=if(a<10^p, a, eval(Str(a%10^p, Str(a\10^p))))
forprime(i=101,10^5,r=rotate(i,2);if(isprime(r),print1(i,", ")))
```

Comprueba estos listados:

Primos con rotación de tres cifras:

1103, 1109, 1123, 1163, 1181, 1193, 1301, 1303, 1319, 1321, 1327, 1361, 1777, 1783, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1979, 1987, 1993, 1997, 2113, 2131, 2161, 2311, 2333, 2339, 2347, 2377, 2381, 2389, 2393, 2399, 2707, 2713, 2729, 2741, 2777, …

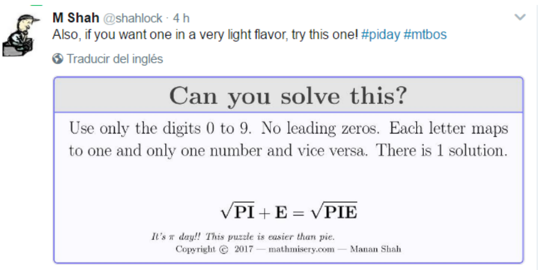
Primos con rotación de cuatro cifras:

10007, 10069, 10091, 10099, 10103, 10151, 10181, 10193, 10211, 10253, 10259, 10267, 10271, 10273, 10301, 10333, 10337, 10357, 10369, 10391, 10427, 10459, 10487, 10501, 10559, 10601, 10613, 10627, 10631, 10657, 10687, 10691, 10733,…

Y así podemos seguir.

CURIOSIDADES CON CIFRAS A TROZOS

Hace unas semanas se publicó en Twitter la siguiente curiosidad:



Al resolverla he tenido la idea de buscar situaciones semejantes que se puedan resolver con hoja de cálculo, que es lo nuestro, o con PARI, que permite más velocidad en las búsquedas. Para ello necesitaré la función TROZOCIFRAS, que extrae un grupo de cifras de la expresión decimal de un número. Deberá tener tres parámetros. Así, TROZOCIFRAS(m;n;p) extraerá en las cifras del número **m** aquellas que comienzan en el número de orden **n** y terminen en **p**. Por ejemplo, TROZOCIFRAS(28732;2;4)=873. Hay que advertir que se cuentan las cifras de derecha a izquierda. Así,

TROZOCIFRAS(876253;1;5)=76253.

Esta función necesita para su funcionamiento otra, NUMCIFRAS(m), función que nos cuenta las cifras de un número natural. Dejamos los listados de TROZOCIFRAS y NUMCIFRAS para el Anexo. Hemos suprimido, por brevedad, la condición de que m sea natural. Puedes copiarlos en la sección de funciones y macros de tu hoja de cálculo.

Con estas dos funciones, la condición del acertijo se expresaría como

If Sqr(trozocifras(m;2;3))+trozocifras(m;1;1)=sqr(m) then print(m)

Lo aplicamos a números de tres cifras, para no tener que añadir más condiciones, y al recorrer desde 100 hasta 999 aparece la solución, **169**, que cumple que RAIZ(169)=RAIZ(16)+9=13

Podemos escribir:

For m=100 to 999
If Sqr(trozocifras(m;2;3))+trozocifras(m;1;1)=sqr(m) then print(m)
Next m

Prueba algo similar con cuatro cifras. Si las descompones en grupos de dos, no existe ninguna propiedad similar, es decir:

$$\sqrt{ABCD} = \sqrt{AB} + CD$$

Tampoco parece existir solución para

$$\sqrt{ABCD} = \sqrt{ABC} + D$$

Hay más posibilidades y con mayor número de cifras. Lo dejamos abierto.

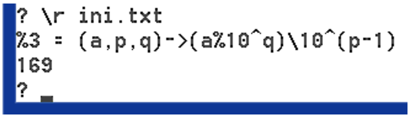
En el lenguaje PARI la función TROZOCIFRAS queda como

cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)

y la búsqueda

cutdigit(a, p, q)=(a%10^q)\10^(p-1)
for(n=100, 999, if(sqrt(cutdigit(n, 2, 3))+cutdigit(n, 1, 1)==sqrt(n), print(n)))

Comprobamos que encuentra el 169



Otra adivinanza: *¿Existe algún número de tres cifras ABC que cumpla que ABC=AB*C+A*BC?* Si no deseas ver la solución, no sigas leyendo e intenta tú una búsqueda.

Bastará complicar un poco las condiciones anteriores, por ejemplo, así:

For m=100 to 999
If trozocifras(m;2;3)*trozocifras(m;1;1)+trozocifras(m;3;3)*trozocifras(m;1;2)=m then print(m)
Next m

Hemos encontrado así la solución única, que resulta ser 655, ya que 65*5+6*55=325+330=655. Puedes intentarlo con PARI.

Juego de las matrículas

En este invierno, Joseángel Murcia, @tocamates propuso en Twitter un juego de encontrar en nuestros paseos matrículas españolas (cuatro dígitos) en los que los dos últimos formaran el producto de los dos primeros. La cuestión era más lúdica que matemática, pero con nuestra función TROZOCIFRAS se puede conseguir un listado. Basta plantear la condición

For m=1000 to 9999

If trozocifras(m;1;2)=trozocifras(m;4;4)*trozocifras(m;3;3) then print(m)

Next m

Estos son, por ejemplo, los que comienzan en 3 y cumplen la condición:

3000
3103
3206
3309
3412
3515
3618
3721
3824
3927
4000

Evidentemente, esto no tiene más valor que el de un ejemplo trivial.

Menos trivial es preguntar si una matrícula ABCD cumple que (AB)^2+(CD)^2=ABCD. La respuesta es que existen dos soluciones, 1233=12^2+33^2 y 8833=88^2+33^2. Lo puedes comprobar con la condición

If trozocifras(m; 3; 4) ^ 2 + trozocifras(m; 1; 2) ^ 2 = m Then print m

Un trozo múltiplo de otro

A veces las búsquedas de este tipo se deben acotar un poco para evitar resultados triviales. Proponemos otro ejemplo:

¿En cuántos números de tres cifras ABC se cumple que AB es múltiplo de BC?

En esta propuesta, si nos limitamos a lo que se pide, nos resultan demasiados casos, con lo que pierden interés:

305
306
333
401
402
404
405

Se observa que resultan casos triviales en los que B=0, lo que facilita que se cumpla la condición, o aquellos, como el 333, en el que AB=BC, con lo que es múltiplo trivialmente. Buscaremos de nuevo, pero exigiendo que BC sea mayor que 9, para evitar el cero central, y que AB<>BC. De esta forma obtenemos un resultado más restringido.

421, 517, 526, 724, 842, 913, 923, 931, 947

Es curioso que todos presentan cifras distintas.

Anexo

```
Public Function numcifras(n)
'Calcula el número de cifras enteras de un número natural. Si no lo es, devuelve un cero
Dim nn, a
a = 1: nn = 0
While a <= n
a = a * 10: nn = nn + 1
Wend
numcifras = nn
Else
numcifras = 0
End Function
```

```
Public Function trozocifras(m, n, p)
‘Extrae cifras de m desde el orden n (por la derecha) hasta el orden p. Si no es lógico devuelve -1
Dim a, b, c, d
```

```
c = numcifras(m)
If n > c Or p > c Then
  trozocifras = -1
  Else
  a = 10 ^ p
  d = 10 ^ (n - 1)
  b = m - Int(m / a) * a
  b = Int(b / d)
  trozocifras = b
  End If
Else
trozocifras = -1
End Function
```

SUMAS ANAGRAMÁTICAS

En mi cuenta de Twitter, @connumeros, publiqué el 6/4/17 la siguiente identidad, que mi hijo Juan Luis, @juanlroldan, calificó de *anagramática*:

6417=4671+1746

En ella los dos sumandos poseen los mismos dígitos que el resultado. Esto está ya estudiado y publicado en http://oeis.org/A203024:

Numbers a = b + c where a, b, and c contain the same decimal digits.

0, 954, 2961, 4932, 5013, 5022, 5031, 5238, 5823, 6147, 6417, 7614, 7641, 8235, 8523, 9045, 9108, 9180, 9324, 9504, 9540, 9594, 9612, 9684, 9774, 9864, 9954, 20961, 21150, 21501, 24831, 24921, 25011, 26901, 27810, 28107, 28314, 29016, 29214, 29610, 29691, 29961

Lo que nos interesa aquí es la forma de conseguirlo con hoja de cálculo. No esperéis, por tanto, teoría matemática. Quienes no disfrutéis con la programación podéis dejar de leer esta cuestión.

¿Qué necesitamos para reproducir y ampliar esta lista?

Si nos inspiramos en el código PARI de Charles R Greathouse IV incluido en la página citada, la estrategia podría ser la siguiente:

1) Para cada número dado, intentamos construir el más pequeño posible con sus mismos dígitos. Por ejemplo, para 36621 deberíamos poder construir 12366 de forma automática. Llamaremos **digiordenado** a la función que consiga esto. Así **digiordenado(36621)=12366**

Con ello logramos dos cosas: conseguir el sumando menor posible y tener un elemento de comparación anagramático. Si dos números coinciden en sus valores mediante **digiordenado**, es que son anagrama uno de otro.

2) Una vez obtenido el conjunto ordenado de dígitos, bastará comenzar a probar el primer sumando y comprobar si los tres, total y dos sumandos, son anagramáticos.

Función DIGIORDENADO

Para construir la función citada sobre un número N deberemos

* Extraer los dígitos de la cadena N
* Ordenarlos
* Reconstruir de nuevo un número D, que será el valor de digiordenado(N).

Extracción de cifras

Existen varios métodos para extraer cifras de un número N expresado en el sistema de numeración decimal (o en otro cualquiera cambiando 10 por la base). Elegimos el de truncar los cocientes de N entre 10^r y 10^{r+1}, este último multiplicado por 10. Por ejemplo, para extraer el 5 del número 34521 deberíamos calcular:

Int(34521/100)-10*Int(34521/1000) = 345 – 10*34 = 345-340 = 5

También podíamos haber convertido N en una cadena y después extraer los caracteres de esa cadena. Así se efectúa en PARI, pero nos ha parecido mejor no acudir a cadenas.
En el listado de más abajo puedes estudiar su aplicación a nuestro problema.

Ordenación

Vamos a trabajar con pocos dígitos, por lo que el método de ordenación elegido no es relevante. Nos hemos decidido por el de “burbuja”, que es bastante comprensible. Puedes consultar

https://es.wikipedia.org/wiki/Ordenamiento_de_burbuja

Reconstrucción

Para reconstruir el número de nuevo multiplicamos y sumamos, en lugar de las operaciones de dividir y restar de la extracción. Por ejemplo, para reconstruir las cifras 2, 3, 7 calcularíamos:

0*10+2=2

2*10+3=23
23*10+7=237

Aunque es un proceso sencillo, no es trivial, por lo que merece la pena que lo estudies.

Estas tres técnicas las tienes integradas en la función *digiordenado*:

Public Function digiordenado(n)
'Aplicable solo a números naturales de al menos dos cifras
Dim l, i, j
Dim c
Dim ci(10)

‘Calcula el número de cifras
l = Int(Log(n) / Log(10) + 1)
'Extrae las cifras y las deposita en la matriz ci(i)
For i = 1 To l
c = 10 ^ (i - 1)
ci(i) = Int(n / c) - 10 * Int(n / c / 10)
Next i
'Ordena las cifras por el método de la burbuja
For i = 1 To l
For j = 1 To l - 1
If ci(j) > ci(j + 1) Then c = ci(j): ci(j) = ci(j + 1): ci(j + 1) = c

