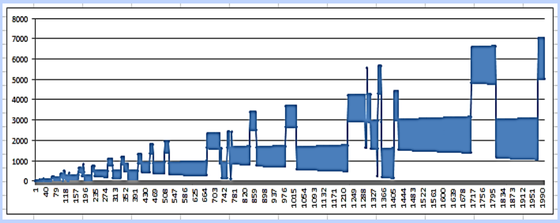
Números y hoja de cálculo VIII



Curso 2015-16

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

El octavo volumen de resúmenes del blog “Números y hoja de cálculo”, correspondiente a la temporada 2015-16, contiene una cantidad de material superior a los anteriores. La causa es la inclusión de nuestros números *arolmar*, que no tienen gran interés teórico, pero que nos han servido para practicar el descubrimiento de propiedades, como la de los semiprimos enlazados.

El resto de temas presenta una distribución similar a la de publicaciones anteriores: predominio de las cuestiones de divisibilidad y números primos junto a otras cuestiones de Combinatoria, números poligonales y comprobación de conjeturas. A lo largo de los años se han convertido en los fundamentos del blog.

Una agradable novedad han sido las sucesiones curiosas, que si tampoco tiene gran interés teórico, amenizan cuestiones matemáticas y resultan entretenidas. Intentaremos incluir alguna más en sucesivas entradas del blog.

CONTENIDO

GRUPOS DE POTENCIAS EN ZN

ÍNDICE O GAUSSIANO DE UN RESTO EN ZN

Iniciamos hoy el desarrollo de toda una teoría perteneciente a la Aritmética Modular, la de las raíces primitivas y temas afines.

Teoría previa

Resumimos brevemente la teoría previa que es conveniente conocer antes de seguir esta serie de temas:

Comenzamos con la estructura $\mathbf{Z_m}$ formada por los restos posibles al dividir un número entre m. Ya sabes que este conjunto es la base de la Aritmética Modular (o del reloj)

Puedes repasar las páginas

http://es.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_modular

http://hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.htm http://mathworld.wolfram.com/ModularArithmetic.html

Este conjunto $\mathbf{Z_m}$ con la suma y la multiplicación forma un **anillo cíclico de m elementos**. Por esta estructura cíclica se pensó en llamarles ***anillos*** por primera vez. Es un anillo con unidad, por lo que puede contener elementos inversibles. De ellos trataremos aquí.

Un elemento A de Z_m es inversible si existe otro elemento X de Z_m tal que $A*X\equiv1 \pmod{m}$. Esta ecuación se sabe que tiene solución única siempre que A sea primo con el modulo m. **Luego los restos primos con m son inversibles**.

Por el contrario, si **A** y **m** tienen un divisor común, para que la ecuación tuviese solución debería ser divisor también de 1, lo que es imposible. **Si el elemento A tiene divisores comunes con m, entonces A no es inversible**.

Llamamos **divisor de cero** en un anillo a aquel elemento A que multiplicado por cierto elemento no nulo C del anillo, da un producto nulo: A*C=0. Si que A tiene factores comunes con m, **es un divisor de cero**, porque si D=MCD(A,m), tendremos que A=A'*D y m=m'*D. Multiplicando A por m' (que es no nulo) resulta Am'=A'D*m/D=A'm, que es congruente con cero, luego $A*m'\equiv0 \pmod{m}$ y por tanto divisor de cero.

Los divisores de cero no son inversibles, porque si A fuera inversible y divisor de cero, se daría una igualdad del tipo A*C=0 con C distinto de cero, pero multiplicando por el inverso resultaría: $A^{-1}*A*C=C=A^{-1}*0$ lo que daría C=0 en contra de lo supuesto.

Así que:

- **Si el elemento A es primo con el módulo m, entonces es inversible**, es decir, que existe algún otro elemento B tal que A*B=B*A=1. Anteriormente vimos cómo encontrarlo mediante el algoritmo extendido de Euclides

  (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/06/la-herencia-de-euclides-1-el-algoritmo.html).

- **Si el elemento A no es primo con m, es un divisor de cero, y por tanto no inversible**.

Grupo de inversibles

El producto de dos inversibles A y B también lo es, y su inverso es $B^{-1}*A^{-1}$, ya que

$(B^{-1}*A^{-1})*A*B=B^{-1}*(A^{-1}*A)*B=B^{-1}*1*B=1$

Como el 1 es inversible trivialmente y el inverso también, tenemos que **los inversibles forman grupo**

abeliano para la multiplicación**, llamado grupo de las unidades Z^*_m**

Como es conocido, la función indicatriz de Euler cuenta los números menores que m y primos con él, por tanto, **el cardinal del grupo Z^*_m coincide con la indicatriz o función φ(x) de Euler**.

Se cumple el llamado Teorema de Euler

$$\mathbf{a}^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

para todo **a** primo con m o *unidad*.

Orden multiplicativo, índice o gaussiano de un elemento

Dado un elemento inversible **a**, llamaremos ***orden*** de ese elemento al mínimo número entero tal que $\mathbf{a^r \equiv 1}$. Según el teorema anterior, ese valor existe y puede ser φ(m) y todos sus múltiplos. Si es menor, ha de ser un divisor suyo. En efecto, supongamos que φ(m) no fuera múltiplo del orden r. Entonces efectuando la división entera entre ambos quedaría $\varphi(m)=qr+s$, con $s<r$. Aplicamos esa potencia al elemento **a** y obtendríamos

$1 \equiv a^{\varphi(m)} \equiv a^{qr+s} \equiv a^{qr} * a^s \equiv a^s$, luego $a^s \equiv 1$ en contra del carácter mínimo de r.

Así que el orden ha de ser un divisor de la función **φ(m)**. Toda potencia que sea igual a 1 tendrá un exponente múltiplo de ese orden. Hay muchas formas de representar el orden o gaussiano. Aquí por comodidad tipográfica representaremos el gaussiano de N respecto al módulo M como G(N,M)

Podíamos habernos ahorrado el razonamiento anterior recordando el Teorema de Lagrange para grupos, que afirma que el orden de un subgrupo H es divisor del orden del grupo G. En este caso este último es **φ(m)** y como las potencias de **a** forman un grupo monógeno, su orden será divisor de **φ(m)**.

Vemos algunos ejemplos:

Orden de 5 módulo 8: Como 5 es primo con 8 y φ(8)=4, el orden podrá ser 2 o 4: 5^2=25≡1(8, luego el orden de 5 con módulo 8 es 2, o G(5,8)=2

Orden del 3 respecto al 7: φ(7)=6, luego el orden podrá ser 2, 3 o 6. Probamos: 3^2=9≡2(7, 3^3=27≡6(7, 3^6=729≡1 (7luego el orden o gaussiano de 3 es 6, G(3,7)=6

Estudio con hoja de cálculo

Deseamos desarrollar este tema con calma. Así que nos pararemos un poco, con la ayuda de la hoja de cálculo alojada en

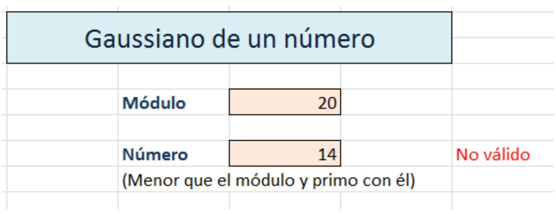
http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm#gaussiano

Distinguiremos, en principio, tres niveles de complejidad en el descubrimiento del gaussiano de un número.

NIVEL 1

La hoja funciona sólo con las fórmulas de celdas, sin macros. Para ello basta escribir el número N y el módulo M, y calcular en columna las potencias de N en el **grupo de las unidades Z^*_m**. En la hoja hemos incluido el cálculo del MCD(N,M), que ha de ser 1 y, en caso contrario, se avisa del error.

En la imagen hemos escrito dos números no primos entre sí y la hoja nos avisa:



Simultáneamente, en las columnas del NIVEL 1, se construyen las potencias para ver cuál de ellas es igual a 1, con lo que obtendremos el gaussiano de N. A continuación reproducimos el cálculo correspondiente a 5 módulo 13:

	NIVEL 1	
	Potencias sin analizar	
	Exponente	Resto
5	1	5
	2	12
	3	8
	4	1
	5	5
	6	12
	7	8
	8	1
	9	5
	10	12
	11	8
	12	1

A simple vista se descubre que el gaussiano de 5 módulo 13 es 4, porque es el mínimo exponente al que hay que elevar 5 para obtener resto 1 módulo 13.

Si te interesa cómo se construyen estas columnas, revisa la hoja, y estudia especialmente las fórmulas de las potencias, que son del tipo

=SI(C15<=G5;RESIDUO(B13*D14;G5);" ").

Podemos interpretarlas como "si el exponente no llega al módulo, multiplicamos la anterior potencia por N y calculamos el residuo"

De esta forma puedes descubrir el gaussiano por simple recorrido columna abajo hasta encontrar el primer 1. Como verás en próximos apartados, las potencias resultantes son periódicas, y su periodo es el orden del número, en este caso, 4.

NIVEL 2

Podemos simplificar las columnas si sólo probamos con los divisores de **φ(m)**. Esto ya requiere un poco de programación, ya que la hoja no puede encontrar los datos sólo con celdas y fórmulas. Hemos creado una subrutina y un botón para descubrir el gaussiano con menos pasos. Si te interesa la programación puedes investigar en el código Visual Basic. Lo que hace es calcular la indicatriz φ(m) y recorrer sus divisores para encontrar el exponente que se convierte en gaussiano.

En la imagen están contenidas las columnas correspondientes a 7 módulo 29:

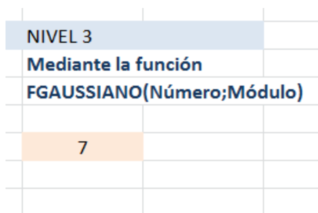
Módulo	29	
Número	7	Número válido
(Menor que el módulo y primo con él)		
NIVEL 2		
Potencias con divisores de la indicatriz		Pulsa el botón
1	7	
2	20	Iniciar
4	23	
7	1	
14	1	
28	1	

La indicatriz de 29 es 28, porque es primo. En la hoja se recorren los divisores de 28, lo que simplifica el esquema. Vemos que el primer 1 aparece en el exponente 7, luego ese será el gaussiano de 7.