```
Next j
Next i
'Acumula de nuevo las cifras para obtener digiordenado
c = 0
For i = 1 To l
c = c * 10 + ci(i)
Next i
digiordenado = c
End Function
```

Suma anagramática

Ya sabemos construir un número con los dígitos ordenados de otro. Podemos retroceder a nuestra cuestión primera, que son las sumas del tipo

6417=4671+1746

Para cada número, obtenemos su “digiordenado”, que en este caso sería 1467, primer valor a probar como primer sumando, hasta llegar a 6417/2. Para cada sumando S comprobamos si coincide en dígitos con el número total N, mediante la igualdad digiordenado(S)=digiordenado(N). En caso afirmativo repetimos la comprobación con N-S. Si los tres coinciden en sus dígitos, hemos encontrado una suma anagramática.

A continuación lo presentamos en forma de función. Le daremos como tipo de variable el de texto, para que así el resultado sea “NO” en el caso de no admitir la descomposición y la concatenación de los sumandos si existe una descomposición de ese tipo. En el ejemplo resultaría “ 4671 1746”

Function anagram$(n) ‘Función tipo texto
Dim a, b, c
Dim anag$

anag = "NO" ‘En principio no se espera un resultado positivo
a = digiordenado(n) ‘se busca el menor número con los dígitos dados
b = a
While b <= n / 2 And anag = "NO" ‘b recorre desde a hasta n/2
c = n – b
‘Prueba de identidad de dígitos
If digiordenado(b) = a And digiordenado(c) = a Then
anag = Str$(b) + Str$(c)
‘En caso positivo se concatenan los sumandos
b = b + 1
Wend
anagram = anag
End Function

Podemos aplicar este test a varios números:

N	anagram(N)
952	NO
954	459 495
4932	2439 2493
4934	NO
6417	1746 4671
6418	NO
20961	10269 10692
20962	NO

Comprobamos que los que figuran en la lista de los primeros párrafos dan como resultado los dos sumandos y los que no están devuelven un "NO".

Búsqueda de sumas anagramáticas

Con las funciones presentadas podemos, mediante un bucle FOR-NEXT, encontrar todas las incluidas en un intervalo de números dado. Como ya están publicados en http://oeis.org/A203024 los primeros casos hasta 29961=12969+16992, podíamos intentar encontrar los siguientes, que resultan ser 30168=13860+16308 y 30186=13806+16380, y así podíamos seguir. El proceso es muy lento, y habrá que dejar al ordenador trabajando solo.

Búsqueda de sumandos anagramáticos

Podíamos rebajar las exigencias, y en lugar de buscar la identidad de dígitos entre suma y sumandos, prescindir del total y buscar sólo la igualdad entre sumandos. En este caso resultarían muchos más números. Deberemos exigir, para eliminar soluciones triviales, que los sumandos sean distintos. También hay que tener en cuenta los que comienzan por un cero, que no suele aparecer en el resultado, a los que también eliminaremos. Con estas condiciones, los primeros números de este tipo son: 303=102+201, 310=119+191, 321=129+192, 330=120+ 210,...

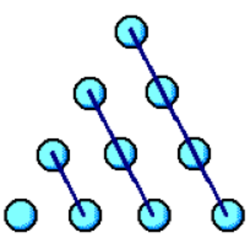
Es lógico pensar en otra posibilidad, y es que los dígitos del total coincidan con un sumando al menos. Si prescindimos de ceros iniciales, los primeros casos resultantes son: 31=13+18, 41= 14+27, 51=15+36,…No parecen tener interés.

NÚMEROS PIRAMIDALES

POLIGONALES Y PIRAMIDALES

Repaso de los números poligonales

Los números piramidales son una extensión natural de los poligonales, por lo que puede ser adecuado comenzar con un repaso de estos. Lo más importante que hay que recordar ahora es su formación recurrente. Por ejemplo, los triangulares se forman añadiendo un lado nuevo a los ya formados en el anterior triangular, como queda claro en la imagen:



Es decir, que

t_1 = 1 = 1
t_2 = 1+2 = 3
t_3 = 1+2+3 = 6
t_4 = 1+2+3+4 = 10

En general, **$T_{n+1}=T_n+n$**, lo que convierte a los triangulares en sumas de números consecutivos. Por eso $T_n=1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$.

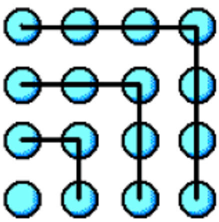
Hemos preparado una hoja de cálculo con *Calcupol*, una calculadora especializada en números figurados, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

En ella, con la tecla POL puedes encontrar el k-ésimo número triangular. Por ejemplo, con la secuencia de teclas **3 POL 12 =** encontrarás el triangular número 12, que resulta ser 78, como se ve en la imagen:

El presentar la calculadora en este momento se justifica porque la vamos a usar en toda una serie de cuestiones. Otra utilidad que tiene es la de identificar si un número es de un tipo dado o no. Observa la celda *Tipos*. Si fijas el tipo en *Triangular* (usa la lista desplegable) podrás averiguar si el número que escribas en pantalla es o no triangular, con la tecla **ES**, o bien encontrar el próximo o el anterior con **PROX** y **ANT**. Ya las iremos viendo. Fija el tipo en triangular, escribe 75 y pulsa la tecla ES. Te responderá que no es de ese tipo y en pantalla aparecerá un cero. Si hubieras escrito 78, te devolvería 12, que es su número de orden, o lado.

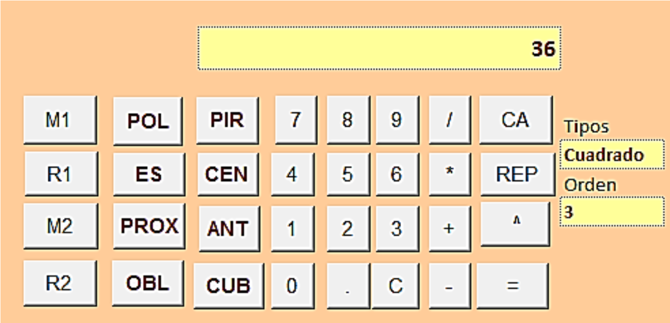
De igual forma se definen los números cuadrados, pero ahora, a cada elemento le añadimos dos lados, formando lo que se llama un gnomon, de fórmula 2n+1:



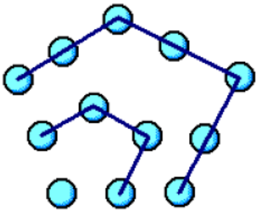
En la figura se observa la generación de cada número cuadrado:

C_1 = 1 = 1
C_2 = 1+3 = 4
C_3 = 1+3+5 = 9
C_4 = 1+3+5+7 = 16

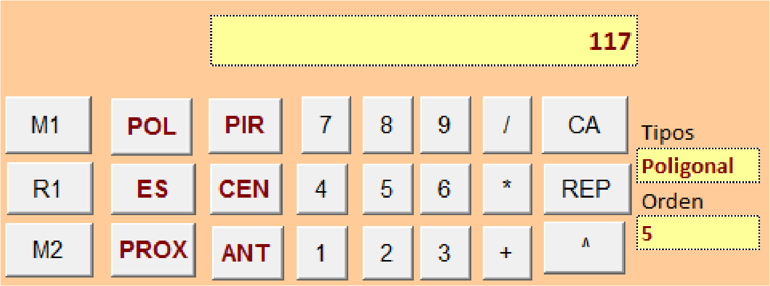
Los primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25,… como bien sabemos, y, según se acaba de ver, son suma de impares consecutivos. Fija la calculadora en el tipo *Cuadrado*. Escribe un 1 en pantalla y ve pulsando reiteradamente la tecla PROX. Obtendrás esa secuancia 1, 4, 9, 16, 25,… En la imagen se había llegado al 36:



El resto de poligonales se define de la misma forma que los cuadrados y los triangulares, como números que forman pentágonos, hexágonos, o de más lados. Basta ir añadiendo n-2 lados nuevos, 3 para los pentagonales, 4 para los hexagonales, y así con los demás.



Escribe en la calculadora que el tipo es Poligonal y el orden 5 y podrás analizar los pentagonales. Con la tecla PROX (o la ANT) puedes recorrerlos. Comprueba que los primeros pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92,… En la imagen se ha llegado, con la tecla PROX, al siguiente a 92, que es el 117

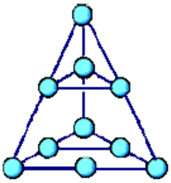


Con este repaso ya estamos en condiciones de comenzar el estudio de los números piramidales.

Números piramidales

Al igual que los poligonales se generan añadiendo a cada uno de ellos lados nuevos, los piramidales se forman mediante **números poligonales nuevos** que van haciendo el papel de bases de una pirámide.

Tomemos, por ejemplo, los números triangulares, 1, 3, 6, 10,… Imaginemos que comenzamos por 1 (siempre se comienza con él), que hará el papel de vértice, y después le adosamos como base el siguiente triangular, 3, y después el siguiente, 6, y así hasta que obtengamos el orden deseado. Lo puedes ver en la imagen.

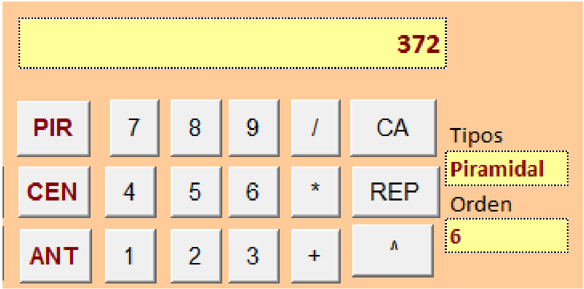


Para ver otras imágenes similares para los casos de cuadrados, pentagonales o hexagonales entra en Mathword:

http://mathworld.wolfram.com/PyramidalNumber.html

A los números poligonales de orden 3 (triangulares) les llamaremos **tetraédricos**, a los de orden 4, **piramidales cuadrados**, y al resto, pentagonales, hexagonales, y así hasta el orden que deseemos. Usamos la palabra *orden* para no crear confusión con la calculadora que ofrecemos. Llamaremos *lado* al número de poligonales que se acumulan.

Con nuestra calculadora *calcupol* podemos seguir cualquiera de estas sucesiones. Por ejemplo, para ver los piramidales hexagonales, fijamos el tipo en **Piramidal** y el orden en **6**. Escribimos un 1 en pantalla y vamos pulsando la tecla **PROX**. Aparecerán los piramidales 1, 7, 22, 50,…En la imagen hemos llegado hasta 372:



Puedes comprobar los resultados obtenidos en la dirección http://oeis.org/A002412

Si tienes un piramidal en pantalla, como puede ser el hexagonal 715, de lado 10, con la secuencia de teclas **– ANT =** puedes restarle el anterior, de lado 9, y te dará **190**, que es precisamente el poligonal de tipo 6 y lado 10. Para comprobarlo usa la secuencia de teclas **6 POL 10**, y te resultará 190.

Ya estamos en condiciones de sintetizar la generación de los números piramidales:

El número piramidal de orden k y lado n equivale a la suma del piramidal de idéntico orden y un lado menos y el poligonal de mismo orden y lado.

Si nombramos los piramidales como PIR y los poligonales como POL, se podría expresar así:

PIR(N,K)=PIR(N-1,K)+POL(N,K)

Por ejemplo (lo puedes ir calculando con *Calcupol*): El octavo piramidal hexagonal es 372, y el poligonal hexagonal de lado nueve es 153. Si los sumamos obtenemos el noveno piramidal hexagonal, ya que 372+153=525, que es el piramidal esperado.

Fórmula

Existe una expresión general para calcular **PIR(N,K)**. De todas las versiones publicadas nos quedamos con la siguiente:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Es un polinomio de tercer grado, al igual que los poligonales se expresan con uno de segundo (ver http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/teoria/teorarit.pdf)

Tienes una demostración en http://oeis.org/wiki/Pyramidal_numbers

Lo comprobamos con 372, pirámide hexagonal de lado 8:

PIR(8,6)=(3*64+512*4-8*1)/6=2232/6=372

Con un poco de Álgebra, se puede extraer de esta fórmula el factor n(n+1)/2, que es, precisamente, el número triangular del mismo lado que el piramidal que estamos calculando. La fórmula quedaría entonces así:

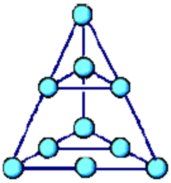
$$PIR(n,k) = T_n \frac{n(r-2) - (r-5)}{3}$$

Lo comprobamos: El vigésimo piramidal octogonal, según Calcupol, es 8190. El triangular del mismo lado 20, 210. Aplicamos la fórmula:

8190=210*(20*6-3)/3=210*117/3=24570/3=8190

TETRAEDROS.

A los números piramidales triangulares se les conoce también como tetraédricos, o simplemente **tetraedros** (abreviado, TET), en recuerdo del primer poliedro regular. Todos ellos se forman a partir del 1 adosando los distintos números triangulares, 3, 6, 10, 15, 21, 28… por lo que también podemos decir que los tetraédricos equivalen a las sumas parciales de los triangulares.



TET(1)=1

TET(2)=1+3=4

TET(3)=4+6=1+3+6=10

TET(4)=10+10)1+3+6+10=20

…

La lista de los primeros será, pues:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, 1140, 1330, 1540, 1771, 2024, 2300, 2600, 2925,… http://oeis.org/A000292

La puedes reproducir con la calculadora *Calcupol* que ya presentamos.

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Basta fijar el tipo en *Piramidal*, el orden en 3, y escribir en pantalla 1. Con esto, cada vez que pulses en la Tecla PROX se formará un nuevo piramidal tetragonal. En la imagen llegamos hasta 969:

La formula para estos números se simplifica mucho. Recordamos la expresión general para todos los piramidales:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Hacemos k=3 y queda:

$$TET(n) = PIR(n,3) = \frac{3n^2 + n^3 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Esta expresión nos suena familiar, y es que equivale al número combinatorio n+2 sobre 3:

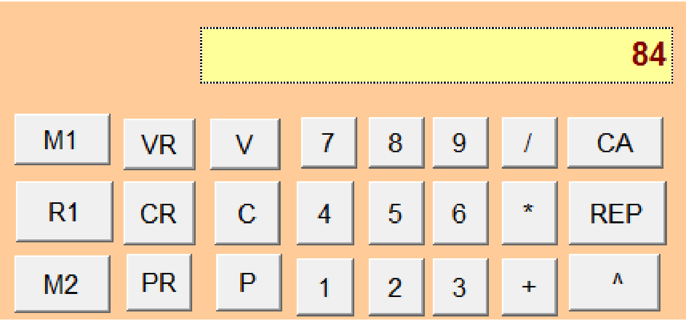
$$TET(n) = \binom{n+2}{3}$$

Por ejemplo, el tetragonal de orden 7 es 84, y equivale a (7*8*9)/6=504/6=84

Puedes usar la expresión de hoja de cálculo COMBINAT, para calcular el número combinatorio:

COMBINAT(9;3)	84

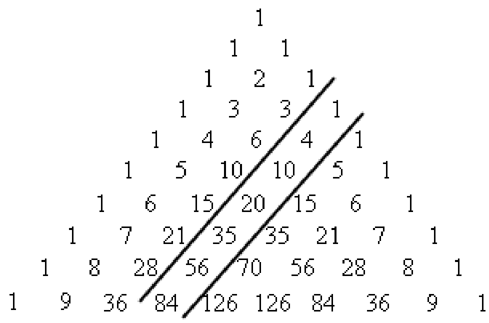
Y ya, por repasar más detalles, con nuestra calculadora combinatoria puedes usar las teclas **9 C 3**:



La tienes en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#calcucomb

Por ser números combinatorios de orden 3, los tetraedros se situarán en la cuarta fila del triángulo de Pascal:



(Imagen adaptada de otra contenida en Wikipedia.es)

Por cierto, y como era de esperar, los números triangulares se presentan en la anterior paralela.

Curiosidades

Al igual que hicimos con cuestiones similares, desarrollaremos a continuación algunas propiedades, muchas de ellas tomadas de http://oeis.org/A000292

Suma de diferencias

Si, como es costumbre en oeis.org, comenzamos la sucesión por el 0, resulta que cada número tetragonal de orden n es suma de todas las diferencias b-a que se pueden formar entre los números 1, 2, 3, … n entre sí, si b>=a (Amarnath Murthy, May 29 2003). Lo vemos mejor con un esquema de esas diferencias. La imagen contiene el desarrollo para el tetragonal 20:

	1	2	3	4	5	Por filas
1	0	1	2	3	4	10
2		0	1	2	3	6
3			0	1	2	3
4				0	1	1
5					0	0
					20	

Las cabeceras de filas y columnas están formadas por los números del 1 al 5. En el centro figuran las diferencias entre ellos sin contar las negativas, y a la derecha figuran sus sumas por filas. El número 20 resulta como suma de todas las diferencias del interior. Como ese número, por definición, es suma de triangulares, se formará a partir de 10+6+3+1, que son triangulares porque cada uno es suma de enteros consecutivos 1, 2,… k.

Suma de productos

El mismo autor, Amarnath Murthy, nos propone otra igualdad interesante, y es proceder a multiplicar todos los sumandos posibles **p** y **q** cuya suma es **n+1**, y todos los productos también sumarán un número tetragonal. En este caso es más una curiosidad algebraica que aritmética, pues se justifica así:

Suma de productos p*q con p+q=n+1:

1(n+1-1)+2(n+1-2)+3(n+1-3)+…+n(n+1-n)=n(n+1)(n+1)/2-1^2-2^2-…n^2

Pero la suma de cuadrados es n(n+1)(2n+1)/6

Restamos y queda n(n+1)(n+1)/2- n(n+1)(2n+1)/6 =n(n+1)(3n+3-2n+1)/6=**n(n+1)(n+2)/6**

Como es la expresión del tetragonal de orden n, ya lo tenemos demostrado. Un esquema con hoja de cálculo aclara bastante el proceso. En este caso no se considera el 0 como inicio de la sucesión:

N =	12	
p	q=N+1-p	p*q
1	12	12
2	11	22
3	10	30
4	9	36
5	8	40
6	7	42
7	6	42
8	5	40
9	4	36
10	3	30
11	2	22
12	1	12
	Suma	364
	Tetragonal núm. 12	

Suma de cuadrados

Un número tetragonal, si tiene lado par **n**, coincide con la suma de los cuadrados de todos los números pares comprendidos entre 1 y n/2. Por ejemplo:

El tetragonal 56=TET(6) equivale a la suma 2^2+4^2+6^2=4+16+36=56. Basta aplicar la suma de cuadrados consecutivos, ((n(n + 1)(2n + 1)) / 6), al caso n/2 y después multiplicar por el factor común 2^2=4. En cuanto desarrollemos obtenemos TET(n)= n(n+1)(n+2)/6:

Suma cuadrados pares es
4(n/2)(n/2+1)(n+1)/6=n(n+1)(n+2)/6

Si es impar, bastará sumar el mismo número de cuadrados impares. Como 35=1^2+3^2+5^2=1+9+25

Basta ver que la suma de ambos daría la de todos los cuadrados, en este caso, 56+35=91, que coincide con (6*7*(2*6+1))/6=7*13=91, luego es válida la posibilidad de sumar cuadrados impares.

Fórmula de recurrencia

Al tener expresión algebraica sencilla, los números tetragonales permiten fácilmente una expresión recurrente. En concreto es:

TET(n) = n + 2*TET(n-1) - TET(n-2)

La demostración es inmediata: n + 2*TET(n-1) - TET(n-2)=n+2*(n-1)*n*(n+1)/6-(n-2)(n-1)n/6 y simplificando llegamos a n(n+1)(n+2)/6=TET(n)

Si disponemos estos números en columna, podemos aplicar a cada dos de ellos esta fórmula de recurrencia:

n	TET(n)		n+2*TET(n-1)-TET(n-2)
1	1		
2	4		
3	10		10
4	20		20
5	35		35
6	56		56
7	84		84
8	120		120
9	165		165
10	220		220
11	286		286

Las líneas nos indican que 35 depende de los dos anteriores, 10 y 20, y de su número de orden 5, mediante la opeación 35 = 5+2*20-10 = 35

Equivalencia con un triangular

Una cuestión interesante es estudiar la posibilidad de reducir un número tetraédrico a un triangular puro, como si “aplanáramos” la pirámide hasta convertirla en un número triangular con un lado distinto. Basta aplicar el criterio para que m sea triangular, y es que 8m+1 sea cuadrado. Pues bien. Aplicando ese criterio, sólo se han encontrado cinco números tetraédricos que sean también triangulares: 1, 10, 120, 1540 y 7140. Si aplicamos el criterio al cuarto, nos queda:

8*1540+1 = 12321 = 111^2

Por cierto, la equivalencia con un cuadrado aún es más escasa: sólo son cuadrados los tetraédricos 1, 4 y 19600.

CUADRADOS

Nos dedicaremos ahora al estudio de los números piramidales cuadrangulares, o “pirámides cuadradas”, que se forman al apilar números cuadrados consecutivos.´Puedes hacerte una idea con las imágenes y definiciones contenidas en

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_piramidal_cuadrado)

Los primeros números piramidales cuadrados son:

0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525, 6201, 6930, 7714, 8555, 9455,…

(http://oeis.org/A000330)

Según su definición, cada piramidal cuadrado será equivalente a la suma 1+4+9+16+…, pero se conoce, y es muy popular, la fórmula de la suma de los n primeros cuadrados, que es igual a n*(n+1)*(2*n+1)/6, luego, si llamamos PCUAD(n) al enésimo piramidal cuadrado tendremos:

$$PCUAD(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si descomponemos 2n+1 en (n+2)+(n-1) resulta

$$PCUAD(n) = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

Al igual que un cuadrado se descompone en dos triángulos consecutivos, aquí serían dos tetraedros: ***Todo número piramidal cuadrado es suma de dos piramidales triangulares consecutivos.***

Lo podemos comprobar con nuestra calculadora especializada *calcupol*, que puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Elegimos n=9 y con la calculadora vamos obteniendo:

Secuencia de teclas: **4 PIR 9 =**, y nos da el piramidal cuadrado 285

Con la secuencia **3 PIR 9 =** obtenemos la pirámide triangular 165, y con **3 PIR 8 =**, la anterior, 120, y se verifica que 165+120=285.

Si recordamos que los piramidales triangulares (tetraedros) son suma de triangulares y los piramidales cuadrados suma de cuadrados, en hoja de cálculo queda

Triangular(n)	Triangular(n-1)	Cuadrado(n)
1	0	1
3	1	4
6	3	9
10	6	16
15	10	25
21	15	36
28	21	49
36	28	64
45	36	81
55	45	100
220	165	385
Tetraedro(10)	Tetraedro(9)	Cuadrangular(10)

Aquí vemos que los números triangulares engendran las pirámides triangulares, que si sumamos por filas, cada dos triangulares forman un cuadrado, y su suma el piramidal pedido. Al final, dos pirámides triangulares consecutivas suman la cuadrangular correspondiente. Merece la pena estudiar con detalle el esquema de cálculo.

Otra forma de generar piramidales cuadrados a partir de los triangulares es el cálculo mediante esta fórmula:

$$PCUAD(n) = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3}$$

Basta desarrollar:

((2n+2)(2n+1)2n)/(6*4)=n(n+1)(2n+1)/6, que es la fórmula usual, según vimos más arriba.

En este tipo de propiedades se basa esta otra generación de piramidales cuadrados (ver http://oeis.org/A000330). Formamos un triángulo como el del esquema, que está construido sobre n=5. Se entiende fácilmente:

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
1 2 3 4 5
1 2 3 4
1 2 3
1 2
1

Hemos situado un 1 en una base de 2*5-1 elementos, un 2, en la siguiente de 2*5-3, después un 3 2*5-5 veces, y así hasta llegar a un 5. Lo que propone este esquema es que

$$PCUAD(n) = \sum_{1}^{n} k(2n - 2k + 1)$$

Se puede demostrar por inducción recorriendo el esquema: PCUAD(1)=1, PCUAD(2)=1+1+1+2=5=1+4, PCUAD(3)=1+1+1+1+1+2+2+2+3=14=1+4+9

Se generan así 1, 5 y 14, los primeros piramidales. Para demostarlo para n+1 suponiéndolo correcto para n, bastará considerar, por definición, que los sumandos nuevos al ampliar el esquema de n a n+1 son:

1+(1+2)+(2+3)+(3+4)+(4+5)+…(n+n+1)=1+3+5+7+…2n +1=(n+1)^2, luego si se incrementa en un cuadrado, dará lugar al siguiente piramidal cuadrado, lo que completa la demostración.

Se puede dar otra interpretación a esta fórmula, y es que representa la suma de la función MÍNIMO a todos los pares formados por el conjunto 1..n consigo mismo. Para entenderlo lo construimos para n=5

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5
Sumas	1	5	14	30	55

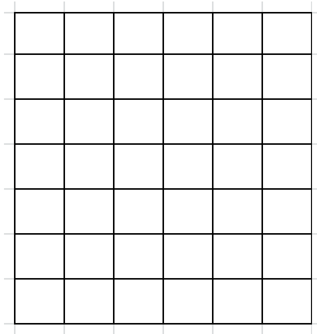
En el esquema se han situado los mínimos de cada par fila-columna en la celda correspondiente, y hemos reproducido el esquema de más arriba: el 1 se repite 9 veces, el 2, 7 veces, el 3, 5…y así hasta el último 5 que se repite una vez. Coincide, por tanto, con la fórmula explicada. Por eso, en la última fila aparecen los piramidales cuadrados (Enrique Pérez Herrero, Jan 15 2013)

Esta generación la usaremos más adelante.

CURIOSIDADES

Cuadrados que se ven en una cuadrícula.

Un acertijo muy popular consiste en saber ver todos los cuadrados contenidos en una cuadrícula también cuadrada.



Para n=1 se ve 1 cuadrado, para n=2, 5 cuadrados, para n=3, 14, luego son números piramidales cuadrangulares. Lo vemos: En la cuadrícula de la imagen hay 36 cuadrados de una unidad, y de 2 unidades ha de haber 25, ya que se puede duplicar o copiar de cinco formas distintas por filas o por columnas, y así, el de tres unidades se copia 3*3=9 veces, hasta que llegamos al total del que sólo existe una copia, luego S=36+25+16+9+4+1=91, que es la sexta pirámide cuadrangular.

Permutaciones con el tercer elemento mayor o igual

Los números piramidales cuadrados coinciden también con las variaciones de n elementos tomados de 3 en 3 con repetición, considerando tan solo aquellas en las que el tercer elemento es mayor o igual que los anteriores. En efecto, basta descomponer las variaciones binarias en conjuntos según el máximo valor de sus elementos. Lo aclaramos con un ejemplo.

Imagina las variaciones binarias de 6 elementos, 36 en total:

1	1	**1**
1	2	**2**
1	3	**3**
1	4	**4**
1	5	**5**
2	1	**2**
2	2	**2**
2	3	**3**
2	4	**4**
2	5	**5**
3	1	**3**
3	2	**3**
3	3	**3**
3	4	**4**
3	5	**5**
4	1	**4**
4	2	**4**
4	3	**4**
4	4	**4**
4	5	**5**
5	1	**5**
5	2	**5**
5	3	**5**
5	4	**5**
5	5	**5**

A cada una le hemos adosado el máximo valor que presenta. Tenemos 9 con el máximo 5, a las que solo podemos adosar como tercer elemento otro 5. Después vemos 7 con máximo 4, que admiten una ampliación con 2 elementos, el 4 y el 5. Para el 3 como máximo se presentan 5 arreglos y se pueden ampliar con 3, 4 y 5. Resumiendo, los posibles arreglos de tres elementos en los que el tercero sea mayor o igual que los otros vendrán dados por este cálculo:

9*1+7*2+5*3+3*4+1*5=9+14+15+12+5=55=1+4+9+16+25. Nos ha resultado PCUAD(5)

No hay nada sorprendente en esto, ya que hemos reproducido la fórmula que demostramos más arriba:

$$PCUAD(n) = \sum_{1}^{n} k(2n - 2k + 1)$$

Con nuestra hoja Cartesius puedes comprobarlo

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Basta escribir las condiciones (en el ejemplo para n=5)

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=3
xt=1..5
ES ((X3>X2)+(X3=X2))*((X3>X1)+(X3=X1))

Obtendrás 55 para n=5. Puedes ir cambiando xt=1..5 por otro intervalo y obtendrás el número piramidal correspondiente.

Suma de productos de cuadrados

Terminamos con otra propiedad curiosa, y es que el piramidal PCUAD(n) es la raíz cuadrada de la suma de todos los cuadrados (i*j)^2 en los que tanto i como j recorren los valores 1,2..n. Lo puedes estudiar en este esquema:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	9	16	25	36	49	64
2	4	16	36	64	100	144	196	256
3	9	36	81	144	225	324	441	576
4	16	64	144	256	400	576	784	1024
5	25	100	225	400	625	900	1225	1600
6	36	144	324	576	900	1296	1764	2304
7	49	196	441	784	1225	1764	2401	3136
8	64	256	576	1024	1600	2304	3136	4096
Sumas	1	25	196	900	3025	8281	19600	41616
Raíces cuadradas	1	5	14	30	55	91	140	204

En él hemos construido todos los cuadrados y hemos sumado los valores inferiores a cada n en la fila de abajo. Se destaca en color el caso n=5 para que lo sigas mejor. Al extraer la raíz cuadrada en la parte inferior resultan los primeros piramidales cuadrados.

No es difícil razonarlo. Recorre la primera columna de las sumas, por ejemplo la que tiene fondo de color. Sus sumandos 1+4+9+16+25 forman el piramidal cuadrado 55. La segunda equivale a la primera multiplicada por 4, luego su suma será 55*4, y las siguientes 55*9, 55*16 y 55*25. Si sacamos factor común en las sumas resultará 55(1+4+9+16+25)=55*55, luego su raíz cuadrada será el piramidal pedido.

De igual forma se puede razonar que si tomamos productos triples (i*j*k)^3, su raíz cúbica será también igual al piramidal cuadrado correspondiente.

Para terminar, una curiosidad: el único piramidal cuadrado que a su vez es un cuadrado es el 4900.

PENTÁGONOS

Desarrollaremos ahora los piramidales pentagonales, que se forman añadiendo a la unidad (el vértice de la pirámide) distintos números pentagonales como si fueran cortes poligonales de la pirámide. Para nosotros es preferible ver los piramidales como suma de pentagonales sucesivos. Así, si estos forman la sucesión 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,… http://oeis.org/A000326, los piramidales correspondientes coincidirán con sus sumas parciales: 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196,…

Los primeros piramidales pentagonales son:

1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, 726, 936, 1183, 1470, 1800, 2176, 2601, 3078, 3610, 4200, 4851, 5566, 6348, 7200, 8125, 9126, 10206, 11368, 12615, 13950, 15376, 16896, 18513, 20230, 22050, 23976, 26011, 28158, 30420, 32800, 35301, 37926, 40678,…

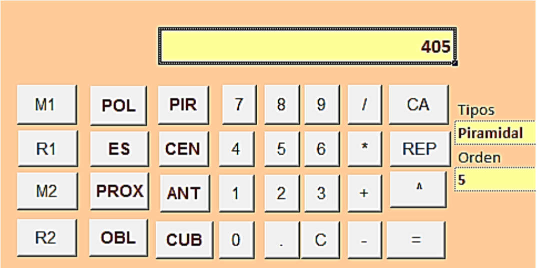
http://oeis.org/A002411

Puedes usar nuestra calculadora *calcupol* para recorrerlos. Descárgala, si lo deseas, desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Para recorrer la sucesión basta fijar el tipo en ***Piramidal*** y el orden en **5**. Después se escribe un 1 en pantalla y cada pulsación de la tecla PROX nos devolverá un térmiuno nuevo de la sucesión.

En la imagen hemos llegado a 405:



Con la tecla ANT puedes retroceder, y entre ambas recorrer el rango de términos que desees.

Fórmula

Los números piramidales pentagonales (PPENT) siguen una expresión polinómica muy sencilla:

$$PPENT(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^3+n^2}{2}$$

Esta fórmula se obtiene particularizando para 5 la general de los piramidales:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

$$PPENT(n) = \frac{3n^2 + n^3(5-2) - n(5-5)}{6} = \frac{3n^3+3n^2}{6}$$

$$= \frac{n^3+n^2}{2}$$

Por tanto, podemos afirmar que los piramidales pentagonales son **los promedios entre el cuadrado y el cubo de un número**. Por ejemplo:

405 es el piramidal pentagonal número 9, y se cumple que 405=(81+729)/2=810/2=405

Esto nos permite crear una tabla a partir de la sucesión de números naturales:

n	n^2	n^3	Promedio
1	1	1	1
2	4	8	6
3	9	27	18
4	16	64	40
5	25	125	75
6	36	216	126
7	49	343	196
8	64	512	288
9	81	729	405
10	100	1000	550

También la fórmula obtenida descubre que una pirámide pentagonal de lado k equivale a k veces el triangular del mismo lado. Por ejemplo, la pirámide de lado 6, 126, es seis veces mayor que 21, que es el triangular número 6.

Otra interpretación

El número piramidal pentagonal PPENT(n) equivale a la suma de los n+1 múltiplos menores de n. En efecto, esos múltiplos serán n*0, n*1, n*2,…n*n, y formarán progresión aritmética de diferencia n, luego su suma será (n*0+n*n)*(n+1)/2 = (n^3+n^2)/2, que es la expresión descubierta más arriba. Aquí tienes el esquema para PPENT(7)=196

	7
0	0
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
6	42
7	49
	196

Si extraemos factor común el 7, nos queda la suma 0+1+2+3+…que es un número triangular, tal como vimos unos párrafos más arriba. Esto nos descubre otra interpretación, y es que un número piramidal pentagonal equivale a un “prisma” triangular de la misma altura.

Expresado como sumatorio:

$$PPENT(n) = n\sum_{i=0}^{n} i$$

Recurrencia

Estos números presentan tantas formas de generación que el procedimiento recurrente no es muy necesario. No obstante, existen varias fórmulas de recurrencia. La más simple es

ppent(n) = 3*ppent(n-1) - 3*ppent(n-2) + ppent(n-3) + 3.

Es una recurrencia de tercer orden no homogénea. Se puede demostrar con un simple desarrollo algebraico, si recordamos que ppent(n)=(n^3+n^2)/2. Desarrollamos:

Ppent(n)=3((n-1)^3+(n-1)^2)/2-3((n-2)^3+(n-2)^2)/2+((n-3)^3+(n-3)^2)/2+3

Si nos da pereza simplificar, podemos acudir a Wiris, wxMaxima u otro similar. Usamos el segundo y obtenemos:

```
(%i1) ratsimp(3*((n-1)^3+(n-1)^2)/2-3*((n-2)^3+(n-2)^2)/2+((n-3)^3+(n-3)^2)/2+3);
```

(%o1) $\frac{n^3+n^2}{2}$

Como el resultado es (n^3+n^2)/2, hemos demostrado la recurrencia. No es muy útil.

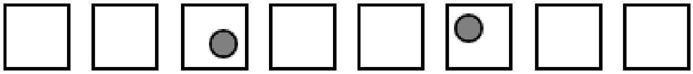
Cuestiones combinatorias

Es muy ilustrativo el estudio de algunas relaciones entre temas propios de números enteros con otros combinatorios. Muchas sucesiones poseen sentidos bastante simples si las estudiamos desde ese punto de vista. Los piramidales pentagonales también las admiten.

Bolas y cajas

Imagina que disponemos de n bolas que deseamos guardar en n cajas, pero con la caprichosa condición de *que solo usaremos 2 de ellas, dejando vacías las demás. En ese caso, el número de formas de guardar esas bolas es **PPENT(n-1)***

Así que decidimos usar solamente dos cajas. En la imagen nos hemos decidido por la 3 y la 6:



Nos comprometemos a guardar las **n** bolas en esas dos cajas. Es evidente que tenemos **n-1 posibilidades**, si no deseamos que una quede vacía: 1+(n-1), 2+(n-2), 3+(n-3), …(n-1)+1

Por otra parte, la elección de las cajas, que en nuestro ejemplo eran la 3 y la 6, se puede efectuar de C(n,2) formas, combinaciones de n cajas tomadas de 2 en 2, es decir **n(n-1)/2**

Multiplicamos las formas de elegir dos cajas por las de rellenarlas, y tenemos:

P= n(n-1)/2*(n-1)=(n^3-2n^2+n)/2

Esta expresión coincide con PPENT(n-1)=((n-1)^3+(n-1)^2)/2=(n^3-2n^2+n)/2

Cadenas de caracteres

En esta cuestión imaginamos que formamos todas las palabras posibles de tres caracteres en un alfabeto de n caracteres, y consideramos iguales entre sí aquellas palabras que contienen los mismos caracteres, pero invertidos.

Por ejemplo, supongamos las cinco letras A, B, C, D, E agrupadas en palabras de tres AAA, ABC, CBD,… y consideramos idénticas las inversas entre sí, como CBD, que la considaremos equivalente a DBC.

*Con estas condiciones, el número de palabras con un alfabeto de n caracteres será **PPENT(n)**.*

Tampoco es difícil de razonar: El número total de palabras será n*n*n, pero estas se dividen en dos grupos:

- Simétricas (capicúas o palindrómicas) que se contarán una vez. Su número es n*n=n^2 (el tercer elemento está obligado)
- No simétricas, cuyo número se ha dividir entre 2 para eliminar las palabras simétricas entre sí. Como su número es (n*n*n-n*n), al dividir entre 2 quedará (n*n*n-n*n)/2=n^2(n-1)/2

Sumamos ambos casos:

P=n^2+n^2(n-1)/2 = n^2(2+n-1)/2 = n^2(n+1)/2 = (n^3+n^2)/2=PPENT(n)

Así hemos demostrado la equivalencia. Lo vemos con el caso n=5:

Con un alfabeto de 5 caracteres se forman 5*5*5=125 palabras, de las que 5*5=25 son capicúas, y 125-

25=100, no capicúas. Estas segundas hay que contarlas una vez, luego dividimos entre 2, quedando 50. Sumamos ambos casos y obtenemos 50+25=75, que es el quinto número piramidal pentagonal.

HEXÁGONOS Y OCTÓGONOS

Ya es fácil adivinar que los piramidales de tipo hexagonal son suma de los primeros números poligonales hexagonales, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325,… Ve acumulando sumas y obtendrás los piramidales hexagonales (PHEX):

1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525, 715, 946, 1222, 1547, 1925, 2360, 2856, 3417, 4047, 4750, 5530, 6391, 7337, 8372,… http://oeis.org/A002412

Con nuestra calculadora Calcupol puedes también recorrerlos. Descárgala desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados

Fija el tipo en Piramidal de orden 6, escribe un 1 en pantalla y pulsa reiteradamente la tecla PROX. Así los obtendrás uno a uno. En la imagen hemos llegado hasta el 525.

Como todos los números piramidales, estos poseen una expresión polinómica que los genera. En este caso es

PHEX(n) = n(n + 1)(4n - 1)/6

Esta fórmula se obtiene particularizando para 6 la general de los piramidales:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

$$PHEX(n) = \frac{3n^2 + 4n^3 - n}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Lo podemos comprobar, por ejemplo, para n=6, y nos queda:

PHEX(6)=6*7*23/6=161, como era de esperar.

Recurrencias

Estos números presentan varias formas de generación por recurrencia. La más práctica es la siguiente:

a(n) = 3*a(n-1) - 3*a(n-2) + a(n-3) + 4.

Podemos organizarlo según esta tabla, que iniciamos con 1, 7, 22. En cada fila añadimos un elemento nuevo calculado mediante la recurrencia:

a(n-3)	a(n-2)	a(n-1)	3a(n-1)-3a(n-2)+a(n-3)+4
1	7	22	50
7	22	50	95
22	50	95	161
50	95	161	252
95	161	252	372
161	252	372	525
252	372	525	715
372	525	715	946

Como suma

De diferencias de cuadrados

La definición de los números figurados mediante acumulación de otros más simples hace que sean frecuentes las generaciones mediante sumas de elementos. En el caso de los piramidales hexagonales basta acumular diferencias de cuadrados entre un número natural N y todos los menores que él. Lo puedes ver en esta tabla:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0		1	4	9	16	25	36	49
1			3	8	15	24	35	48
2				5	12	21	32	45
3					7	16	27	40
4						9	20	33
5							11	24
6								13
7								
	0	1	7	22	50	95	161	252

Por ejemplo, 50 es igual a 4^2-0^2+4^2-1^2+4^2-2^2+4^2-3^2

Se puede desarrollar algebraicamente, si recuerdas la fórmula para la suma de los primeros cuadrados:

S = $n^2-0^2+n^2-1^2+n^2-2^2+n^2-3^2+\ldots n^2-(n-1)^2$ = n^3-n(n-1)(2n-1)/6 = n(n+1)(4n-1)/6

Hemos desembocado en la fórmula de los piramidales hexagonales, lo que demuestra la propiedad.

De números naturales impares

Todos los números piramidales hexagonales son suma de triangulares impares. Así, el tercero a(3) = t(1)+t(3)+t(5) = 1+6+15 = 22

Algebraicamente:

1*2/2+3*4/2+5*6/2+…(2n-1)n, expresada como sumatorio queda:

$$\sum_{1}^{n}(2n-1)n = 2\sum_{1}^{n}n^2 - \sum_{1}^{n}n = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

Si desarrollas llegarás a la fórmula del piramidal hexagonal: PHEX(n)=n(n+1)(4n-1)/6

Relación con números combinatorios

El denominador 6 de la fórmula de los piramidales hexagonales sugiere su relación con números combinatorios de índice inferior igual a 3, y, en efecto, existen esas relaciones:

$$PHEX(n) = \binom{n+2}{3} + 3\binom{n+1}{3}$$

Lo desarrollamos:

C(n+2,3)+3C(n+1,3)=(n+2)(n+1)n/6+3(n+1)n(n-1)/6=n(n+1)/6*(n+2+3n-3)=n(n+1)(4n-1)/6

Es un simple identidad algebraica.

Otra relación:

$$PHEX(n) = (4n-1)\frac{\binom{n+1}{2}}{3}$$

Es también una identidad algebraica sencilla.

Octogonales

No podemos extender en demasía la exposición de números piramidales. Terminamos con una breve referencia a los octogonales.

Como todos los anteriores, los piramidales octogonales resultan de la suma de los poligonales del mismo número de lados. Por ejemplo, la pirámide octogonal de índice 5 resultará de la suma: 1+8+21+40+65=135

Los primeros octogonales son:

1, 9, 30, 70, 135, 231, 364, 540, 765, 1045, 1386, 1794, 2275, 2835, 3480, 4216, 5049, 5985, 7030, 8190, 9471, 10879,… http://oeis.org/A002414

Su fórmula: a(n)=n(n+1)(2n-1)/2

Por ejemplo, a(7)=7*8*13/2=28*13=364

¿VARIACIONES O COMBINACIONES?

En el mes de julio pasado descubrí que el número 1716 equivale a un número de variaciones sin repetición y también de combinaciones sin repetición, ambas con el mismo índice superior. En efecto, 1716 = 13*12*11 = V(13,3), pero también equivale a C(13,6) o C(13,7), ya que

$$\binom{13}{6} = \frac{13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 13 * 12 * 11 = 1716$$

Se ha producido la feliz casualidad de que 13*12*11 = 6*5*4*3*2*1, y por eso se ha podido simplificar.

En esta propiedad el verdadero protagonista, a efectos de construcción de algoritmos, es el número 13, que es el que participa en ambas fórmulas, de combinaciones y variaciones. No existen muchos índices que cumplan esto. Los primeros son 8, 13, 27, 124, 725 y 5046, si imponemos la condición razonable de que el índice inferior sea mayor que 1, para evitar trivialidades.

Búsqueda “ingenua”

Para encontrar estos índices superiores podemos acudir a la definición que hemos insinuado: “Números **n** para los que existen dos índices **k** y **h** tales que V(n,k) =

C(n,h)”. Si disponemos de las funciones C y V, basta recorrer índices para cada candidato y parar cuando se dé una coincidencia. Podemos acotar la búsqueda eligiendo para h el intervalo (2, n/2), por cuestión de simetría en los números combinatorios. Por otra parte, es claro que k ha de ser menor que h, para que tenga lugar la igualdad. En Basic de hojas de cálculo podía usarse algo así:

```
Public Function vari(n, k)
Dim v, i

v = 1
For i = 0 To k - 1: v = v * (n - i): Next i
vari = v
End Function

Public Function combi(n, k)
Dim v, w, i

v = 1: w = 1
For i = 0 To k - 1: v = v * (n - i): w = w * (i + 1): Next i
combi = v / w
End Function
```

Código para cada valor de n (aquí representado por la variable i):

a = 0 ‘variable para parar la búsqueda
k = 2
While k <= i / 2 And a = 0 ‘ se recorren los valores de ***k***
b = combi(i, k) ‘ se encuentra el número de combinaciones ***b***
h = 2
While h < k And a = 0 ‘se recorren los valores de ***h***
c = vari(i, h) ‘ se encuentra el número de variaciones ***c***
If b = c Then a = 1: m = k: n = h ‘en caso de igualdad, se para y toma nota
h = h + 1
Wend
k = k + 1
Wend

La salida será el valor m del índice k y el n del índice h. En forma de tabla estos serían los primeros valores:

Índice superior	Índice de combinaciones	Índice de variaciones
8	3	2
13	6	3
27	4	3
124	5	4

Los comprobamos (salvo el 13 que ya se ha visto):

V(8,2)=8*7 = 56, C(8,3)=(8*7*6)/(3*2*1)=56
V(27,3)=27*26*25=17550,
C(27,4)=(27*26*25*24)/(4*3*2*1)=27*26*25=17550

V(124,4)=124*123*122*121=225150024 = C(124,5)

Algoritmo con recursividad

En este primer intento estamos realizando más operaciones de lo debido. No es necesario calcular C(n,k) y V(n,h) en cada paso. Es mejor generar cada intento recursivamente a partir del anterior:

a = 0
k = 2
b = i
While k <= i / 2 And a = 0
b = b * (i - k + 1) / k ‘recursividad para combinaciones
h = 2
c = i
While h < k And a = 0
c = c * (i - h + 1) ‘recursividad para variaciones
If b = c Then a = 1: m = k: n = h
h = h + 1
Wend
k = k + 1
Wend

Con hoja de cálculo se llega pronto al desbordamiento de decimales. Deberemos cambiar a PARI:

for(i=3,1000,a=0;j=2;m=i;while(j<=i/2+1&&a==0,m=m*(i-j+1)/j;k=2;n=i;while(k<j&&a==0&&n<=m,n*=i-k+1;if(m==n,a=1);k+=1);j+=1);if(a==1,print(i,", ",j,", ",k,", ",m)))

Es poco legible. Contiene las mismas ideas desarrolladas con VBA, pero escritas de forma excesivamente compacta.

El resultado te será familiar, y aparece un nuevo índice, el 725:

```
8, 4, 3, 56
13, 7, 4, 1716
27, 5, 4, 17550
124, 6, 5, 225150024
725, 7, 6, 197554684517400
?
```

Para seguir avanzando se requiere ya mucha paciencia, porque los cálculos se van haciendo lentos y complejos. El siguiente índice superior en aparecer es el 5046:

```
5046, 8, 7, 16458566311785642529680
?
```

El valor de V(5046,7) = C(5046,8) da idea de cómo se va complicando esto. Sin embargo, nos conduce al hecho de que en V(5046,7)=5046*5045*5044*5043*5042*5041*5040, el último factor es el factorial de 7, lo que permite la simplificación que da lugar a la igualdad entre variaciones y combinaciones.

Casos particulares

El último ejemplo nos da una idea de la naturaleza de algunos de los índices superiores con la propiedad buscada. Es fácil entender que todo índice del tipo **n!+(n-1)** da lugar a un número **m** en el que el número de variaciones de **n-1** elementos coincide con el de combinaciones de **n** elementos. Así ha ocurrido con muchas de las soluciones presentadas. En la siguiente tabla se han destacado en rojo las que ya conocíamos. Nos hemos detenido en el último factorial que Excel puede expresar de forma entera:

N	Factorial de N	N-1	Índice
3	6	2	**8**
4	24	3	**27**
5	120	4	**124**
6	720	5	**725**
7	5040	6	**5046**
8	40320	7	40327
9	362880	8	362888
10	3628800	9	3628809
11	39916800	10	39916810
12	479001600	11	479001611
13	6227020800	12	6227020812
14	87178291200	13	87178291213

Por tanto, el número de índices adecuados es infinito, y crece a ritmo de factorial.

Los casos que faltan, como el 13, provienen de la casualidad de que un producto de números consecutivos equivalga a un factorial, que es lo que ocurre con 10*9*8 = 6! ¿Existirán más casos? Mediante una búsqueda manual descubrimos: 6*5*4=5!, lo que nos da de nuevo el candidato 8, pero esta vez con la expresión C(8,5) y la solución 56 ya vista. De ella podemos extraer la coincidencia 10*9*8*7=7!, que nos llevaría al índice 13.

Este estudio es un ejemplo más de una forma clásica de abordar problemas:

- Usar un algoritmo sencillo, que no hace uso de propiedades especiales. Es un buen método para comenzar, pero suele ser largo y poco interesante. Así ha sido nuestro procedimiento "ingenuo".
- Perfeccionar el algoritmo a fin de conseguir mayor velocidad de búsqueda. En este caso se ha logrado con la recursividad.
- Acudir a la teoría o el razonamiento. Hemos descubierto así que existen infinitos casos con la fórmula n!+n-1, más unos cuantos casos aislados. Así le hemos quitado el misterio a la cuestión planteada.

MÁXIMO PRODUCTO EN LA PARTICIÓN DE UN NÚMERO

Ya sabemos que una partición de un número entero positivo N es una suma de números también enteros positivos cuyo resultado es ese número. Ya hemos tratado en este blog el tema de las particiones, y lo volveremos a desarrollar próximamente. Si no tienes claro el concepto puedes acudir a las direcciones

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/particiones-de-un-numero.html

https://es.wikipedia.org/wiki/Partici%C3%B3n_(teor%C3%ADa_de_n%C3%BAmeros)

Está muy estudiado el tema del desarrollo de las particiones y el del cálculo de su número. Aquí nos **interesará el máximo producto que se puede lograr multiplicando los sumandos de cada partición**. Lo introducimos con ejemplos:

Máximo producto logrado con particiones

Tomemos el número 6. Mentalmente se pueden escribir sus particiones (no se tiene en cuenta el orden): 6=5+1=4+2=3+3=4+1+1=… En cada partición calculamos el producto entre sumandos: 6, 5, 8, 9, 4,… y nos quedamos con el máximo. En el esquema lo verás mejor:

6						6
1	5					5
2	4					8
3	3					9
1	1	4				4
1	2	3				6
2	2	2				8
1	1	1	3			3
1	1	2	2			4
1	1	1	1	2		2
1	1	1	1	1	1	1

Figuran las once particiones del 6 y en la columna de la derecha los productos de sumandos. En la partición de sumando único lo elegimos como producto. Se observa que el máximo producto es 9. Como el resultado es único, constituye una función del número elegido, que podríamos escribir como MPP (Máximo Producto en Particiones) y se tendría que MPP(6)=9.

Otro ejemplo: En PARI las particiones se obtienen con la función *partitions*. Si pedimos las particiones del número 8 las obtenemos como vectores independientes:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
? print(partitions(8))
[Vecsmall([8]), Vecsmall([1, 7]), Vecsmall([2, 6]), Vecsmall([3, 5]), Vecsmall([
4, 4]), Vecsmall([1, 1, 6]), Vecsmall([1, 2, 5]), Vecsmall([1, 3, 4]), Vecsmall(
[2, 2, 4]), Vecsmall([2, 3, 3]), Vecsmall([1, 1, 1, 5]), Vecsmall([1, 1, 2, 4]),
 Vecsmall([1, 1, 3, 3]), Vecsmall([1, 2, 2, 3]), Vecsmall([2, 2, 2, 2]), Vecsmal
l([1, 1, 1, 1, 4]), Vecsmall([1, 1, 1, 2, 3]), Vecsmall([1, 1, 2, 2, 2]), Vecsma
ll([1, 1, 1, 1, 1, 3]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 2, 2]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 1, 1
, 2]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])]
?
```

Si multiplicas los sumandos dentro de cada vector descubrirás que el máximo producto es 18=2*3*3, luego MPP(8)=18

Estos resultados figuran en la página de OEIS http://oeis.org/A000792 con una definición recursiva que ya trataremos:

1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 243, 324, 486, 729, 972, 1458, 2187, 2916, 4374, 6561, 8748, 13122, 19683, 26244, 39366, 59049, 78732, 118098, 177147, 236196, 354294, 531441, 708588, 1062882, 1594323, 2125764, 3188646, 4782969,…

Como era de esperar, los valores son crecientes (cada uno es un máximo que se apoya en los anteriores) y pronto adquieren una buena tasa de crecimiento. La página citada contiene una fórmula recursiva que es fácil de entender.

*a(n) = max{ (n-i)*a(i) : i<n}; a(0) = 1*

Se define a(0) como 1, y también es fácil entender las siguientes: a(1)=1, a(2)=2, a(3)=3,… La recursividad tampoco es difícil de captar. Se trata de multiplicar cada valor menor que **n** por el máximo correspondiente a su diferencia con **n**. En efecto, las particiones de **n** se forman eligiendo esos valores i:1…n-1 para luego unirlos con las particiones de **n-i**. Por ejemplo, en las particiones del 7, si elegimos el valor 4, se deberá combinar con las particiones del 3 para formar las particiones del 7 que contengan un 4. Igual ocurre con todos los valores: 5 se añadirá a las particiones del 2 y 3 se unirá a las particiones de 4.

Si conservamos los valores máximos de cada partición de n-i, al multiplicarlos por i resultarán productos de la partición superior, candidatos a ser máximos. Al recorrer todos los valores menores que **n** dispondremos de **n-1** posibles máximos, y uno de ellos será el MPP.

Algoritmo de construcción de la función MPP

Las ideas anteriores nos permitirán construir la función MPP. En VBA de Excel se puede usar esta definición de función:

Public Function mpp(n)
Dim mx, i, m, j, mm
Dim a(50) ‘Está preparado para n<=50. Se puede ampliar a otro número

If n = 0 Or n = 1 Then mpp = 1: Exit Function
If n = 2 Then mpp = 2: Exit Function ‘Casos particulares
a(0) = 1: a(1) = 1: a(2) = 2: mx = 2
If n > 2 Then
For i = 1 To n ‘Se recorren los valores anteriores para la recursión
m = 1 ‘Valor provisional del máximo
For j = 1 To i
mm = j * a(i - j)
If m < mm Then m = mm ‘Se busca un máximo nuevo mediante los productos con los anteriores
Next j
mx = m: a(i) = m ‘Se incorpora el máximo a la lista
Next i
End If
mpp = mx ‘Máximo final
End Function

Con esta función podemos encontrar el máximo producto entre particiones de cualquier número. Si es mayor que 50 bastará cambiar la dimensión del vector de máximos. En la tabla siguiente hemos recogidos los valores de MPP para los números comprendidos entre 30 y 40:

N	MPP(N)
30	59049
31	78732
32	118098
33	177147
34	236196
35	354294
36	531441
37	708588
38	1062882
39	1594323
40	2125764

Para quienes conozcan el lenguaje PARI (gratuito y muy recomendable para estos temas) se inserta un código para esta función, que también devuelve los valores entre 30 y 40:

```
mpp(n)=my(a=vector(50), m, mm,
mx=2,mp=1);a[1]=1;a[2]=2;if(n<2,mp=1,if(n==2,mp=2
,for(i=3,n,m=1;for(j=1,i, d=i-j;if(d>0,mm = j *
a[d],mm=j);if(m<mm,m=mm));mx=m;a[i]=m));mp=mx
;mp)
```

```
for(k=30,40,print1(mpp(k),", "))
```

Aquí tienes el resultado, que coincide con el de Excel:

```
59049, 78732, 118098, 177147, 236196, 354294, 531441, 708588, 1062882, 1594323,
2125764, break[11]>
```

Interpretación algebraica

Estos valores coinciden con los cardinales máximos de los subgrupos del grupo simétrico S(n). Usando la descomposición en ciclos se les puede dar un significado

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/10/ciclos-2-descomposicion-en-ciclos.html)

Por ejemplo, en el caso del 8 visto más arriba, mpp(8)=18, y puede dársele el significado de que es el cardinal máximo de un subgrupo propio del grupo de permutaciones de 8. En concreto, usando la descomposición en ciclos, podría ser G=(1,2)(3,4,5)(6,7,8) o cualquiera de sus isomorfos. En el caso del 6 es fácil ver que el subgrupo maximal es el GM=(1,2,3)(4,5,6), de cardinal 3*3=9, que es el valor de mpp(6).

Existe una forma directa y simple para calcular mpp(n), sin recurrencias ni algoritmos. Como es un cambio importante en el desarrollo que hemos llevado hasta ahora, lo dejamos para la segunda parte del tema.

Máximo producto como producto del 2 y el 3

En los párrafos anteriores estudiamos la función que asigna a cada número entero positivo el máximo producto formado entre los sumandos de todas su particiones. Mediante recurrencia calculamos los valores de la función correspondiente, a la que llamamos MPP, pudiéndose formar tablas similares a la siguiente:

N	MPP(N)
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	9
7	12
8	18
9	27
10	36
11	54
12	81
13	108

El objetivo de esta segunda parte sobre el tema es demostrar que todos los valores de la función se calculan con una de estas tres expresiones: ***3^n, 2*3^n, 4*3^n***, de forma cíclica salvo el valor inicial 1.

Factores del producto máximo

Razonaremos a continuación que los valores de mpp(n) (n>4) solo poseen los factores 2 y 3. Todo se basa en que si un número N se descompone en dos sumandos a y b, el máximo producto a*b se produce en el interior del intervalo (1,N), debido a que la función x(N-x) presenta el máximo en N/2. Consecuencia de esto es que si una partición recibe un sumando nuevo para crear otra partición superior, ese sumando se puede ir descomponiendo en sumandos 1, 2 y 3, de forma que el producto aumente. Por ejemplo, si el nuevo sumando es 6, se puede sustituir por 3+3, cuyo producto es 9, superior al 6. Como el 6 es factor del producto, también lo será el 9, y el producto aumentará.

Con sumandos mayores se puede proceder de igual forma, Por ejemplo, el 10 se puede sustituir por 3+3+3+1, con lo que el producto final, en lugar de ser multiplicado por 10, lo hará en 27 (obsérvese que el 1 no interviene en el proceso).

Todos los valores del producto máximo presentarán la descomposición del tipo 2^p*3^q.

Concretemos algo más:

Caso 1: números del tipo 3k (múltiplos de 3)

Los primeros valores, según la tabla anterior, son: mpp(3)=3, mpp(6)=9, mpp(9)=27, es decir, las primeras potencias de 3. Si pasamos al valor 12, según el razonamiento de los párrafos anteriores, el producto máximo recibirá el factor 3, luego se dará que mpp(12)=3^4=81 y mpp(15)=3^5=243.

Si N=3*k, su función mpp(N)=3^k

Caso 2: Números del tipo 3k+2

Para ellos es inútil acudir al anterior 3k+1, pues el producto sólo perdería el factor 1 que no incrementa su valor, pero si acudimos al máximo de 3k=3^k, el nuevo factor máximo es el 2, y queda mpp(3k+2)=2*3^k.

Por ejemplo, mpp(8)=mpp(3*2+2)=2*3^2=18, como ya sabemos por el contenido anterior. Otro: mpp(14)=mpp(3*4+2)=2*3^4=162.

Si N=3*k+2, su función mpp(N)=2*3^k

Caso 3: Números del tipo 3k+1

Si acudimos al valor 3(k-1)+2, basta usar como nuevo sumando el 2 para ver que el máximo que buscamos es 4*3^(k-1).

Vemos algún ejemplo: mpp(13)=mpp(3*4+1)=4*3^(4-1)=4*27=108, como ya sabemos por casos anteriores.

El valor de

mpp(31)=mpp(3*10+1)=4*3^9=4*19683=78732.

Lo hemos comprobado con la definición de función dada anteriormente.

31	78732

Si N=3*k+1, su función mpp(N)=4*3^(k-1)

Nueva definición de la función

Estas propiedades que acabamos de estudiar nos permiten simplificar mucho la definición de la función MPP. La presentamos en varias versiones para que las analices. La primera está construida con las funciones de Excel o Calc. Es esta, que la hemos copiado actuando sobre la celda D11:

=3^(ENTERO((D11)/3)-RESIDUO(D11;3)=1))*2^RESIDUO(-D11;3)

Parece difícil. Intenta comprenderla. La primera parte decide a qué exponente elevaremos el 3, y la segunda el mismo problema para el 2. Para el primero hallamos el valor de k que acompaña al 3 y le restamos un 1 en el caso 3k+1. Para el segundo elegimos 1, 2 o 4 según el residuo respecto al 3, pero con signo menos. Ya, es complicado.

Con ella hemos construido esta tabla, para los números 40 a 45:

40		2125764
41		3188646
42		4782969
43		6377292
44		9565938
45		14348907

Código en Basic VBA:

Es quizás más fácil de entender la definición (segunda ya) de mpp en VBA. Como ya tenemos una versión, le llamaremos a esta MPP_2. Su desarrollo puede ser este:

Public Function mpp_2(n)
Dim k, m, p

k = Int(n / 3) ‘se determina el valor de k en n=3k+b
If n Mod 3 = 1 Then m = 1 Else m = 0 ‘si es múltiplo de 3, el exponente de 3 disminuye en 1
p = 3 ^ (k - m) ‘parte correspondiente al factor 3
m = 3 - n Mod 3: If m = 3 Then m = 0 ‘se prepara el exponent del 2
mpp_2 = p * 2 ^ m ‘se ensambla la función
End Function

Este código es más simple y rápido que el anterior. Hemos comprobado su equivalencia, y se demuestra aquí el poder simplificador del razonamiento matemático.

Para quienes entiendan el lenguaje PARI, copio aquí la solución de M. Somos:

mpp(n) = floor(3^(n - 4 - (n - 4) \ 3 * 2) * 2^(-n%3))

Es muy parecida a la que proponemos.

Otra recurrencia

Si repasas la página http://oeis.org/A000792 que nos viene ayudando en este estudio, podrás leer más propiedades y fórmulas sobre estos productos máximos. Una muy sencilla y curiosa es la de Ivan Neretin:

a(n) = a(n-1) + largest proper divisor of a(n-1), n > 2

En efecto, estudiamos los tres casos:

Si a(n-1)=3*k, sabemos que mpp(a(n-1))=3^k, y su mayor divisor propio md=3^(k-1). Sumamos y obtenemos mpp(a(n))=mpp(3*k+1)=3^k+3^(k-1)=4*3^(k-1), como ya sabemos.

Si a(n-1)=3*k+1, se tendrá: mpp(a(n-1))=4*3^(k-1), su mayor divisor propio md=2*3^(k-1). Sumamos: mpp(a(n))=mpp(3*k+2)=4*3^(k-1)+2*3^(k-1)=2*3^k, expresión ya conocida.

Si a(n-1)=3*k+2, mpp(a(n-1))=2*3^k, su mayor divisor propio md=3^k y al sumar obtenemos la esperada 3^(k+1).

Si dispones de la función en VBA de “mayor divisor”, en una columna de hoja de cálculo puedes engendrar la sucesión completa. En este blog disponemos de la función MAYORDIV (no la desarrollamos porque acude a otras más complicadas), lo que nos permite desarrollar la recurrencia:

N	MPP(N)	A(N-1)+MAYORDIV(A(N-1))
1	1	
2	2	
3	3	3
4	4	4
5	6	6
6	9	9
7	12	12
8	18	18
9	27	27
10	36	36
11	54	54
12	81	81
13	108	108

Se ha adosado la recurrencia a la derecha de una tabla de MPP, para ver la equivalencia.