NIVEL 3

Es muy útil para nuestros estudios posteriores disponer del gaussiano en forma de función que tenga como parámetros un número y un módulo y nos devuelva el orden de ese número (o cero si no es primo con el módulo)

En la parte derecha de la hoja hemos utilizado esa función para encontrar rápidamente el gaussiano de un número, en el caso de la imagen, de 7 módulo 29.



Su sintaxis es FGAUSSIANO(NÚMERO;MÓDULO), en el ejemplo, FGAUSSIANO(7;29)

Está implementado para números pequeños. Para otros mayores sería preferible usar la descomposición factorial. La versión que insertamos a continuación no es demasiado eficiente, pero es sencilla de entender. Quizás no puedas reproducirla, por carecer de algunas funciones, pero lo importante es que entiendas su estructura.

Public Function fgaussiano(n, m)
Dim f, i, p, e
f = 0 ‘se comienza declarando nula la función, por si no son coprimos
If mcd(n, m) = 1 Then ‘son coprimos
p = n ‘inicio de las potencias del número
i = 1 ‘contador
e = euler(m) ‘encontramos la phi de Euler
While i <= e And f = 0 ‘nos detenemos cuando encontremos potencia 1
p = p Mod m ‘encontramos el residuo de la potencia
If p = 1 Then f = i ‘se encontró el orden f
p = p * n ‘siguiente potencia
i = i + 1
Wend
End If
fgaussiano = f ‘se recoge el valor de f
End Function

Gaussiano de las potencias de un resto

Supongamos que un resto a tiene como gaussiano t, es decir g(a)=t. Es fácil demostrar que el gaussiano de una potencia de a, sea por ejemplo a^k, equivale a

$$g(a^k) = \frac{t}{MCD(k,t)}$$

Por ejemplo, G(4,29)=14 y si elevamos el 4 a la sexta se tendrá G(4^6,29)=14/MCD(6,14)=14/2=7

Se puede razonar así: t divide a MCM(k,t), luego se cumplirá que $a^{MCM(k,t)} \equiv 1$, por ser t el menor exponente con esa propiedad. Efectuamos unos cambios en la expresión:

$a^{MCM(k,t)} = (a^k)^{MCM(k,t)/k} = (a^k)^{t/MCD(k,t)} \equiv 1$, luego t/MCD(k,t) puede ser el gaussiano de a^k. Sólo falta demostrar que es el más pequeño con esa propiedad. En efecto, si $(a^k)^m \equiv 1$, será $a^{km} \equiv 1$, con lo que km será múltiplo de t, pero como también es múltiplo de k, lo será del MCM(k,t), luego m>= MCM(k,t)/k=t/MCD(k,t), luego esta expresión t/MCD(k,t) es la menor con esta propiedad, lo que la convierte en el gaussiano de a^k.

En esta tabla tienes un ejemplo de lo demostrado. El resto 4 tiene un gaussiano igual a 14 respecto al módulo 29, luego el gaussiano de sus potencias será un divisor de 14, precisamente el MCD de 14 y el exponente. Estúdialo bien:

Exponente K	Potencia	Gaussiano	MCD(K,14)
1	4	14	1
2	16	7	2
3	6	14	1
4	24	7	2
5	9	14	1
6	7	7	2
7	28	2	7
8	25	7	2
9	13	14	1
10	23	7	2
11	5	14	1
12	20	7	2
13	22	14	1

Observamos 6 potencias con el mismo gaussiano 14, que se corresponden con los exponentes primos con 14, que son 6, porque **φ(14)**=6

Otras seis potencias tienen gaussiano igual a 7. Se trata de los números pares, en los que MCD(2N,14)=2, y por la fórmula anterior su gaussiano será 14/2=7

Por último, la potencia de exponente 7 presenta un gaussiano igual a 14/7=2.

Hemos descubierto que en el grupo monógeno engendrado por las potencias de un elemento de Zm no tienen que poseer el mismo valor del gaussiano, pero eso era de esperar, porque ocurre lo mismo en todo el grupo Zm.

SUBGRUPOS CÍCLICOS EN Z_M*

Según el tema anterior, todo elemento **a** perteneciente a Z_m* (conjunto de inversibles del grupo multiplicativo Z_m) posee un ***orden g(a)***, que es el mínimo número entero tal que $\mathbf{a^r \equiv 1}$. Ese orden siempre es divisor de la indicatriz de Euler de m, φ(m), o igual a ella.

$$a^{g(a)} \equiv 1 \ (mod\ m$$

Sabemos que las potencias de un mismo elemento **a** forman siempre un grupo cíclico **< a >**. En el caso de un elemento de Z_m* estos grupos tendrán el mismo orden que el elemento que los genera, es decir g(a). En efecto, las potencias a^0, a^1, a^2,…$a^{g(a)-1}$ son todas distintas (si dos fueran iguales, al dividirlas resultaría una potencia del elemento igual a la unidad con exponente menor que g(a), en contra de la definición de g(a)). Sus productos pertenecen al conjunto, ya que si sobrepasan $a^{g(a)}$, al ser este la unidad, se puede eliminar de dicho producto.

Por ejemplo, con módulo 13, el orden o gaussiano de 5 es 4, luego $5^0 \equiv 1$ (mod 13, $5^1 \equiv 5$ (mod 13, $5^2 \equiv 12 \equiv -1$ (mod 13 y $5^3 \equiv 8 \equiv -5$ (mod 13 formarán un subgrupo de Z_{13}. Lo podemos representar así: < 5 > = {1, 5, -1, -5}

Así que el concepto de orden de un elemento coincide aquí con el de orden del grupo cíclico que engendra. Este grupo es el más pequeño que contiene ese elemento. Según la teoría general de grupos cíclicos, será abeliano (conmutativo) y ***único***, para un valor dado del orden.

Según los párrafos anteriores, en un subgrupo de potencias de un elemento de gaussiano g, existen φ(g) elementos con el mismo gaussiano, pero como hemos señalado que este grupo es único para ese valor de g, podremos afirmar:

El conjunto de elementos pertenecientes a Z_m* con un gaussiano concreto g tiene un cardinal de φ(g).

Si volvemos al ejemplo concreto del módulo 29 que vimos más arriba, esta sería la descomposición de los elementos de Z_{29} según su gaussiano. Cada uno de los elementos engendrará un subgrupo de orden idéntico a su gaussiano, y todos los que compartan el mismo valor g de ese gaussiano formarán un subconjunto de φ(g) elementos:

Gaussiano	Conjunto con el mismo gaussiano			Función de Euler	
28	2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19,26, 27			ϕ(28)=12	
14	4, 5, 6, 9, 13,22			ϕ(14)=6	
7	7, 16, 20, 23, 24, 25			ϕ(7)=6	
4	12, 17			ϕ(4)=2	
2	28			ϕ(2)=1	
1	1			ϕ(1)=1	
			Suma	28	

Esta tabla es muy útil para repasar lo que hemos explicado hasta ahora:

29 es primo, luego Z^*_{29} contendrá 28 elementos inversibles, y poseerán como gaussiano uno de los divisores de 28: 28, 14, 7, 4, 2 y 1. Según lo explicado, cada conjunto de elementos con el mismo gaussiano k tendrá un cardinal de φ(k). En la tabla vemos que aparecen 12 elementos con gaussiano 28, y φ(28)=12. Luego, tenemos 6 con gaussiano 14 y otros 6 con el valor 7. Finalmente, otros cuatro presentan los gaussianos 4, 2 y 1. Si los sumamos todos, obtenemos 28= φ(29), que es el cardinal de Z^*_{29}.

Con esta tabla hemos comprobado la expresión de 28 en suma de φ(28)+φ(14)+φ(7)+φ(4)+ φ(2)+φ(1), que es un caso de la fórmula general:

$$n = \sum_{d \vdots n} \varphi(d)$$

Un número entero coincide con la suma de las indicatrices de sus divisores.

Periodicidad de las potencias

Si en lugar de considerar sólo las potencias de exponente menor que g(a) las estudiamos todas, es evidente que son periódicas, pues $a^{k+tg(a)}=a^k*a^{tg(a)}=a^k*1=a^k$

Exponente	Resto
1	5
2	25
3	13
4	9
5	17
6	1
7	5
8	25
9	13
10	9
11	17
12	1
13	5
14	25
15	13
16	9
17	17
18	1

De paso hemos demostrado que el periodo de las potencias de a es precisamente g(a). Lo puedes comprobar con la hoja de cálculo que presentamos en anteriores párrafos.

En la tabla figuran las potencias de 5 respecto al módulo 28. El orden de Z_{28}* es 12 (φ(28)), el orden del 5 respecto a 28 es 6 (divisor de 12), y se produce, como puedes comprobar, una periodicidad de periodo 6.

Además, los integrantes de cada ciclo son los elementos del grupo engendrado por el elemento 5: {5, 25, 13, 9, 17, 1} En el anterior apartado descubrimos que cada elemento de este tipo de grupos tiene un gaussiano diferente, como puedes ver en la siguiente tabla:

Exponente K	Potencia	Gaussiano
1	5	6
2	25	3
3	13	2
4	9	3
5	17	6
6	1	1

Todos los gaussianos son divisores de 12 (φ(28)).

Subgrupos generados

Ha quedado claro que las potencias de un elemento no tienen que compartir el mismo gaussiano, luego los subgrupos que vamos a recorrer ahora no tienen por qué coincidir con los conjuntos estudiados más arriba. Lo que sí queda claro es que, dentro del subgrupo engendrado por un elemento, pueden aparecer subgrupos formados a partir de una potencia con un gaussiano menor.

Hemos preparado nuestra hoja GAUSSIANO para que dado un resto en Z^*_n encuentre el subgrupo que engendra mediante sus potencias. Más adelante estudiaremos los elementos que engendran todo Z^*_n, pero ahora los repasaremos todos. Para entenderlo mejor, estudia esta primera tabla que hemos creado, con módulo 13 y resto 11:

Subgrupo de potencias

Exponente	*G0*	*Gaussiano*	*Subgrupos*					
1	11	12						
2	4	6	4	3	12	9	10	1
3	5	4	5	12	8	1		
4	3	3	3	9	1			
5	7	12						
6	12	2	12	1				
7	2	12						
8	9	3	9	3	1			
9	8	4	8	12	5	1		
10	10	6	10	9	12	3	4	1
11	6	12						
12	1	1	1					

En la primera columna figuran las potencias de 11, que como su gaussiano es 12, posee ese número de elementos. Este es G0, el subgrupo creado por las potencias de 11 en Z^*_{13}. Tal como vimos anteriormente, los elementos de ese grupo no han de tener gaussiano 12. De hecho aparecen todos los divisores de 12: 6, 4, 3, 2 y 1. También vimos que las potencias de cada uno de ellos forman subgrupos del principal. Según la teoría de grupos, estos son únicos para cada orden, aunque se engendren con elementos distintos. Compruébalo:

- G6: Grupo de orden 6: {4, 3, 12, 9, 10, 1} Engendrado en la tabla por 4 y 10.
- G4: Grupo de orden 4: {5, 12, 8, 1} con generadores 5 y 8
- G3: Grupo de orden 3: {3, 9, 1} engendrado por 3 y 9.
- G2: Grupo de orden 2: {12, 1} con generador 12.
- GE: Grupo trivial: {1}

Obsérvese que el número de generadores de cada subgrupo coincide con el valor de su indicatriz de Euler. Así tenemos $\varphi(6)= \varphi(4)=\varphi(3)=2$ y por eso los primeros subgrupos poseen dos generadores. Sin embargo, como $\varphi(2)=1$, el penúltimo tiene un solo generador.

Como son grupos de potencias, se cumple que si el gaussiano de **a** es divisor del de **b**, el grupo engendrado por **a** es subgrupo del engendrado por **b**.

Todas las potencias de 11 pertenecen a un grupo, y algunas a varios.

Para construir estas tablas, busca en Gaussiano.xlsm la hoja “Subgrupo engendrado” y rellena tan sólo el módulo y el elemento dado. El resto lo construye la hoja. Aquí tienes otro ejemplo, con módulo 15 y elemento 7:

			Subgrupos engendrados con potencias						
				Módulo	14		Su gaussiano es		6
				Número	5		Número válido		
				(Menor que el módulo y primo con él)					
Subgrupo de potencias									
Exponente	*G0*	*Gaussiano*	*Subgrupos*						
1	5	6							
2	11	3	11	9	1				
3	13	2	13	1					
4	9	3	9	11	1				
5	3	6							
6	1	1	1						

Indicador de un elemento

Dado cualquiera de los subgrupos que estamos estudiando, cualquier elemento de Z^*_n posee una potencia perteneciente a cada uno de ellos. En efecto, dado un subgrupo S, si un elemento **a** pertenece a él, bastará elevarlo a 1. Si no pertenece, lo elevamos a **n** para engendrar la unidad, pero hay casos en los que existen otros enteros positivos k<n tales que a^k pertenece a S. Al menor de ellos le llamaremos *indicador de **a*** con respecto a S. Hemos visto que puede valer **1** o **n**. Observa la tabla anterior: el indicador de 5 respecto al subgrupo {11, 9, 1} es 2, porque 5^2=11 es la potencia positiva más pequeña que pertenece al

subgrupo. Igualmente, el 3 es el indicador respecto a {13, 1}

RAÍCES PRIMITIVAS

En los apartados anteriores estudiamos el grupo multiplicativo Z^*_n de las unidades en Z_n (números coprimos con **n**). Su orden coincide con φ(n). Cualquier elemento **a** de ese grupo engendrará a su vez un subgrupo cíclico **< a >** mediante sus potencias. Por el Teorema de Lagrange, el orden de ese subgrupo será un divisor de φ(n) y recibe el nombre de gaussiano g de ese elemento. Recordemos que esto implica que $\mathbf{a^g \equiv 1}$ **(mod n**. También vimos que el número de generadores de < a > coincide con φ(g).

En este apartado estudiaremos **las raíces primitivas**, que son aquellos elementos que engendran todo Z^*_n, o lo que es equivalente, aquellos cuyo gaussiano coincide con **φ(n)**. Según lo que hemos recordado, el número de esas raíces primitivas puede coincidir con φ(φ(n)), y de hecho es así **si Z^*_n es cíclico**. Usamos la palabra "puede" pues, como ya veremos, **no todos los módulos poseen raíces primitivas**.

En la tercera hoja de nuestra herramienta Gaussiano.xlsm http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm#gaussiano

podemos descubrir el valor del gaussiano de todos los elementos de Z^*_n e identificar las raíces primitivas como aquellas cuyo gaussiano sea igual a φ(n). Aquí tienes la tabla correspondiente al módulo 14

Módulo	14
Indicatriz	6
Núm. Posible de raíces	2

Inversibles	Gaussiano	Es raíz primitiva
1	1	
3	6	Raíz primitiva
5	6	Raíz primitiva
9	3	
11	3	
13	2	

Explicamos la tabla: El módulo es 14, luego existirán tantos inversibles como indique φ(14)=6. En efecto, Z^*_{14} = {1, 3, 5, 9, 11, 13}, conjunto de 6 elementos, como puedes comprobar en la tabla. Ahora bien, las raíces primitivas son generadores de todo Z^*_{14}, y su número ha de ser φ(φ(14)) = φ(6) = 2.

Esto es así porque si una raíz primitiva se eleva a un exponente primo con φ(m), resulta otra raíz primitiva, en virtud de la fórmula que estudiamos anteriormente

$$g(a^k) = \frac{t}{MCD(k,t)}$$

En efecto, aparecen las dos raíces primitivas 3 y 5. Recorre sus potencias y comprobarás que engendran todo el grupo: $3^0 \equiv 1$, $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 13$, $3^4 \equiv 11$ y $3^5 \equiv 5$. Igualmente, $5^0 \equiv 1$, $5^1 \equiv 5$, $5^2 \equiv 11$, $5^3 \equiv 13$, $5^4 \equiv 9$ y $5^5 \equiv 3$.

Es fácil comprender entonces que si Z^*_k admite raíces primitivas tendrá carácter de cíclico, ya que está generado por las potencias de un mismo elemento. Según esto, en virtud de una propiedad general de estos grupos, Z^*_k estaría engendrado por cualquier potencia de una raíz primitiva cuyo exponente fuera coprimo con φ(k), ya que, en caso contrario engendraría sólo un subgrupo propio de Z^*_k. Todas esas potencias serían también raíces primitivas, luego su número será φ(φ(k)), como ya comprobamos más arriba. Observa esta tabla y comprueba que todas las raíces primitivas tienen exponentes coprimos con la indicatriz:

Módulo	19	
Indicatriz	18	
Núm. Posible de raíces	6	
Potencias de 2		Gaussiano
1	2	18
2	4	9
3	8	6
4	16	9
5	13	18
6	7	3
7	14	18
8	9	9
9	18	2
10	17	9
11	15	18
12	11	3
13	3	18
14	6	9
15	12	6
16	5	9
17	10	18
18	1	1

El módulo es 19, su indicatriz 18, 2 es una raíz primitiva, con gaussiano 18, y observa hacia abajo que las demás raíces primitivas son potencias del 2 con exponentes coprimos con 18: {1, 5, 7, 11, 13, 17}, seis en total.

Otros módulos no tienen raíces primitivas, como el 30:

Módulo	30
Indicatriz	8
Núm. Posible de raíces	4

Inversibles	Gaussiano	Es raíz primitiva
1	1	
7	4	
11	2	
13	4	
17	4	
19	2	
23	4	
29	2	

Vemos en la tabla que ningún elemento presenta gaussiano máximo 8 (φ(30)=8), luego con módulo 30 no existen raíces primitivas. Se puede demostrar (no es simple, es un conjunto de teoremas que puedes consultar en los textos especializados) que sólo poseen raíces primitivas **los módulos 2, 4, p^k y $2p^k$, siendo p primo impar y k>=1**. El 30=2*3*5 no es de ninguno de estos cuatro tipos, y carece de raíces primitivas. El 14 es del tipo **$2p^k$** y sí tiene raíces primitivas.

Para ayudarte a entender y practicar con esta situación hemos añadido dos rutinas a nuestra hoja Gaussiano.xlsm. Una encuentra la menor raíz primitiva de un módulo **m**, y te avisa si no existe tal raíz. Se basa en una búsqueda sistemática desde 1 hasta m-1. Este es su código:

Public Function minraiz(m) As Variant
Dim o, g, j, mr

mr = 0: o = sacaprimos(m): g = euler(m) ‘encuentra la indicatriz y los factores primos
If m = 2 Or m = 4 Or (o = 1 And primo(1) <> 2) Or (o = 2 And primo(1) = 2 And expo(1) = 1 And primo(2) <> 2) Then
j = 1 ‘esta parte actúa si el módulo posee la factorización adecuada
While j < m And mr = 0
If fgaussiano(j, m) = g Then mr = j ‘búsqueda de la primera raíz primitiva
j = j + 1
Wend
minraiz = mr
Else
minraiz = "No tiene raíces primitivas" ‘caso en el que el módulo no tiene raíces primitivas
End If
End Function

No tienes que usar ningún botón, porque el resultado aparece automáticamente.