Si no dispones de la función MAYORDIV, puedes copiar la que sigue:

```
Public Function mayordiv(n)
Dim f, m
Dim es As Boolean

f = 2
m = 1
If n / 2 = n \ 2 Then es = True: m = 2 Else es = False
While f * f <= n And Not es
```

```
If n / f = n \ f Then es = True: m = f
f = f + 1
Wend
If m = 1 Then mayordiv = 1 Else mayordiv = n / m
End Function
```

Productos cartesianos condicionados con *Cartesius*

VARIACIONES

Todo este capítulo estará basado en “Cartesius”, una herramienta implementada en hoja de cálculo para construir productos cartesianos condicionados, no sólo las clásicas Variaciones, Combinaciones y Permutaciones, sino otros más complejos, como particiones de un número o arreglos que cumplan condiciones específicas, como que el segundo elemento sea promedio de los dos primeros.

Introducción a *Cartesius*

Esta herramienta la puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius,

Está implementada en Excel y LibreOffice Calc, con una fiabilidad bastante aceptable, aunque quizás necesite ligeros retoques.

Actúa sobre conjuntos numéricos (hasta doce de ellos), iguales o diferentes, que ocupan cada uno una columna. Por ejemplo, en la imagen se van a combinar dos conjuntos de números pares con otro de números primos:

X1	X2	X3
2	2	2
4	4	3
6	6	5
8	8	7
10	10	11
12	12	13

Sobre ellos se construirá un producto cartesiano que, si no se añaden condiciones, estará formado en este caso por 216 arreglos de tres elementos cada uno. Aquí tienes los doce primeros, que seguirían hasta un total de 216:

	X1	X2	X3
1	2	2	2
2	2	2	3
3	2	2	5
4	2	2	7
5	2	2	11
6	2	2	13
7	2	4	2
8	2	4	3
9	2	4	5
10	2	4	7
11	2	4	11
12	2	4	13

Este proceso no tiene interés si no se añaden algunas condiciones. Existen gran variedad de ellas en *Cartesius*. Las básicas definen los conjuntos y las demás condicionan el producto cartesiano.

Por ejemplo, sobre los conjuntos de arriba se puede exigir que la suma de los elementos sea 17. Esto se consigue en la columna de condiciones, que será el objetivo principal de estas instrucciones previas:

```
xtotal=3
xt=1..6
x1=etiq(par)
x2=etiq(par)
x3=etiq(primo)
suma=17
creciente
```

En este ejemplo se construyen los conjuntos, se impone además que la suma sea igual a 17, y se exige, por simplificación, que los elementos estén ordenados en orden creciente. Más adelante explicaremos la sintaxis de cada tipo de condición. Con estas conseguiríamos tres soluciones:

	X1	X2	X3
1	2	2	13
2	2	4	11
3	4	6	7

Este es en esencia el trabajo de esta herramienta: la construcción de productos cartesianos de conjuntos numéricos y su posterior condicionamiento. En esta serie de temas te iremos dando la explicación necesaria para cada ejemplo, remitiéndote, para un estudio más sistemático, a la Instrucciones de uso de la herramienta, que puedes descargar desde la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/cartesius.pdf

Productos cartesianos condicionados

Antes de construir los primeros arreglos con Cartesius (en este apartado serán *variaciones*), recordamos conceptos:

Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es otro conjunto cuyos elementos son todos los pares posibles formados por un elemento de A y otro de B en ese orden. Se representa como A×B

X	A	B	C	D
1	A1	B1	C1	D1
2	A2	B2	C2	D2
3	A3	B3	C3	D3

Imaginemos ahora productos cartesianos de un conjunto consigo mismo o con otros, pero que puede contener varios factores. Por ejemplo, este es el producto cartesiano A×A×A siendo A={1,2}

X1	X2	X3
1	1	1
1	1	2
1	2	1
1	2	2
2	1	1
2	1	2
2	2	1
2	2	2

Una definición alternativa de producto cartesiano es el conjunto de formas de elección de un elemento de cada conjunto de los que forman el producto. Estos son los conjuntos básicos sobre los que trabajaremos. Por efectividad, **sólo se estudiarán conjuntos de números naturales**. Si ahora les imponemos condiciones (más adelante aprenderás cómo), obtendremos, por ejemplo, combinaciones con repetición, ya estudiadas en Combinatoria:

X1	X2	X3
1	1	1
1	1	2
1	2	2
2	2	2

Con otro tipo de condiciones podemos también obtener particiones de un número en sumas. Aquí tienes las particiones del número 11 en sumas de impares:

X1	X2	X3
11		
1	1	9
1	3	7
1	5	5
3	3	5

A lo largo de varios apartados aprenderemos el manejo de la hoja *Cartesius* mediante ejemplos, independientemente de la lectura directa de las Instrucciones de uso. Comenzaremos con la aplicación de esta herramienta a los problemas clásicos de la Combinatoria.

Recorrido por los problemas

Dedicaremos el resto del capítulo a los arreglos básicos de la Combinatoria, pero a cada uno le añadiremos condiciones que no suelen figurar en los libros de texto. Simultáneamente nos iremos familiarizando con los formatos de las condiciones en *Cartesius.*

Variaciones con repetición

Recordamos que un producto cartesiano es el conjunto de formas de elección de un elemento de cada conjunto de los que forman el producto. Así, del conjunto {1, 2, 3} multiplicado por sí mismo tres veces obtendríamos este producto cartesiano:

	X1	X2	X3	X4
1	1	1	1	
2	1	1	2	
3	1	1	3	
4	1	2	1	
5	1	2	2	
6	1	2	3	
7	1	3	1	
8	1	3	2	
9	1	3	3	
10	2	1	1	
11	2	1	2	
12	2	1	3	
13	2	2	1	
14	2	2	2	
15	2	2	3	
16	2	3	1	
17	2	3	2	
18	2	3	3	
19	3	1	1	
20	3	1	2	
21	3	1	3	
22	3	2	1	
23	3	2	2	
24	3	2	3	
25	3	3	1	
26	3	3	2	
27	3	3	3	
28				

Hay 27 formas de elegir un elemento de cada conjunto factor. Coincide con 3^3=27. En general, si el conjunto posee m elementos y lo tomamos n veces, el número de elementos del producto cartesiano sería

$$VRm,n = m^n$$

Esta fórmula la conocemos desde la Enseñanza Media, y es la correspondiente a las *variaciones con repetición*. En efecto, **la operación básica de Cartesius es formar estas variaciones**, a las que también podríamos nombrar como *producto cartesiano sin condicionar*. Si después imponemos condiciones, obtendremos combinaciones, permutaciones, particiones, y otros subconjuntos del producto cartesiano que no reciben nombre, como sumas de cuadrados con total dado, descomposición de un número en suma de triangulares y otros similares que iremos viendo.

Al ser la operación más sencilla, se obtiene escribiendo sólo dos condiciones. Por ejemplo, para formar las variaciones con repetición del conjunto {1,2,3,4} tomadas de 3 en 3 bastarían estas:

XTOTAL=3
XT=1..4

No necesita más, pues si no le indicamos nada, repite y tiene en cuenta el orden (producto cartesiano) Es el arreglo básico en Cartesius.

Tu primer arreglo de números

Abre *Cartesius*. Busca su primera hoja *Planteamiento*. Si contiene datos, puedes usar los botones ***Borrar condiciones*** y ***Borrar datos***, para verlo todo limpio. Escribe después en la zona de condiciones, celda N10, la condición **XTOTAL=3**. Significa que el conjunto que vas a definir lo combinarás consigo mismo en un producto cartesiano de tres factores. El TOTAL se refiere al número de columnas que se rellenarán.

En una celda más abajo, la N11, escribe: **XT=1..4**. Esto significa que trabajarás en todas las columnas con los números que van del 1 al 4.

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
XTOTAL=3
XT=1..4

Si ahora pulsas el botón ***Iniciar***, se pasará automáticamente a la hoja ***Producto*** y verás el desarrollo de las 64 variaciones obtenidas (4^3). Aquí tienes las primeras:

	X1	X2	X3	X4
1	1	1	1	
2	1	1	2	
3	1	1	3	
4	1	1	4	
5	1	2	1	
6	1	2	2	
7	1	2	3	
8	1	2	4	
9	1	3	1	

Si vuelves a la hoja ***Planteamiento*** observarás que las columnas se han rellenado según tus deseos:

X1	X2	X3	X4
1	1	1	
2	2	2	
3	3	3	
4	4	4	

Aunque sea adelantar información, añade otra condición, XT=ETIQ(PRIMO), y tus datos cambiarán a los cuatro primeros números primos, después de pulsar **Iniciar**.

X1	X2	X3
2	2	2
3	3	3
5	5	5
7	7	7

Las variaciones seguirían siendo 64, porque no hemos condicionado el producto cartesiano, sólo los datos.

Por tanto, **identificaremos las variaciones con repetición con los productos cartesianos sin condicionar**. Prueba a simular la tirada simultánea de tres dados y verifica que obtienes 216 elementos en el producto cartesiano, porque las tiradas de cada dados se pueden repetir. Sólo tienes que definir XTOTAL=3 y XT=1..6. Inténtalo.

Variaciones sin repetición

No siempre deseamos elegir un elemento de cada conjunto con repetición. Podemos desear elegir elementos distintos, como ocurriría en la extracción de 3 bolas de colores de una bolsa, sin reponerlas una vez extraídas. Como *Cartesius* sólo maneja números, las podremos representar como 1, 2 y 3. El planteamiento podría ser:

XTOTAL=3
XT=1,2,3
NO REPITE

Aquí hemos cambiado la definición del conjunto: en lugar de usar XT=1..3, lo hemos definido **como conjunto de elementos**, como XT=1,2,3. Es una variante. Además, se ha añadido la condición NO REPITE, que no necesita explicación. No olvides borrar antes las condiciones si has estado trabajando con ellas.

Pulsamos el botón de ***Iniciar*** y obtenemos

X1	X2	X3	X4
1	2	3	
1	3	2	
2	1	3	
2	3	1	
3	1	2	
3	2	1	

Ya habrás identificado estos arreglos como ***variaciones sin repetición*** y comprendido que son 6 porque 6=3*2*1, según la conocida fórmula

$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$

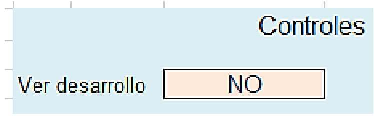
Imagina que deseamos encontrar todas las variaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4 en las que el segundo elemento sea un 2. Acudiríamos a este planteamiento:

XTOTAL=4
XT=1..6
X2=2..2

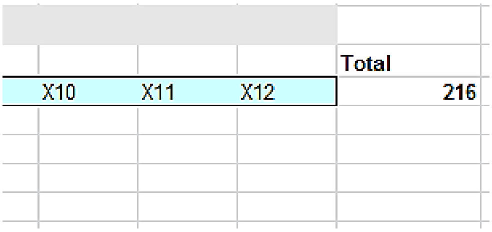
Con este ejemplo aprenderás una característica importante de Cartesius, y es que **una condición**

puede anular parte de las anteriores. En XT=1..6 obligábamos a que todos los elementos recorrieran del 1 al 6, pero después hemos añadido algo contradictorio, que X2 (el segundo) sólo pueda pertenecer a 2..2. Pues bien, **esta es la condición que** prevalece (en pantalla pueden seguir apareciendo 3, 4, 5, 6, pero no tendrán validez).

Borra las condiciones, escribe estas nuevas y observarás que obtienes, en lugar de $1296=6^4$, $216=6^3$, ya que el segundo elemento permanece constante. Si no deseas ver los elementos, sino sólo el número de arreglos, en la hoja ***Producto*** puedes acudir a los controles y especificar que no quieres ver el desarrollo:



De esa forma los cálculos serán mucho más rápidos, pero sólo figurará el número total 216 arriba a la derecha del conjunto:



Podías haber escrito estas otras condiciones:

XTOTAL=4
X1=1..6

X2=2..2
X3=1..6
X4=1..6

Ya te habrás dado cuenta de que XT define para todos y X1, X2,… para cada uno en particular.

Importante: El programa se puede confundir si encuentra una celda con un espacio en blanco en lugar de estar vacía. Por eso, es conveniente ***borrar las condiciones*** antes de escribir las nuevas.

VARIACIONES CONDICIONADAS

Variaciones condicionadas

Una gran utilidad de ***Cartesius*** es la posibilidad de añadir condiciones a las propias de un arreglo determinado. Anteriormente iniciamos el uso de Cartesius y procedimos a construir variaciones. Ahora las condicionaremos de diversas formas.

Explicamos condiciones nuevas con un ejemplo:

De todas las variaciones sin repetición que podemos formar con los números 1 al 7 tomados de 4 en 4, ¿cuántas presentan una suma de elementos igual a 14? ¿Cuántas de ellas contienen un 1 y un 6?

El principio de la programación es fácil:

XTOTAL=4
XT=1..7
NO REPITE

Obtendremos 840=7*6*5 variaciones. Compruébalo.

Si le añadimos la condición SUMA=14, obtendremos el desarrollo pedido:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
XTOTAL=4
XT=1..7
NO REPITE
SUMA=14

(Se admiten mayúsculas y minúsculas y que no influyen los formatos de las celdas)

X1	X2	X3	X4	X5
1	2	4	7	
1	2	5	6	
1	2	6	5	
1	2	7	4	
1	3	4	6	
1	3	6	4	
1	4	2	7	
1	4	3	6	
1	4	6	3	

Se obtiene un total de 96 resultados. Es interesante que, en lo posible, se justifiquen los resultados que nos ofrece *Cartesius*. En este caso, había cuatro formas de sumar 14: 1+2+4+7=1+2+5+6=1+3+4+6=2+3+4+5 y si multiplicamos por 24 órdenes distintos que admiten los sumandos, obtenemos 24*4=96.

Así que podemos fijar la suma de nuestros arreglos numéricos. Basta escribir SUMA= y el resultado que nos interese.

En la segunda parte de la propuesta nos preguntábamos en cuántas de esas sumas figurará un 1 y un 6. Esto se consigue con la condición CONTAR. Escribiremos CONTAR(1)=1 y CONTAR(6)=1, para exigir que sólo aparezcan una vez.

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
XTOTAL=4	
XT=1..7	
NO REPITE	
SUMA=14	
CONTAR(1)=1	
CONTAR(6)=1	

Pulsa en el botón ***Iniciar*** (o en el de ***Reiterar*** de la siguiente hoja) y obtendrás la mitad de resultados, 48. También se puede justificar: si figuran 1+6 y 6+1 en todas las sumas, los otros sumandos han de ser 2+5, 5+2, 3+4 y 4+3. En total, combinando, nos resultan 8 sumas diferentes (teniendo en cuenta el orden porque son variaciones). Cada una de estas sumas adm

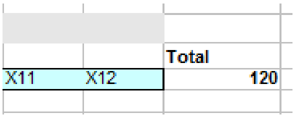
ite 6 órdenes (4!/(2!2!), luego, multiplicando, resultarán 48 variaciones.

Otro ejemplo

Disponemos de los números 1 al 5, y deseamos formar con ellos variaciones de cuatro en cuatro sin repetición. Según lo estudiado hasta ahora, vemos que bastarán estas tres condiciones:

XTOTAL=4
XT=1..5
NO REPITE

Escríbelas en Cartesius y comprueba que resultan 5*4*3*2=120 soluciones.