Por ejemplo, con módulo 40=2^3*5 nos devuelve el resultado

Cálculo directo de la raíz primitiva mínima	
Módulo	40
Raíz mínima	No tiene raíces primitivas

40 no pertenece a ninguno de los cuatros tipos de números que poseen raíces primitivas. Sin embargo, con el 98 nos resulta:

Cálculo directo de la raíz primitiva mínima	
Módulo	98
Raíz mínima	3

Este resultado coincide con el obtenido mediante el botón "Inicio":

Inversibles	Gaussiano	Es raíz primitiva
1	1	
3	42	Raíz primitiva
5	42	Raíz primitiva
9	21	
11	21	
13	14	
15	7	
17	42	Raíz primitiva
19	6	

Este módulo de hoja de cálculo no te añade ningún aprendizaje nuevo, pero te lo facilita. El siguiente sí es más conceptual.

Criterio de los factores de la indicatriz

Si buscamos la indicatriz del módulo, φ(m), y la descomponemos en factores primos, sean estos p_1, p_2,

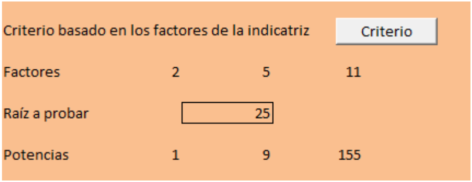
p_3,…(escritos sin exponentes), un resto **a** será raíz primitiva si se cumple

$$a^{\varphi(m)/p_i} \equiv r, con\, r \neq 1\ \forall i$$

Si todas las potencias presentan restos distintos de 1, **a** será raíz primitiva, y si por el contrario, alguna de las potencias es congruente con 1, ese resto **a** no será raíz primitiva. La justificación no es muy complicada:

Si una de las potencias es congruente con 1, el gaussiano de a sería menor que φ(m), y no podría ser raíz primitiva. Por el contrario, si ninguna es congruente con 1, sí ha de serlo, ya que, en caso contrario, existiría un divisor propio de φ(m), sea **g**, que sería el gaussiano de a y $a^g \equiv 1$. Además, como los cocientes $\varphi(m)/p_i$ son los divisores maximales de φ(m), uno al menos de ellos sería múltiplo o igual al gaussiano, con lo que la potencia $a^{\varphi(m)/pi} \equiv 1$ en contra de lo supuesto.

El siguiente módulo es una simple curiosidad y comprobación de lo anterior.



Criterio basado en los factores de la indicatriz				Criterio
Factores	2	5	11	
Raíz a probar		25		
Potencias	1	9	155	

La anterior imagen se corresponde con el módulo 242, cuya indicatriz, 110, posee los factores primos 2, 5 y 11.

Hemos aplicado el criterio al resto 25, y vemos que no es raíz primitiva, porque la primera potencia $25^{110/2}$ es congruente con 1. Efectivamente, su gaussiano es casualmente ese: 110/2=55.

El siguiente ejemplo es el criterio aplicado al resto 5 respecto al módulo 37

Criterio basado en los factores de la indicatriz			Criterio
Factores	2	3	
Raíz a probar	5		
Potencias	36	10	

La indicatriz de 37 es 36, con factores 2 y 3. La aplicación del criterio nos da dos potencias congruentes con 36 y 10 respectivamente, luego 5 es una raíz primitiva.

ÍNDICES MODULARES

En el apartado anterior estudiamos las raíces primitivas, elementos del grupo multiplicativo Z^*_n de las unidades en Z_n (números coprimos con **n**), tales que su gaussiano es máximo y coincidente con φ(n). Estas raíces, mediante sus potencias, engendran todo Z^*_n, luego un elemento inversible cualquiera coincidirá con una potencia de la raíz primitiva. El exponente comprendido entre 0 y φ(n)-1 que logra esta coincidencia recibe el nombre de **índice del elemento**

respecto a la raíz primitiva. También es llamado **logaritmo discreto**.

Es decir; si **a** es una raíz primitiva y **b** un elemento inversible, existe un exponente k en el intervalo (0, φ(n)-1) tal que $\mathbf{a^k \equiv b}$, y a ese exponente le llamaremos índice de **b** respecto a **a**.

Por ejemplo, el módulo 7 posee dos raíces primitivas. La raíz 3 engendra mediante potencias todos los elementos desde 1 a 6 (por ser 7 primo son todos inversibles), $3^0\equiv1$, $3^1\equiv3$, $3^2\equiv2$, $3^3\equiv6$,$3^4\equiv4$, $3^5\equiv5$. Cada uno de los exponents es el índice de ese elemento.

La función índice que asigna a cada elemento inversible el exponente de la menor potencia de la raíz primitiva que lo engendra la podemos representar por $ind_a(b)$ o simplemente ind(b) si se conoce la raíz. También podemos representarlo como un logaritmo, que en este caso recibe el nombre de *logaritmo discreto*. En el ejemplo anterior $ind_3(6)=3$, $ind_3(4)=4$,…Si existe una raíz primitiva, todos los elementos inversibles de Z_m tendrán definido el índice.

Al ser un exponente, las propiedades del índice o logaritmo discreto son previsibles (supongamos módulo m):

- $Ind_a(1)=0$
- $Ind_a(a)=1$
- $Ind(a*b)=ind(a)+ind(b)$
- $Ind(a^k)=k*ind(a)$
- $Ind_a(x)=ind_a(b)*ind_b(x)$ (fórmula del cambio de base)
- $Ind_a(x^{-1})= \varphi(m)-Ind_a(x)$

El cálculo de los índices en grupos complejos no es fácil, aunque se han creado muchos algoritmos eficientes, y por eso los índices son usados en algunos sistemas criptográficos.

Aquí nos limitaremos, como siempre, a casos sencillos con los que aprender los conceptos. Hemos creado en nuestra hoja Gaussiano.xlsm

http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm#gaussiano

un confeccionador automático de tablas de índices para un módulo dado. Sólo tienes que escribir dicho módulo, y pulsar un botón para que aparezca la tabla, si es que existen raíces primitivas. Aquí tienes la del módulo 54:

Módulo 54 Tabla

	Raíces primitivas					
Inversibles	**5**	**11**	**23**	**29**	**41**	**47**
1	18	18	18	18	18	18
5	1	17	7	5	13	11
7	14	4	8	16	2	10
11	17	1	11	13	5	7
13	16	2	4	8	10	14
17	3	15	3	15	3	15
19	6	12	6	12	6	12
23	13	5	1	11	7	17
25	2	16	14	10	8	4
29	11	7	5	1	17	13
31	4	14	10	2	16	8
35	15	3	15	3	15	3
37	12	6	12	6	12	6
41	7	11	13	17	1	5
43	8	10	2	4	14	16
47	5	13	17	7	11	1
49	10	8	16	14	4	2
53	9	9	9	9	9	9

En columna aparecen los elementos inversibles de Z_{54}, que hay 18, porque φ(54)=18. En la fila superior tenemos las raíces primitivas, que por ser 54 de la forma $2p^k$ ($2*3^3$), existen con seguridad, y son 6, ya que φ(φ(54))=6. Con ella podemos encontrar el índice de cualquier inversible. Por ejemplo, el índice de 37 respecto a 23 es 12, lo que indica que 23^{12}=37.

Ecuaciones potenciales

Las tablas de índices nos pueden servir para resolver la ecuación

$$x^n \equiv a \ (mod\ m$$

El comportamiento de los índices como logaritmos nos permite transformar esta ecuación en otra lineal, eligiendo cualquier raíz primitiva **b** y aplicando índices en ambos miembros respecto a ella.

$$n \times ind_b(x) \equiv ind_b(a)\ (mod\ \varphi(m)$$

Según la teoría de las ecuaciones lineales en Z_m, si llamamos **d** al MCD(n, φ(m)), el índice de **a** ha de ser múltiplo de **d** para que exista solución. En ese caso basta despejar el índice de x y buscar después el valor de x en las tablas. Podíamos haber automatizado todo el proceso, pero parece que se aprende más de esta forma.

Ejemplo: Resolver $x^6 \equiv 37$ (mod 54

En primer lugar encontramos que φ(54)=18 (ver tabla y párrafos anteriores), luego d=MCD(6,18)=6. En la tabla citada buscamos el índice de 37 respecto a la raíz primitiva 5 y encontramos que es 12. Por tanto, como 12 es múltiplo de 6, deberá existir una solución (en realidad, según las propiedades de las ecuaciones lineales, deberían aparecer 6). Tomamos índices respecto al 5:

$6*ind_5(x) \equiv ind_5(37)$ (mod 54 ≡12

$ind_5(x) \equiv 12/6=2$.

Buscamos en la tabla qué inversible tiene índice 5 respecto a la raíz primitiva 5, y nos resulta 25. Comprobamos:

$25^1 \equiv 25$; $25^2 \equiv 25*25 \equiv 31$; $25^3 \equiv 25*31 \equiv 19$; $25^4 \equiv 25*19 \equiv 43$; $25^5 \equiv 25*43 \equiv 49$; $25^6 \equiv 25*49 \equiv 37$

Así comprobamos que 25 es una solución de la ecuación propuesta. Pero hemos asegurado que existen otras cinco soluciones, que se pueden leer en la tabla si hubiéramos usado otra raíz primitiva. Son estas: 13, 43, 31, 7 y 49. Esto completa el conjunto de seis soluciones de la ecuación propuesta.

Otras ecuaciones de ese tipo no tienen solución. Por ejemplo:

$X^7 \equiv 12$ (mod 49

Formamos la tabla de índices módulo 49 y vemos que $ind_3(12)=11$, que $\varphi(49)=42$ y MCD(7,42)=7, pero 11 no es múltiplo de 7, luego no existe solución. Hemos creado una tabla con las séptimas potencias de los inversibles de Z^*_{49} y sólo nos resultan seis resultados posibles: {1, 30, 31, 18, 19, 48}, y el 12 no está entre ellos.

El ejemplo anterior nos da una pista para descubrir si un resto dado es cúbico, bicuadrado o de otro orden en un módulo dado. Por ejemplo, ¿es resto bicuadrado 15 en módulo 22? Planteamos $a^4=15$ (mod 22 y analizamos:

Formamos la tabla de índices módulo 22

A. Roldán 2015

Tablas de índices

Módulo 22

Indicatriz 10

Tabla

Inversibles	Raíces primitivas 7	13	17	19
1	10	10	10	10
3	4	8	2	6
5	2	4	6	8
7	1	7	3	9
9	8	6	4	2
13	3	1	9	7
15	6	2	8	4
17	7	9	1	3
19	9	3	7	1
21	5	5	5	5

φ(22)=10 y MCD(4,10)=2, luego ind(15) ha de ser múltiplo de 2. Según la tabla, se cumple para cualquier raíz primitiva, luego sí es un resto bicuadrado. Podemos encontrar su raíz cuarta:

4ind(a)=2, luego ind(a)=2/4 (mod 22 = 6

El 3 posee índice 6, y cumple $3^4=15$ (mod 22, luego existe la raíz bicuadrada de 15, y este valor 15 es resto bicuadrado (sólo hemos investigado una posibilidad, pero con una basta)

SUCESIÓN DE RECAMÁN

Estudiamos hoy una original sucesión que Bernardo Recamán Santos envió a N. J. A. Sloane en 1991 para su colección, y que desde entonces ha originado múltiples desarrollos, incluso musicales (ver https://www.youtube.com/watch?v=h3qEigSSuF0).

Su definición es la siguiente (versión con $a_1=1$):

$a_1=1$
$a_n = a_{n-1} - n$, si este valor es positivo y no figura ya en la sucesión
$a_n = a_{n-1} + n$, en caso contrario.

Sus primeros términos son: 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, 17, 43, 16, 44, 15, 45, 14, 46, 79, 113, 78, 114, 77, 39, 78, 38, 79, 37, 80, 36, 81, 35, 82, 34, 83, 33, 84, 32, 85, 31, 86, 30, 87, 29, 88, 28, 89, 27, 90, 26, 91, 157,… (existe otra versión que comienza en 0, idéntica a esta en todo lo demás http://oeis.org/A005132)

El punto clave, y que nos permitirá estudiar su programación con hoja de cálculo es el de ***no figura ya en la sucesión***, pues esto obliga a mantener en memoria un registro de los valores anteriores ¿Cómo solucionarlo en una hoja de cálculo? Intentaremos varias posibilidades.

Desarrollo de la sucesión mediante celdas

Las celdas de una hoja sirven de memoria en cualquier proceso, por lo que comenzaremos el estudio por ahí. En la imagen verás la formación de la sucesión de Recaman en la columna E, junto a otra auxiliar D que hemos añadido por simple comodidad:

D	E
	1
-1	**3**
0	**6**
2	**2**
-3	**7**
1	**13**
6	**20**
12	**12**
3	**21**
11	**11**
0	**22**
10	**10**
-3	**23**
9	**9**
-6	**24**
8	**8**
-9	**25**

La columna D contiene, simplemente, la diferencia $\boldsymbol{a_{n-1}}$ **–** $\boldsymbol{n}$, que se obtiene con las expresiones =E2-FILA(),=E3-FILA(),=E4-FILA(),…aprovechando la función FILA, que aquí representará el valor de **n** en la definición. Por eso hemos creado la sucesión a partir de la primera fila. Si ese valor en la columna D es positivo y no ha salido ya, será el valor del siguiente término de la sucesión. Por eso no extrañará que algunos de estos valores figuren en la columna E que estudiaremos a continuación.

En dicha columna E hemos construido una fórmula un poco compleja. Esta es la correspondiente a la celda E3:

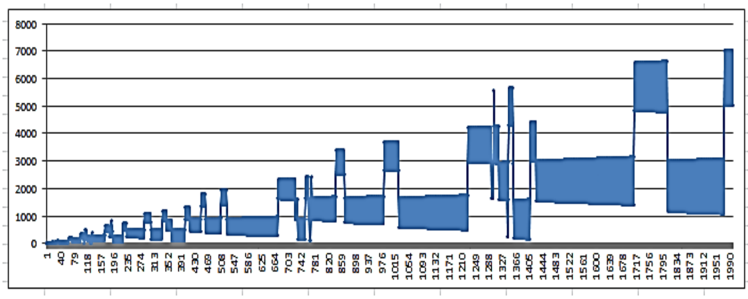
=SI(Y(D3>0;CONTAR.SI(E$1:E2;D3)=0);D3;FILA()+E2)

Recuerda que D3 contiene $a_{n-1} - n$, que en este caso sería $a_2 - 2$.

La fórmula comienza con un SI, puesto que la definición se basa en una alternativa. Después una Y, ya que existen dos condiciones: una que D3 sea positiva, y otra que no figure ya en la columna E. La primera se resuelve con **D3>0** y la segunda con **CONTAR.SI(E$1:E2;D3)=0**. Usamos CONTAR.SI para ver si D3 ha salido ya. Si el CONTAR da cero, es que no ha salido, y se admite. Observa que se busca desde la primera celda **E$1** (referencia absoluta) hasta la anterior E2.

Si ambas condiciones se cumplen, la función SI devuelve D3, como era de esperar, y, en caso contrario, **FILA()+E2**, es decir, $\boldsymbol{a_{n-1} + n}$.

Rellenando esta fórmula hacia abajo obtendremos la sucesión hasta el término que deseemos. Lo hemos efectuado hasta 2000 términos, para crear un gráfico similar al que figura en las publicaciones que tratan esta sucesión, en este caso de tipo lineal:

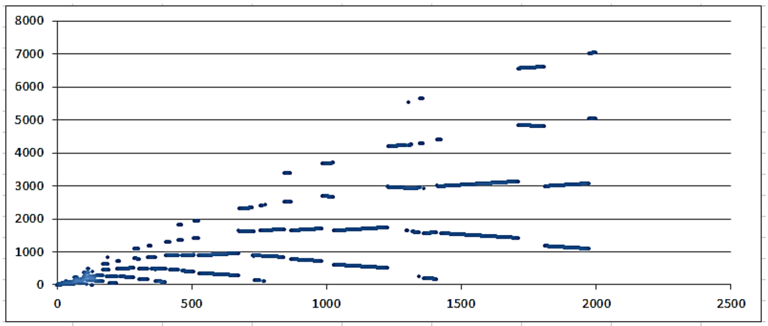


Llaman la atención en el mismo las fuertes oscilaciones que se producen en algunos intervalos, en los que los términos sufren incrementos alternativamente positivos y negativos, como en este:

1108	1108
-849	3065
1107	1107
-852	3066
1106	1106
-855	3067
1105	1105
-858	3068
1104	1104
-861	3069
1103	1103
-864	3070
1102	1102
-867	3071
1101	1101
-870	3072
1100	1100

En este tramo, las diferencias positivas decrecen de uno en uno y las negativas de tres en tres.

Si hubiésemos usado un gráfico de dispersión entre n y a_n obtendríamos



Pertenencia de todos los enteros positivos

N. J. A. Sloane conjeturó que cualquier entero positivo terminará apareciendo en la sucesión, y de hecho, estas son las posiciones en las que figuran los primeros términos: 1, 4, 2, 131, 129, 3, 5, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 31, 29, 27, 25, 23, 99734, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 64, 62, 60, 58, 56,… https://oeis.org/A057167

Nosotros podemos construir esta sucesión con la función COINCIDIR. Observa la imagen:

E	F	G
1	1	1
3	2	4
6	3	2
2	4	131
7	5	129
13	6	3
20	7	5
12	8	16
21	9	14
11	10	12
22	11	10
10	12	8
23	13	6
9	14	31
24	15	29
8	16	27
25	17	25
43	18	23
62	19	#N/A
42	20	7

Se han reproducido los valores de las posiciones de 1, 2, 3,… salvo la del 19, que al ser 99734 excedía nuestro ámbito de estudio. Como uno de los objetivos de este documento es el aprendizaje de las técnicas de la hoja de cálculo, reproducimos la fórmula usada. La columna F contiene los primeros números naturales, y recuerda que E contiene la sucesión. Bastará, pues, usar la función COINCIDIR, para ver si el número dado figura o no en la sucesión, y en qué posición, que es lo que nos devuelve esa función COINCIDIR. Por ejemplo, para el 5 usamos esta fórmula: **=COINCIDIR(F5;E$1:E$2000;0)**. En ella F5 es el valor 5 y **E$1:E$2000** el rango de búsqueda (hemos llegado a 2000 elementos). El 0 final indica que buscamos valores exactos, y la función nos devuelve 129, que es la posición en la que aparece el 5, como puedes ver en este recorte de la tabla:

134	128
5	129
135	130
4	131
136	132

En ella también aparece el 131, número de orden del 4.

Si hubiéramos creado una tabla de muchos más términos terminaríamos por encontrar en ella todos los números naturales. Eso es lo que conjetura Sloane.

Función RECAMAN(n)

El desarrollo anterior puede ser más o menos interesante, pero, como hemos procedido en casos parecidos, sería muy útil obtener un valor de la sucesión por cálculo directo (en realidad, en su interior sería recursivo), de forma que dado un número de orden, existiera una función que nos devolviera el término correspondiente de la sucesión de Recaman. Esto choca con el mismo inconveniente que en el caso del cálculo progresivo, y es el almacenamiento de los valores anteriores. Esa función debería contener un vector o tabla que memorizara dichos valores. En el Basic de las hojas de cálculo no existe un dimensionamiento dinámico de un vector en función de n, por lo que no sería práctico. Por ello hemos pensado almacenar los valores previos en un string o cadena de caracteres, que crece dinámicamente sin problemas.