Con los elementos anteriores, deseamos destacar aquellos arreglos en los que aparecen el 3 y el 4, las veces que sean. Comenzamos como en el ejemplo anterior

XTOTAL=4
XT=1..5
NO REPITE

Ahora le añadimos dos condiciones nuevas:

CONTAR(3)>0

CONTAR(4)>0

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
XTOTAL=4
XT=1..5
NO REPITE
CONTAR(3)>0
CONTAR(4)>0

Significan que al contar el 3 o el 4, el resultado ha de ser distinto de cero, o lo que es igual, **que han aparecido**. Iniciamos la construcción del producto cartesiano condicionado y obtenemos sólo 72 resultados, porque se han perdido los arreglos que no contenían ni 3 ni 4 simultáneamente, que suman 1*2*3*4+1*2*3*4 = 48. Esto es así porque van de cuatro en cuatro, luego al menos o el 3 o el 4 aparecerán, aunque no simultáneamente. Tenemos entonces 120-48=72.

Otra forma de verlo: Los elementos restantes producen 3*2=6 resultados. Los elementos 3 y 4 producen 2, luego ya tenemos 12 (el producto). Pero entre unos y otros se pueden ordenar, según la conocida fórmula de permutaciones con repetición, de 4!/(2!2!)=6 formas. Multiplicamos y obtenemos 12*6=72.

La función CONTAR tiene más propiedades, que veremos en otro momento. Lo importante es que vas descubriendo la flexibilidad de condiciones que permite *Cartesius*.

Datos como sucesiones

La condición XT=1..8 nos marca un intervalo del número 1 hasta el 8, pero podemos cambiar el valor de esos datos, 1, 2, … 8… por otros que se calculen a partir de ellos. Esto se puede lograr con la condición SUC seguida de una expresión en N válida y entre paréntesis. Por ejemplo, SUC(N^3) convertiría esos números 1..8 en sus cubos, 1, 8, 27,…512. En teoría admite cualquier expresión válida con números enteros. Si no lo es, se pueden producir errores inesperados, por lo que si se usa con alumnos, se deberá tener mucha paciencia, e iniciar el cálculo si las operaciones fallan.

Proponemos un ejemplo: Descomponer 2017 como suma de cubos de todas las formas posibles, no pudiendo pasar de cuatro cubos (para controlar un poco la explosión de resultados que podrían producir 1^3)

Como no nos indican el número de sumandos, sustituimos la condición **XTOTAL=4** por **XRANGO=4**. La diferencia estriba en que esta última hace recorrer el número de elementos de los arreglos pedidos entre 1 y el total, lo que, aunque tarda más, nos ofrece todas las posibilidades pedidas.

Podía quedar así:

XRANGO=4
XT=1..12 (que es el mayor cubo posible)
XT=SUC(N^3)

SUMA=2017

Aunque no lo haremos, no importa incluir un comentario entre paréntesis si está bien separado de la condición por espacios en blanco.

Lo escribimos en *Cartesius*:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
XRANGO=4
XT=1..12
xt=suc(n^3)
suma=2017

Nos resultarán 15 posibilidades:

X1	X2	X3	X4	X5
343	343	1331		
343	1331	343		
1331	343	343		
216	343	729	729	
216	729	343	729	
216	729	729	343	
343	216	729	729	
343	729	216	729	
343	729	729	216	
729	216	343	729	
729	216	729	343	
729	343	216	729	
729	343	729	216	
729	729	216	343	
729	729	343	216	

Es buen momento para insistir en que estos cálculos pueden resultar lentos con LibreOffice Calc, por lo que se ha insertado un contador en la celda **A1** de la hoja *Producto* como aviso de que no se ha finalizado el cálculo.

Aquí vemos que no queríamos tantas, por lo que podíamos haber añadido la condición CRECIENTE, para eliminar el orden en el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5
343	343	1331		
216	343	729	729	

ARREGLOS CON CUENTAS

Permutaciones con cuentas

Imagina que creamos un producto cartesiano considerando el orden y la repetición de elementos, pero exigimos el número de repetición de alguno de ellos.

Por ejemplo, deseamos construir permutaciones con siete elementos a partir de los números 2 y 3, pero deseamos que aparezca en cada arreglo 4 veces el 2 y tres veces el 3. Para eso debemos usar ***las condiciones***, que filtran el producto cartesiano total para adaptarlo a nuestros deseos. Puedes intentar escribir esto como planteamiento:

```
XTOTAL=7

XT=2,3

CONTAR(2)=4

CONTAR(3)=3
```

Pulsa en ***Iniciar*** y obtendrás 35 arreglos, 7!/(3!*4!)=7*5=35, según la fórmula elemental

$$PRn, p, q, r, s \ldots = \frac{n!}{p!\, q!\, r!\, s! \ldots}$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	2	2	2	2	3	3	3	
2	2	2	2	3	2	3	3	
3	2	2	2	3	3	2	3	
4	2	2	2	3	3	3	2	
5	2	2	3	2	2	3	3	
6	2	2	3	2	3	2	3	
7	2	2	3	2	3	3	2	
8	2	2	3	3	2	2	3	
9	2	2	3	3	2	3	2	
10	2	2	3	3	3	2	2	
11	2	3	2	2	2	3	3	
12	2	3	2	2	3	2	3	
13	2	3	2	2	3	3	2	
14	2	3	2	3	2	2	3	
15	2	3	2	3	2	3	2	
16	2	3	2	3	3	2	2	
17	2	3	3	2	2	2	3	
18	2	3	3	2	2	3	2	
19	2	3	3	2	3	2	2	
20	2	3	3	3	2	2	2	
21	3	2	2	2	2	3	3	
22	3	2	2	2	3	2	3	
23	3	2	2	2	3	3	2	
24	3	2	2	3	2	2	3	
25	3	2	2	3	2	3	2	
26	3	2	2	3	3	2	2	
27	3	2	3	2	2	2	3	
28	3	2	3	2	2	3	2	
29	3	2	3	2	3	2	2	
30	3	2	3	3	2	2	2	
31	3	3	2	2	2	2	3	
32	3	3	2	2	2	3	2	
33	3	3	2	2	3	2	2	
34	3	3	2	3	2	2	2	
35	3	3	3	2	2	2	2	

De igual forma, podría interesarnos marcar un mínimo a algunos elementos. Por ejemplo, permutar con repetición los números 1, 2, 3, 4 y 5, pero exigiendo que al menos se repita el 2 tres veces.

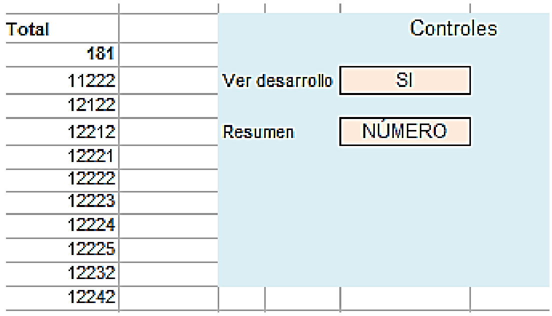
Escribiríamos

XTOTAL=5
XT=1..5
CONTAR(2)>2

Obtendríamos un número algo extraño, el 181. Razonamos de dónde procede. Clasificamos los arreglos según las veces que aparece el 2, y nos daría

C(5,3)*VR(4,2)+C(5,4)*VR(4,1)+C(5,5)*VR(4,0) = 10*4^2+5*4+1*1 = 160+20+1 =181

Los números combinatorios representan los lugares que ocupa el 2 repetido, y las variaciones con repetición los otros números que le acompañan en cada arreglo. Es interesante, para quienes se inician en estos temas, recorrer los 181 resultados e identificar cada grupo para contarlos mejor y llegar a 160, 20 y 1. Si en los controles activas que el resultado sea **un número**, podrás verlos de forma más compacta:



Observarás que vamos recorriendo los temas de la Combinatoria clásica, pero pronto nos desviaremos a otras cuestiones.

Variaciones con cuentas

Lo que sigue no se suele estudiar en Enseñanza Media. Imaginemos que deseamos construir variaciones (se tienen en cuenta el orden y los elementos), pero que sometemos alguno de estos a una cuenta. Por ejemplo, tomemos los siete primeros números naturales. Formemos con ellos variaciones con repetición tomados de 5 en 5. Si no imponemos más condiciones, el número de arreglos sería 7^5=16807.

Sobre esa base, si deseamos que los elementos 2 y 3 se repitan exactamente dos veces cada uno, la estructura de los arreglos cambia totalmente. Con Cartesius se puede resolver el problema con este planteo:

XTOTAL=5

XT=1..7

CONTAR(2)=2

CONTAR(3)=2

No se añade REPITE porque es la opción por omisión en la construcción de las variaciones. Al pulsar en **Iniciar** observamos que sólo quedan 150 casos posibles (con LibreOffice Calc tardará un poco. Para ver que no ha terminado observa la celda A1 de la hoja *Producto*). Aquí tienes un fragmento de la tabla:

1	2	2	3	3
1	2	3	2	3
1	2	3	3	2
1	3	2	2	3
1	3	2	3	2
1	3	3	2	2
2	1	2	3	3
2	1	3	2	3
2	1	3	3	2
2	2	1	3	3
2	2	3	1	3

Resultan 150 casos porque 2, 2, 3, 3 admiten 24/(2*2)=6 posibilidades y a cada uno le acompañan uno de los restantes elementos, 1, 4, 5, 6, y 7, que además se pueden situar en cinco sitios, luego 6*5*5=150. Como en un ejemplo anterior, podemos expresarlo como C(4,2)*VR(5,2)

Fórmula general

Supongamos que combinamos **m** números tomados de **n** en **n** con orden y repetición, en los que **p** de ellos están sometidos a unas cuentas $\mathbf{r_1, r_2, \ldots r_p}$ que suman **s**. Vemos que en el recuento de las variaciones posibles debemos multiplicar tres factores.

1) Posibles ordenamientos de los **p** elementos forzados a repetir: $s!/(r_1!r_2!\ldots r_p!)$

2) Variaciones de los restantes: $(m-p)^{(n-s)}$.

3) Formas de intercambiarse los s que admiten cuentas con los n-p elementos del arreglo que no obedecen a esa cuenta. Serían n!(s!(n-s)!)

Multiplicamos y quedaría:

$$Vm,n,r_1,r_2r_3,\ldots r_p = \frac{s!}{r_1!\,r_2!\ldots r_p!}\frac{n!}{s!\,(n-s)!}(m-p)^{n-s}$$

Simplificando entre s! y uniendo fracciones:

$$Vm,n,r_1,r_2r_3,\ldots r_p = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_p!\,(n-s)!}(m-p)^{n-s}$$

Lo comprobamos con el anterior ejemplo: m=7, n=5, p=2, s=4, r_1=2, r_2=2

$V7,5,2,2=5!/(2!2!1!)*5^1=30*5=150$, que era la respuesta de *Cartesius*.

Comprobamos la fórmula con otros ejemplos:

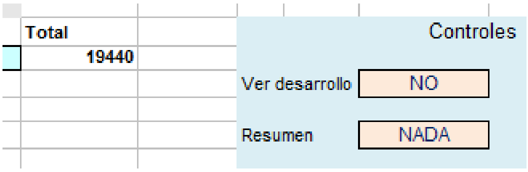
Variaciones de siete elementos tomados de 6 en 6, en las que el 2 se debe repetir dos veces. Lo programamos en Cartesius y obtenemos 19440 soluciones.

XTOTAL=6

XT=1..7

CONTAR(2)=2

(Hemos optado por un NO en la opción de *Ver desarrollo.* Hay que tener paciencia, porque tarda. En algunas versiones de Excel se para la aparición, pero luego vuelve)



Comprobamos la fórmula: m=7, n=6, p=1, s=2, $r_1=2$

$V7,6,2,2 = 6!/(2!4!)6^4=15*1296=19440$

Una última comprobación:

Siete elementos tomados de 5 en 5, en los que el elemento 2 (podría ser otro. No afecta al resultado) se repite 3 veces.

Usamos estas condiciones en Cartesius:

XTOTAL=5

XT=1..7

CONTAR(2)=3

360 posibilidades.

Total			Controles
360			
		Ver desarrollo	NO
		Resumen	NADA

Calculamos: m=7, n=5, p=1, s=3, r_1=3

$V7,5,3,3 = 5!/(3!2!)6^2 = 120/12*36 = 360$

Proponemos otro cálculo, que no explicaremos.

Variaciones de 8 objetos tomados de seis en seis, de los que un elemento (puede ser el 2) se repite dos veces y otro, (por ejemplo el 3) tres. Te deben resultar 360. Comprueba con la fórmula. Las primeras variaciones serían estas:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	2	2	3	3	3
1	2	3	2	3	3
1	2	3	3	2	3
1	2	3	3	3	2
1	3	2	2	3	3
1	3	2	3	2	3
1	3	2	3	3	2
1	3	3	2	2	3
1	3	3	2	3	2
1	3	3	3	2	2
2	1	2	3	3	3

Estos ejemplos con más de cinco elementos por arreglo pueden tardar bastante. Paciencia.

Otros condicionamientos

Hemos condicionado las variaciones fijando el número de apariciones de un elemento, pero podemos pensar en otros muchos condicionamientos. Desarrollaremos ahora algunos para que te vayas familiarizando con el manejo de Cartesius.

Igualdades y desigualdades

Imaginemos que deseamos formar todas las permutaciones con repetición de los números 1, 2, 3 y 4 (256 en total, es decir 4*4*4*4), pero que deseamos que el primer elemento sea igual al segundo, y que este sea mayor que el tercero. Los elementos aislados se representan en Cartesius como **X1, X2, X3,…** Por tanto, lo que deseamos es que **X1=X2** y que **X2>X3**.

En este tipo de programas la conectiva lógica **Y** se puede sustituir por el producto *****, ya que VERDADERO suele ser equivalente a "distinto de cero" y FALSO a "igual a cero". Por eso, las dos condiciones unidas se pueden escribir como **(X1=X2)*(X2>X3)**.

Para introducir estas fórmulas condicionantes usamos el prefijo ES, por lo que escribiremos:

XTOTAL=4 *Número de elementos que se toman*
XT=1..4 *Conjunto con el que se forma el producto cartesiano*
ES (X1=X2)*(X2>X3) *Condición añadida*

No escribas los comentarios en cursiva, que pueden alterar el funcionamiento. Debes usar estas condiciones de abajo.

XTOTAL=4
XT=1..4
ES (X1=X2)*(X2>X3)

Iniciamos, y obtenemos 24 arreglos en lugar de los 256 previstos:

	X1	X2	X3	X4
1	2	2	1	1
2	2	2	1	2
3	2	2	1	3
4	2	2	1	4
5	3	3	1	1
6	3	3	1	2
7	3	3	1	3
8	3	3	1	4
9	3	3	2	1
10	3	3	2	2
11	3	3	2	3
12	3	3	2	4
13	4	4	1	1
14	4	4	1	2
15	4	4	1	3
16	4	4	1	4
17	4	4	2	1
18	4	4	2	2
19	4	4	2	3
20	4	4	2	4
21	4	4	3	1
22	4	4	3	2
23	4	4	3	3
24	4	4	3	4

Este ejemplo te dará idea de la potencia de cálculo y planteamiento que puedes obtener con la hoja Cartesius.