La función cuya codificación presentamos ahora almacena los valores previos de la sucesión en el string **prev$**, pero para que no se den ambigüedades, rodea cada número de dos almohadillas #, es decir, almacenamos un 12 como #12#, para evitar que se confunda con 112, que sería #112# en nuestro sistema. Es un truco que nos evitará muchos problemas. También deberemos suprimir el espacio en blanco que las hojas añaden a los números, pues, si no, el 12 se podría codificar como # 12# y no ser detectado. Este cambio lo efectuará la función AJUSTA, que es la siguiente (quien no tenga interés en esto puede pasar a la función principal):

```
Public Function ajusta(a$) As String
If Mid(a$, 1, 1) = " " Then a$ = Right$(a$, Len(a$) - 1)
ajusta = "#" + a$ + "#"
End Function
```

Disponiendo de esta función auxiliar ya podemos describir la función RECAMAN(n). Es esta:

```
Public Function recaman(n)
Dim prev$, sd$
Dim d, ant, reca, i

prev$ = " #1# "
ant = 1   'Inicia los valores de la sucesión de Recaman
If n = 1 Then
reca = 1 'Caso en el que n=1
Else
For i = 2 To n
```

d = ant – i ‘Calculamos la diferencia a_{n-1} - n
If d > 0 Then
sd$ = ajusta(Str$(d)) ‘Si la diferencia es positiva, vemos si ya figura en la sucesión
If InStr(prev$, sd$) = 0 Then ‘Usamos InStr para ver si la diferencia figura en el string
reca = d ‘Si no está, la admitimos como nuevo valor
Else
reca = ant + i ‘Si ya figura en la sucesión, usamos la definición alternativa
End If
Else
reca = ant + i ‘Si es negativa, también usamos la definición alternativa
End If
sd$ = Str$(reca) ‘Incorporamos el nuevo término al string que los recuerda
prev = prev + ajusta(sd$)
ant = reca
Next i
End If
recaman = reca
End Function

Copia, si así lo deseas, estas dos funciones en tu hoja de cálculo, y así podrás jugar un poco con esta sucesión. Por ejemplo, puedes descubrir estas curiosidades o ampliarlas:

Elementos repetidos

El primer caso de términos repetidos en la sucesión de Recaman es el 42, que aparece en el índice 20 y en el 24: recaman(20)=recaman(24)=42. Dado un término, no es difícil encontrar el siguiente con el mismo valor. Hemos señalado que el primer repetido es el 42, en los lugares 20 y 24 Dado otro valor, ¿existirá otro con el mismo valor?¿cuál será la siguiente aparición?

Esta cuestión y otras parecidas podemos resolverla con esta función:

```
Public Function sig_recaman(indi)
Dim v, j, v1

v = recaman(indi)
j = indi
v1 = 0
While v <> v1
j = j + 1
v1 = recaman(j)
Wend
sig_recaman = j
End Function
```

En ella, dado un número de orden, se busca la siguiente aparición del término correspondiente a ese número de orden. Se le incluye un tope de 10^4 para evitar el bloqueo de la función. Como esta última situación es la más frecuente, sólo destacaremos los casos contenidos en http://oeis.org/A064284

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1,…

En ellos se descubre que repeticiones hay pocas, y casi siempre de sólo dos elementos. Con nuestra función ***sig_recaman*** se pueden comprobar algunas:

			Recaman
Término inicial		20	42
Siguiente		24	42

Recaman(20)=recaman(24)=42

Otros casos tardan mucho en aparecer y no merece la pena seguir por este camino.

Términos iguales a su número de orden

También existen muy pocos. Se puede plantear que ***recaman(n)=n*** y ver qué pasa. Sólo encontraremos recaman(1)=1,recaman(1520)=1520,
ecaman(9317)=9317 y alguno más. Los demás, si existen, sobrepasan nuestra capacidad de cálculo, ya que pertenecerían a esta sucesión

http://oeis.org/A064568

3, 11, 21, 39, 76, 248, 844, 1520, 2752, 9317, 17223, 31221, 57071, 99741, 589932, 58056875, en los que el término es múltiplo del número de orden.

El mismo caso, pero con una unidad de diferencia

¿Pueden ser n y recaman(n) número consecutivos en cualquiera de los dos sentidos?

Podemos plantear la condición ABS(RECAMAN(N)-N)=1 y hemos encontrado recaman(2)=3 y recaman(10)=11. Entre los números menores que 3000 no hay más.

A continuación incluimos la tabla de los números N menores que 1000 cuya diferencia con RECAMAN(N) es menor que 10

N	RECAMAN(N)
1	1
2	3
3	6
4	2
5	7
6	13
8	12
10	11
12	10
14	9
15	24
16	8
17	25
23	18
25	17
42	33
185	181
187	180

Una vez que tienes a tu disposición la función RECAMAN puedes emprender tus propias búsquedas.

SUCESIÓN DE GOLOMB

Ya estudiamos en 2010 conjuntos relacionados con este matemático

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Hoy lo hacemos con una de sus sucesiones. Se trata de esta:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12,…

http://oeis.org/A001462

También se la conoce como sucesión de Silverman. Como ves, es no-decreciente.

Tiene una definición muy curiosa, y es que **a(n)** representa el número de veces que aparece **n** en la sucesión, si además definimos a(1)=1 e implícitamente aceptamos que cada valor de n ocupa el mínimo número de orden posible.

Lo verás mejor si acompañamos cada valor con su índice:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																
a(n)	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	10

La imagen de 1 es 1 por definición. La de 2 es 2 porque en la sucesión figura ese valor dos veces. También el 3 aparece repetido, por lo que a(3)=2. A(4)=3 debido a que aparecen tres cuatros, y así con todos.

Este es un ejemplo muy elegante de autorreferencia, pues se define un objeto como si ya estuviera construido, pero sólo lo podemos formar si seguimos la definición.

Si aceptamos la condición de que cada valor ocupe el primer número de orden que esté libre, y que cada nueva imagen es la menor que cumple a(n)>=a(n-1), esta sucesión es única. En efecto, nos ponemos a razonar:

A(1)=1 por definición, luego sólo existirá un 1 en la sucesión, por lo que la imagen de 2 no podrá ser 1. Según las condiciones, ha de ser 2, luego en la sucesión deberá haber un par de 2. Como hemos quedado en que se ocupan los menores números de orden, deberá quedar:

1	2	3
1	2	2

Esto significa que a(3)=2, luego también repetiremos el 3 dos veces:

1	2	3	4	5
1	2	2	3	3

Obligamos así a que el 4 y el 5 figuren tres veces:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5

Ya podrás seguir tú el razonamiento y completar la sucesión, que con las condiciones impuestas será única.

¿Lo podría conseguir una hoja de cálculo? La respuesta es afirmativa, y el algoritmo no es muy complejo. Necesitamos dos punteros, *indi1*, que recorrerá los valores de n, e *indi2* que llevará la cuenta de los lugares que van quedando libres en la sucesión. Con *indi1* se leen los valores, y con *indi2* se escriben. Para evitar celdas vacías en los primeros valores, se rellenan el 1 y el 2. Quedará así con el Basic de las hojas:

Sub golomb()
Dim indi1, indi2, i, j, v

indi1 = 2 ‘El primer valor que se lee es el 2, en la celda (2,2)
indi2 = 2 ‘El primero que se escribe también es el 2
Cells(1, 2).Value = 1 ‘Rellenamos los dos primeros valores en las celdas (1,2) y (2,2)
Cells(2, 2).Value = 2
For i = 1 To 12 ‘Tomamos 12 valores, pero podían ser muchos más
v = Cells(indi1, 2).Value ‘Leemos el valor indicado por indi1 (que también es fila en la hoja)
For j = 1 To v ‘Escribimos tantos valores nuevos como indique v
Cells(indi2, 2).Value = indi1 ‘Todos los valores serán iguales a indi1

indi2 = indi2 + 1 ‘Avanza la escritura
Next j
indi1 = indi1 + 1 ‘Avanza la lectura
Next i
End Sub

Con esta subrutina se generará la sucesión de Golomb en la columna 2 de una hoja de cálculo:

B	C	D
1		
2		
2		
3		
3		
4		
4		
4		
5		
5		
5		
6		
6		
6		
6		
7		
7		
7		
7		
8		
8		

Para mayor claridad hemos copiado los resultados en varias columnas, manualmente. Observarás que se reproducen fielmente los valores deseados.

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			7			10			13
2			7			11			13
2			7			11			
3			8			11			
3			8			11			
4			8			11			
4			8			12			
4			9			12			
5			9			12			
5			9			12			
5			9			12			
6			9			12			
6			10			13			
6			10			13			
6			10			13			
7			10			13			

La forma de generación de esta sucesión garantiza que a(n)<=n, ya que los valores de los números naturales aparecen "con retraso", y cuando aparece el valor, el índice ha crecido más que él. El retraso se puede medir con la diferencia n-a(n):

N	N-A(N)
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	2
7	3
8	4
9	4
10	5
11	6
12	6
13	7
14	8
15	9
16	9
17	10

Vemos que los retrasos a partir de 3 son todos positivos y crecientes.

Una propiedad elemental, pero que hay que pensar en ella un poco, es que las sumas parciales de esta sucesión coinciden con el índice de la última aparición en la sucesión del número de sumandos. Más claro: si sumo tres términos, 1+2+2=5, obtengo que la última aparición del 3 ocurrirá en el término 5. Esto es por la propia definición: el 1 aparece una vez, el 2 dos y el 3 otras dos, luego el último 3 aparecerá en el lugar 5.

La sucesión de sumas parciales es

1, 3, 5, 8, 11, 15, 19, 23, 28, 33, 38, 44, 50, 56, 62, 69, 76, 83, 90, 98, 106, 114, 122, 131, 140, 149, 158, 167, 177, 187,… (http://oeis.org/A001463) y coincide con el lugar de la última aparición de su número de orden. Así, si el quinto término es 11, ahí ocurrirá la última aparición del 5.

Según esto, si llamamos F(n) a los términos de la sucesión de Golomb y G(n) a sus sumas parciales, se cumplirá (estúdialo bien) que

F(G(n)) = n

Fórmula recurrente

Colin Mallows ha ideado una recurrencia muy atractiva para evaluar F(n):

F(1) = 1; F(n+1) = 1 + F(n+1-F(F(n))).

En hoja de cálculo las recurrencias son posibles, pero si se agota la pila de datos se puede bloquear el cálculo.

Lo hemos intentado y funciona bien para los primeros términos, pero no va mucho más allá. En Basic sería

Public Function a(n)
If n = 1 Then
a = 1
Else
a = 1 + a(n - a(a(n - 1)))
End If
End Function

Con ella hemos formado esta tabla

N	A(n)
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	4
8	4
9	5
10	5
11	5
12	6
13	6
14	6

En PARI también funciona la recurrencia, pero no merece la pena porque se va ralentizando para números grandes:

a(n)=if(n==1,1,1+a(n-a(a(n-1))))
{for(i=1,30,print1(a(i),", "))}

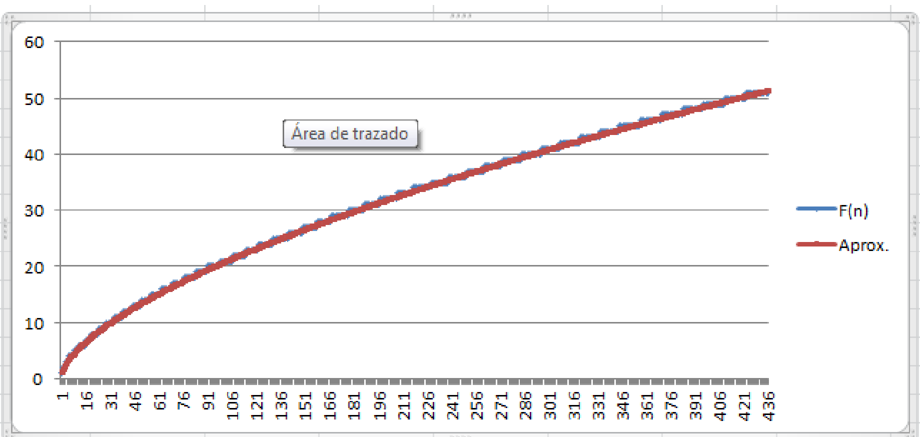
```
? \r ini.txt
%1 = (n)->if(n==1,1,1+a(n-a(a(n-1))))
1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9,
 9, 10, 10,
?
```

Aproximación asintótica

Por lo que hemos leído, no ha sido muy fácil llegar a esta expresión:

$$F(n) = \emptyset^{2-\emptyset} n^{\emptyset-1}$$

La comprobamos gráficamente



Se ve que son prácticamente indistinguibles.

NÚMEROS BELGAS

Estos números han sido introducidos por Eric Angelini y publicados en el año 2005 en http://oeis.org/A106039. Hay varios tipos, por lo que comenzaremos con los 0-Belgas. Estos números tienen la propiedad de que si a partir del número 0 vamos sumando reiteradamente las cifras (por orden) del número dado, se forma una sucesión que contiene a ese número. Por ejemplo, el 18 es 0-belga, porque a partir del 0 vamos a ir sumando sucesivamente 1, 8, 1, 8,…hasta llegar o sobrepasar el 18: 0, 1, 9, 10, 18, resultando que el mismo 18 es término de la sucesión. Sin embargo, el 19 no lo es, porque se forma la sucesión 0, 1, 10, 11, 20, 21, 30,…al ir sumando sucesivamente 1, 9, 1, 9,… y el mismo 19 es sobrepasado sin pertenecer a la sucesión. Se llaman 0-belgas porque la sucesión la comenzamos en 0, y los primeros son estos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 39, … http://oeis.org/A106039

Si un número posee 3, 4 o más cifras, estas se irán también sumando de forma sucesiva y ordenada.

Llamaremos n-belgas a aquellos números que pertenecen a la sucesión formada al sumar cifras, pero comenzando en el número **n**, siendo n menor que el número dado. Así, estos son los 1-belgas:

1, 10, 11, 13, 16, 17, 21, 23, 41, 43, 56, 58, 74, 81, 91, 97, 100, 101, 106, 110,… http://oeis.org/A106439

Por ejemplo, el 23, comenzando en 1, genera con las cifras 2 y 3 la sucesión 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23,…a la que él mismo pertenece.

Se han publicado también los 2-belgas (A106518), los 3-belgas (A106596) y otros.

Función ESBELGA

Dado un número cualquiera, es posible saber si es 0-belga, 1-belga o de rango superior. Podemos idear una función con dos parámetros, uno, el número dado, y otro, el tipo. Como el objetivo de este estudio es experimentar y descubrir curiosidades, daremos dos versiones de esta función, una un poco larga, antes de reflexionar sobre la cuestión, y otra simplificada.

En primer lugar pensamos en lo obvio:

- Deberemos extraer las cifras del número
- Después las iremos sumando ordenadamente a partir del número tipo
- Proseguimos hasta llegar o sobrepasar el presunto número belga
- Si un término de la sucesión coincide con el número dado, es que sí es belga.

Algo así, en el Basic VBA:

Function esbelga(n, t) ‘Los parámetros son el número y el tipo

Dim c(10) ‘Se reserva un vector para almacenar hasta diez cifras (se puede ampliar)

Dim i, nu, a, b, m, p

Dim es As Boolean

‘En primer lugar se extraen las cifras y se almacenan

i = 0: m = n

While m > 0

p = m - 10 * Int(m / 10)

i = i + 1

c(i) = p ‘memorias que guardan las cifras

m = Int(m / 10)

Wend

nu = i

‘Iniciamos la prueba para ver si es belga

es = False

i = 1: a = t ‘La variable **a** se inicia en el tipo

While a < n ‘Creamos una sucesión hasta **n**

m = i Mod nu: If m = 0 Then m = nu

a = a + c(nu - m + 1) ‘Se van sumando las cifras a la variable a

i = i + 1

If a = n Then es = True ‘Si la sucesión coincide con **n**, es belga

Wend

esbelga = es

End Function

Esta función resulta lenta para valores grandes de **n**, ya que contiene demasiados ciclos de suma de cifras. Sería más práctico eliminar todo esos ciclos dividiendo de forma entera **n-t** (siendo **t** el tipo de belga) entre la suma de sus cifras. Para números pequeños no se advierte diferencia en la rapidez del algoritmo, pero siempre debemos intentar simplificar. También se puede usar la función MOD para acelerar la extracción de cifras. Quedaría así:

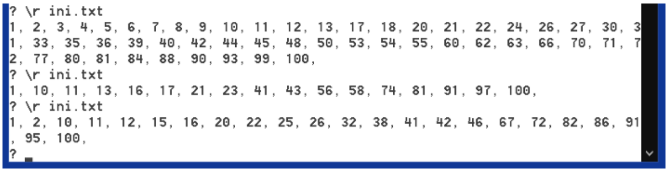
```
Function esbelga(n, t) As Boolean
Dim c(10)
Dim i, nu, a, m, p, s
Dim es As Boolean

i = 0: m = n: s = 0
While m > 0
p = m Mod 10
i = i + 1
c(i) = p: s = s + p ‘Extracción de cifras en orden inverso
m = Int(m / 10)
Wend
nu = i
a = (n - t) Mod s ‘Se eliminan los ciclos de suma de cifras
i = 1
If a = 0 Then ‘Si el número es múltiplo de la suma de cifras, es belga
```

es = True
Else
es = False
For i = 1 To un ‘Se eliminan cifras de la suma para ir probando
If Abs(a - s) < 1 Then es = True ‘Debería escribirse a=s, pero así eliminamos problemas de coma flotante
If Not es Then s = s - c(i)
Next i
End If
esbelga = es
End Function

Por si deseas experimentar, esta es la versión de la función para PARI:

esbelga(n,p)={s=0;k=0;x=n;while(x>0,s+=x%10;x=(x-x%10)/10;k++);
r=(n-p)%s;t=s;x=n;e=0;for(j=0,k,if(r==t,e=1);t-=x%10;x=(x-x%10)/10;);
return(e);}

En la imagen se han generado con esta función los belgas de tipo 0, 1 y 2:



Algunas propiedades

Esta idea de eliminar previamente todos los ciclos de suma de cifras permite afirmar algo más:

Si un número es divisible entre la suma de sus cifras, será 0-belga.

En efecto, al sumar **n** ciclos de suma de cifras llegamos a **n** sin tener que recorrer la sucesión. Estos números son los llamados Números Harshad o de Niven: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70,… http://oeis.org/A005349

Aplícale a cualquiera de ellos la función ESBELGA con parámetro 0 y deberá devolverte siempre VERDADERO.

El número de k-belgas, para cualquier valor de k, es infinito

Bastará sumar a k todos los múltiplos de la suma de cifras de cualquier otro número.

Todo número es k-belga para algún valor de k

Porque k puede ser el resto de dividir **n** entre la suma de sus cifras.

Números autobelgas

Puede darse la casualidad de que un número que comienza por la cifra k, sea también k_belga. Por ejemplo, el 25 tiene como primera cifra el 2, y 2-belga.

Esto no pasa de ser un divertimento, como todo el tema, pero nos permite crear una función:

Function autobelga(n)
Dim c, l

l = Len(Str$(n)) – 1 ‘Extrae el número de cifras
If l = 1 Then c = n Else c = Int(n / 10 ^ (l - 1)) ’Extrae la oprimera cifra
If esbelga(n, c) Then autobelga = True Else autobelga = False ‘Comprueba si es belga
End Function

Con ella es fácil crear listados de autobelgas. En la imagen se han listado los comprendidos entre 10 y 30:

10
11
13
16
17
20
22
25
26
30

Están publicados en http://oeis.org/A107062

Estos números se llaman autobelgas de primer tipo. Hay otros de segundo, en los que además de coincidir la primera cifra con el tipo, también lo hace la segunda con la primera cifra del segundo término. No merece el tema tanta complicación. Te dejamos que busques información y experimentes.