Aquí no merece la pena buscar una fórmula teórica (puedes intentarlo), porque al depender el número de arreglos del primer elemento, no sería práctica.

COMBINACIONES

Combinaciones

Cartesius maneja de igual forma variaciones que combinaciones. La única diferencia es que en estas hay que añadir CRECIENTE, para que el orden no intervenga y cada arreglo sea en realidad un conjunto. Si además se desea que no existan repeticiones, se añade NO REPITE.

Combinaciones ORDINARIAS

Ya lo hemos explicado: basta añadir CRECIENTE y NO REPITE a las condiciones. Por ejemplo, así construiríamos las combinaciones de 7 elementos tomados de 5 en 5:

```
XTOTAL=5
XT=1..7
CRECIENTE
NO REPITE
```

XTOTAL=5 indica que las combinaciones constarán de cinco elementos cada una, XT=1..7 define los elementos del conjunto base, Y CRECIENTE y NO REPITE ya están explicados.

Te resultarán 21, según la clásica fórmula

$$Cm,n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Que en este caso da C7,5=7!/(5!2!)=21. Son estas:

	X1	X2	X3	X4	X5
1	1	2	3	4	5
2	1	2	3	4	6
3	1	2	3	4	7
4	1	2	3	5	6
5	1	2	3	5	7
6	1	2	3	6	7
7	1	2	4	5	6
8	1	2	4	5	7
9	1	2	4	6	7
10	1	2	5	6	7
11	1	3	4	5	6
12	1	3	4	5	7
13	1	3	4	6	7
14	1	3	5	6	7
15	1	4	5	6	7
16	2	3	4	5	6
17	2	3	4	5	7
18	2	3	4	6	7
19	2	3	5	6	7
20	2	4	5	6	7
21	3	4	5	6	7

Es un tema sencillo, que podemos usar para comprobar desarrollos construidos manualmente.

Combinaciones con repetición

Es evidente que si suprimimos la condición NO REPITE resultarán combinaciones con repetición.

Si combinamos 6 elementos tomados de 3 en 3, de forma creciente y pudiendo repetir elementos, nos resultarán combinaciones con repetición. Usamos estas condiciones:

```
XTOTAL=3
XT=1..6
CRECIENTE
```

Resultan 56 combinaciones. Aquí vemos las primeras:

X1	X2	X3
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	1	4
1	1	5
1	1	6
1	2	2
1	2	3
1	2	4
1	2	5
1	2	6
1	3	3
1	3	4
1	3	5
1	3	6

Este resultado está de acuerdo con la fórmula general:

$$CRm,n = \binom{m+n-1}{n}$$

En efecto, CR6,3 = 8!/(3!5!) = 8*7*6/6 = 56

Se comprende que esta hoja es muy útil para comprobar cálculos efectuados con otras herramientas. Pero también permite investigar condiciones nuevas. ¿Qué hubiera ocurrido si añadimos la palabra REPITE? Una primera idea es que no se alteraría nada, que resultarían combinaciones con repetición, pero no es exactamente así. Si desarrollamos con esa nueva condición el resultado no es ya 56, sino 36. Como habrás comprendido, ahora sólo se generan arreglos **que tengan repetición** con toda seguridad, mientras que antes entraban todos, los que contenían repeticiones y los que no. La fórmula en este caso sería la diferencia entre el número de combinaciones con repetición y las que no la admiten:

$$CRepm,n = \binom{m+n-1}{n} - \binom{m}{n}$$

En este ejemplo los cálculos serían Crep6,3=8!/(3!5!) - 6!/(3!3!)=56-20=36

Como en los ejemplos anteriores, se pueden añadir otros condicionamientos. Podemos fijar una cuenta de elementos, pero sólo en el caso de combinaciones con repetición. Imaginemos que en el ejemplo anterior deseamos que se permitan repeticiones y que el elemento 4 se repita dos veces. Quedarían las condiciones así:

XTOTAL=3
XT=1..6
CRECIENTE
CONTAR(4)=2

El resultado sería

X1	X2	X3	X4
1	4	4	
2	4	4	
3	4	4	
4	4	5	
4	4	6	

Es fácil de entender que sólo resulten cinco: el par 4 4 acompañado de 1, 2, 3, 5 o 6.

Sumas

Un tipo especial de combinaciones, al que quizás volvamos más adelante son los desarrollos de un número en sumas según una lista

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html)

Se trata de partir de una lista concreta de números, por ejemplo los primeros cinco primos, y encontrar la forma de descomponer otro número como suma de ellos. En Cartesius puedes efectuarlo con todos o con parte de ellos. Por ejemplo, ¿se puede descomponer el número 28 en suma de los siete primeros primos 2, 3, 5, 7, 11?

Para ello usaremos una condición nueva, ETIQ, que sustituye los números que se van a combinar por otros predefinidos en la hoja ***Almacén de datos***. En otro momento lo explicaremos con más detalle. En este caso bastaría escribir XT=ETIQ(PRIMO) para que los elementos a combinar pasaran de 1, 2, 3, 4 y 5 a los primos 2, 3, 5, 7 y 11.

X1	X2	X3	X4	X5
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
5	5	5	5	5
7	7	7	7	7
11	11	11	11	11

Las condiciones completas serían:

```
XTOTAL=5
xt=1..5
XT=ETIQ(PRIMO)
SUMA=28
CRECIENTE
```

Ya podrás interpretarlas, al menos parcialmente. Nos obligan a: combinar cinco números tomados de 5 en 5, que han de ser primos y sumar 28. Lo desarrollaremos de forma creciente para evitar soluciones idénticas pero con distinto orden.

El resultado es

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	2	2	2	11	11	
2	2	3	5	7	11	
3	2	5	5	5	11	
4	2	5	7	7	7	

Vemos que existen cuatro formas de engendrar el 28 con números primos (con repetición). Si añadiéramos la condición NO REPITE, sólo obtendríamos la segunda: 2+3+5+7+11. ¿Y con menos sumandos? Sustituimos XTOTAL=5 por XRANGO=5, a ver qué ocurre.

Lo programamos y descubrimos cuatro soluciones más, porque XRANGO recorre las posibilidades de suma desde 1 sumando hasta 5:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	3	3	11	11		
2	3	7	7	11		
3	5	5	7	11		
4	7	7	7	7		
5	2	2	2	11	11	
6	2	3	5	7	11	
7	2	5	5	5	11	
8	2	5	7	7	7	

Por terminar esta presentación rápida, comprobamos que Cartesius no sólo puede calcular la suma, sino, en casos preparados, descubrir su naturaleza. Si en lugar de SUMA=28 hubiéramos escrito SUMA:PRIMO, se desarrollarían todas las sumas entre 2, 3, 5, 7 y 11 cuyo resultado es primo. Obtenemos 76 posibilidades, que van desde las más simples, como 2+3 o 2+5 hasta la de mayor suma, 7+7+11+11+11 =47.

Si impedimos que se repitan sólo obtendríamos 12, contando las sumas unitarias:

	X1	X2	X3	X4	X5
1	2				
2	3				
3	5				
4	7				
5	11				
6	2	3			
7	2	5			
8	2	11			
9	3	5	11		
0	5	7	11		
11	2	3	5	7	
2	2	3	7	11	

PARTICIONES

Particiones de un número

Se llaman particiones de un número natural N a las distintas formas de descomponerlo en sumandos enteros positivos sin tener en cuenta el orden y admitiendo repetición de sumandos. Para no tener en cuenta el orden se puede exigir que los sumandos sean decrecientes en sentido amplio (o crecientes). Así es más fácil representarlos.

Por ejemplo, el 9 se puede descomponer en estas sumas:

9, 8+1, 7+2, 7+1+1, 6+3, 6+2+1, 6+1+1+1, 5+4, 5+3+1, 5+2+2 5+2+1+1, 5+1+1+1+1, 4+4+1, 4+3+2, 4+3+1+1, 4+2+2+1, 4+2+1+1+1 4+1+1+1+1+1, 3+3+3, 3+3+2+1, 3+3+1+1+1, 3+2+2+2, 3+2+2+1+1, 3+2+1+1+1+1 3+1+1+1+1+1+1, 2+2+2+2+1, 2+2+2+1+1+1, 2+2+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1+1+1+1 1+1+1+1+1+1+1+1+1

Son 30 en total

Al número total de particiones de N lo representaremos por la función P(N). Por tanto la afirmación anterior se puede representar como P(9)=30. En muchos lenguajes de programación se representa como *partitions(n)*, y si solo se desea contar las particiones, como *#partitions(n)*.

PARTICIONES CON CARTESIUS

La nueva versión de nuestra herramienta la puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Con ella es más sencillo el desarrollo de particiones, gracias a la condición XRANGO, que recorre todos los números de sumandos de la partición. Hay que advertir que los desarrollos **pueden resultar lentos**, y casi imposibles para números grandes (Cartesius solo usa hasta 12 elementos), especialmente en LibreOffice Calc. Si se tiene a la vista el desarrollo se puede observar que la lentitud aparece en el tramo final, cuando casi todos los sumandos tienen el valor 1. En ese momento se puede adivinar el resultado aunque no haya terminado. Cada equipo y versión de hoja de cálculo tiene una forma de interrumpir la ejecución de una macro, pero a veces no es fácil encontrar ese dato. En el equipo del autor y con Excel 2010 funciona la combinación de pulsar la tecla de Windows y ESC.

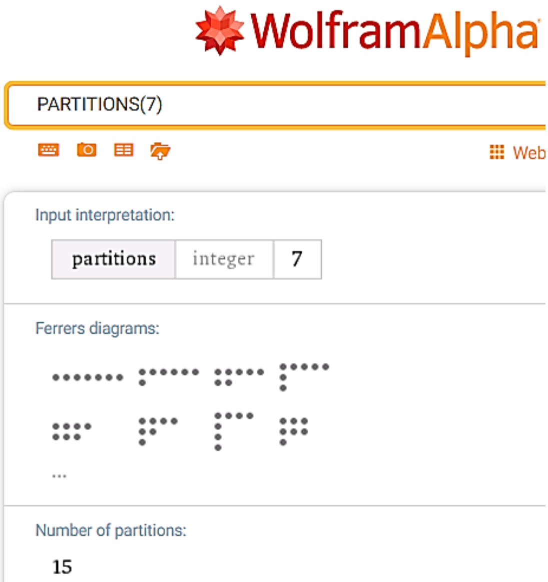
Debes abrir la hoja ***Planteamiento***, borrar las condiciones si las hay y escribir las nuevas. Con el botón **Iniciar** obtienes las particiones. El planteamiento mínimo para una partición, como para el caso 7, es:

XRANGO=7
XT=1..7
SUMA=7
CRECIENTE

Si la usas, no tengas prisa, **que tarda**. Resultan 15 particiones:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
7						
1	6					
2	5					
3	4					
1	1	5				
1	2	4				
1	3	3				
2	2	3				
1	1	1	4			
1	1	2	3			
1	2	2	2			
1	1	1	1	3		
1	1	1	2	2		
1	1	1	1	1	2	
1	1	1	1	1	1	1

Puedes comprobarlo en la página de WolframAlpha, que además te ofrece los diagramas de Ferrer



El lenguaje PARI también te puede servir para comprobar:

O bien consigues el desarrollo

```
? print(partitions(7))
[Vecsmall([7]), Vecsmall([1, 6]), Vecsmall([2, 5]), Vecsmall([3, 4]), Vecsmall([
1, 1, 5]), Vecsmall([1, 2, 4]), Vecsmall([1, 3, 3]), Vecsmall([2, 2, 3]), Vecsma
ll([1, 1, 1, 4]), Vecsmall([1, 1, 2, 3]), Vecsmall([1, 2, 2, 2]), Vecsmall([1, 1
, 1, 1, 3]), Vecsmall([1, 1, 1, 2, 2]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 1, 2]), Vecsmall([
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])]
```

O bien el número. Estudia el planteamiento de la primera línea:

```
? print(#partitions(7))
15
?
```

Llegados a este punto, la pregunta es obvia, y es que para qué usar Cartesius si disponemos de estas herramientas. La respuesta está en los condicionamientos.

Particiones sobre números de un tipo determinado

Imagina que deseamos saber cuántas formas existen de expresar el número 12 como suma de primos. En este caso deberemos exigir que todos los sumandos en Cartesius sean de ese tipo. Sabemos que los primos inferiores a 12 son: 2, 3, 5, 7 y 11. Cinco en total. Aprovechamos que en Cartesius los sumandos se pueden definir mediante conjuntos (valores separados por comas, sin espacios), lo que facilita las cosas:

XRANGO=5
XT=2,3,5,7,11
SUMA=12
CRECIENTE

Declaramos un rango de sumas del 1 al 5, explicitamos cuáles son los sumandos y exigimos que la suma sea igual a 12. Resultan 6 posibilidades:

X1	X2	X3	X4	X5
5	7			
2	3	7		
2	5	5		
2	2	3	5	
3	3	3	3	
2	2	2	3	3

En este caso conocemos los sumandos, pero en otros no merece la pena buscarlos. Por ejemplo, deseamos conocer las particiones del número 1001 en suma de primos comprendidos entre 300 y 350. No esperamos más ni menos de tres sumandos, luego el planteamiento adecuado sería:

XTOTAL=3
XT=300..350
XT=FILTRO(PRIMO)
SUMA=1001
CRECIENTE

Esto es ya algo más complicado: XTOTAL=3 obliga a que sean tres sumandos, XT=300..350 establece el rango de los sumandos, y XT=FILTRO(PRIMO) indica que se seleccionan los sumandos primos, que en este caso son los de la imagen:

X1	X2	X3
307	307	307
311	311	311
313	313	313
317	317	317
331	331	331
337	337	337
347	347	347
349	349	349

Obtendríamos dos sumas posibles:

X1	X2	X3
307	347	347
317	337	347

Este ejemplo justifica el uso de Cartesius. Disponemos de los filtros PRIMO, PAR, IMPAR, CUADRADO, FIBONACCI y TRIANGULAR. En próximas versiones se podrían añadir más. Consulta las Instrucciones de Cartesius para más detalles. Puedes obtenerla en

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/cartesius.pdf

Otro ejemplo

Sabemos que todo número entero se descompone en suma de a lo sumo tres números triangulares, pero ¿de cuántas formas? Por ejemplo, el número 30. Planteamos:

XRANGO=3
XT=1..30
XT=FILTRO(TRIANGULAR)
SUMA=30
CRECIENTE

Y se obtiene

X1	X2	X3
15	15	
1	1	28
3	6	21
10	10	10

Existe otro teorema similar que afirma que todo número se puede descomponer en a lo sumo cuatro cuadrados. Bastaría para comprobarlo cambiar XRANGO a 4 y efectuar un filtro de cuadrados. Lo probamos con el número 100:

XTOTAL=4
XT=1..100
XT=FILTRO(CUADRADO)
SUMA=100
CRECIENTE

Resultan cinco posibilidades (salvo el orden):

X1	X2	X3	X4
1	1	49	49
1	9	9	81
1	25	25	49
4	16	16	64
25	25	25	25

Es curioso que todos tienen sumandos repetidos.