SUCESIÓN DE MIAN-CHOWLA

Esta sucesión se define por recurrencia de dos formas equivalentes:

(a) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las sumas a(i)+a(j) con i, j ≤n son distintas.

(b) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las diferencias a(i)-a(j) con i,j≤n i>j son distintas.

Aquí trabajaremos con la primera.

Pertenece al rango de problemas y conjuntos de Sidon, matemático que estudió las cuestiones sobre sumas o diferencias todas distintas, Puedes leer nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Los primeros elementos son 1, 2 , 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66,... http://oeis.org/A005282

Comprobemos la definición con el 8: Los términos anteriores (1, 2, 4) producen las siguientes sumas 2, 3, 4, 5, 6, 8. Deberíamos ahora probar con el siguiente número, el 5, pero este produce la suma 1+5=6, que ya está en la lista, luego no es válido. Probamos el 6, y la suma 2+6=8 lo invalida. El 7 tampoco pertenece a la sucesión, ya que 1+7=8 pertenece a la lista de sumas. Probamos el 8, que produce las sumas 9, 10 y 12, no incluidas en la lista, luego el 8 es válido y se incorpora a la lista.

Generación con hoja de cálculo

Para generar esta sucesión necesitamos definir una matriz en la que almacenar las distintas sumas que hay que considerar. Se puede aprovechar el hecho de que una vez calculadas las sumas para a(n-1), se pueden usar también para a(n), con lo que en cada iteración aparecerán n sumas nuevas. Esto nos puede llevar a usar una columna de hoja de cálculo como matriz que almacene las sumas previas a cada elemento. Así lo hemos implementado, como puedes ver en la imagen (más adelante explicaremos cómo conseguimos que aparezcan):

Lista de sumas			Lista de elementos
2			1
3			2
4			4
5			8
6			
8			
9			
10			
12			
16			

En la columna de la izquierda hemos ido acumulando sumas, y en la de la derecha, elementos de la sucesión. Así, la suma 2 pertenece al elemento 1. Al incorporar un nuevo elemento, en este caso el 2, se incorporan las sumas 3 y 4. Con el elemento 4, las sumas 5, 6 y 8, y por último, con el 8, las restantes 9, 10, 12 y 16.

¿Cómo conseguimos la aparición automática de elementos y sumas nuevas? Hemos diseñado un botón que en cada pulsación incorpora un elemento nuevo en la columna (o matriz) de elementos y las correspondientes sumas en la columna de la izquierda.

La idea es esta:

Comenzamos con a(1)=1 s(1)=1

Para cada posible elemento nuevo, ensayamos en primer lugar el valor a(n-1)+1. Si ese valor produce sumas distintas a las ya existentes, lo aceptamos e incorporamos a la lista. En caso contrario, probamos con a(n-1)+2, a(n-1)+3,…hasta que lleguemos a un número que produzca un conjunto de sumas todas distintas.

Si deseas practicar con ese botón, puedes descargarte la hoja alojada en esta dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/teoria/apunarit.htm#mian

Si te gusta la programación, sigue esta rutina en VBA, contenida en la hoja enlazada:

```
Sub nuevo()
Dim sumas, elem, x, x1, i, j, x0, s
Dim vale, dasuma As Boolean

sumas = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(7, 4).Value ‘Lee los primeros elementos
elem = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(7, 7).Value
x1 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + elem, 7).Value
vale = False
x = x1 + 1
While Not vale ‘Se recorre un bucle mientras no aparezcan sumas distintas
dasuma = False ’Esta variable controla si una suma se repite
i = 1
While i <= elem And Not dasuma ‘Bucle de búsqueda de sumas no repetidas
x0 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + i, 7).Value
j = 1
While j <= sumas And Not dasuma
s = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + j, 4).Value
If x1 + x0 = s Then dasuma = True ‘Una suma se ha repetido, y se rechaza el nuevo elemento
j = j + 1
Wend
i = i + 1
Wend
```

If dasuma Then
x1 = x1 + 1
Else
vale = True
elem = elem + 1 ‘Se ha encontrado un elemento válido y se incorpora a la columna
ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + elem, 7).Value = x1
For j = 1 To elem ‘Se incorporan las sumas nuevas
x0 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + j, 7).Value
ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + sumas + j, 4).Value = x1 + x0
Next j
End If
Wend
End Sub

Hemos aprovechado la estructura de la hoja de cálculo para no tener que definir matrices o vectores de datos.

Curiosidades sobre esta sucesión

En la hoja arriba enlazada hemos copiado los primeros términos de la sucesión en la hoja “Propiedades”. Como en OEIS sólo figuran 50 elementos y algunas curiosidades implican muchos términos, hemos adaptado el algoritmo anterior para convertirlo en una función MIAN(N), tal que dado el número de términos, devuelva una cadena de caracteres (string) con los primeros términos de la sucesión de Mian-Chowla. Después, con la técnica de "Texto en columna" se pueden organizar en fila o columna. Hay que advertir que según el número de términos, la función puede ser lenta. Al ser este algoritmo muy parecido, remitimos al código VBA de la hoja enlazada.

Número de términos	7
Sucesión	1 2 4 8 13 21 31 45

Con esta lista de la hoja "Propiedades" podemos comprobar algunas de las afirmaciones que se han hecho sobre esta sucesión. Por ejemplo:

El límite de la suma de los inversos de esta sucesión está entre 2.158435 y 2.158677

Creamos una columna paralela a la lista que contenga los inversos, y al lado otra que recoja la sumas parciales. Con los términos que hemos identificado, la lista termina así:

80309	1,2452E-05	2,157350043
83179	1,2022E-05	2,157362066
84345	1,1856E-05	2,157373922

Como vemos, se queda a una milésima aproximada de lo conjeturado, pero con hoja de cálculo no se puede afinar más sin un enorme gasto de tiempo.

2).-La suma de los cuadrados de los inversos converge a 1.33853369

Con un par de columnas, una de cuadrados de inversos, y otra de sumas parciales, llegaremos a

80309	1,5505E-10	1,338564346
83179	1,4453E-10	1,338564346
84345	1,4057E-10	1,338564347

Es más aproximado que el anterior, porque los sumando son más pequeños.

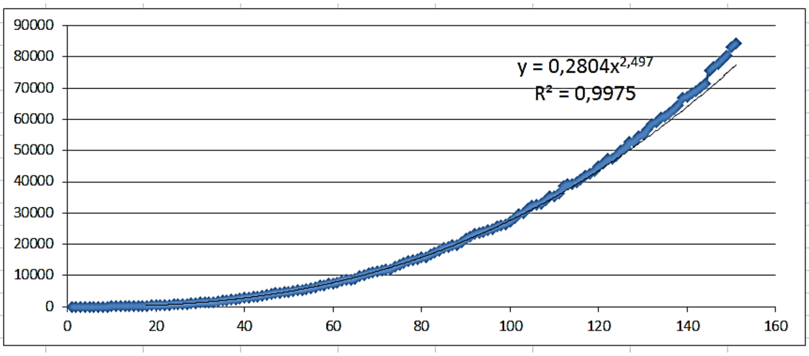
3).- Los valores de la sucesión, a partir de n=4, están comprendidos entre $n^2/2$ y $n^3/3$

Aquí tienes el cálculo para los términos 401, 475 y 565:

401	180,5	2286,333333
475	200	2666,666667
565	220,5	3087

Ajuste

Se han dado otros varios ajustes de esta sucesión, pero no ha sido posible comprobarlos con la hoja. Así que, como una práctica, ajustaremos mediante una función potencial:



No está mal, un R^2=0,9975, que nos aproximaría a una potencial de exponente 2,5 aproximadamente, pero es un cálculo no muy exacto.

LA PERMUTACIÓN YELLOWSTONE

En los últimos meses nos hemos acostumbrado a estudiar sucesiones con definiciones muy originales, como las incluidas en el documento de N.J.A. Sloane "My Favorite Integer Sequences"

http://arxiv.org/abs/math/0207175

En esta de hoy se comienza con los valores a(1)=1, a(2)=2 y a(3)=3, y los siguientes a(n) son los números naturales más pequeños que aún no hayan aparecido en la sucesión y que tengan algún factor común con a(n-2) y ninguno con a(n-1). Para entenderlo bien podemos ir generando términos según la definición. A 1, 2 y 3 le debe seguir el 4, que es el más pequeño que comparte factores primos con el 2 pero no con el 3. Tenemos ya 1, 2, 3 y 4.

El siguiente no puede ser 5, 6, 7 ni 8. Deberá ser el 9, que comparte el factor 3 con el 3 y ninguno con el 4. Así podemos seguir generando, hasta completar:

1, 2, 3, 4, 9, 8, 15, 14, 5, 6, 25, 12, 35, 16, 7, 10, 21, 20, 27, 22, 39, 11, 13, 33, 26, 45, 28, 51, 32, 17, 18, 85, 24, 55, 34, 65,…(http://oeis.org/A098550)

Esta sucesión no es creciente, y algunos números tardan en aparecer, como el 10. Se llama permutación porque se ha demostrado que todos los números naturales aparecen una vez (Ver https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL18/Sloane/sloane9.pdf)

Más adelante comentaremos sus propiedades. Puedes consultar también el documento

http://arxiv.org/pdf/1501.01669v2.pdf

Ahora, como siempre intentamos en este blog, la intentaremos reproducir con hoja de cálculo.

Generación con hoja de cálculo

Aprovecharemos las columnas de una hoja de cálculo para simplificar el problema. La parte más pesada de la generación es averiguar si el siguiente número pertenece o no a la sucesión ya formada por **k** términos. Deberíamos recorrer los ya aparecidos y compararlos con el candidato nuevo. Se tarda bastante cuando ya existen muchos términos, y es conveniente simplificar.

Para que las comparaciones sean más rápidas dedicaremos la primera columna A de una hoja a llevar cuenta de los términos que ya han salido. Escribiremos un 1 en la fila k si ya ha aparecido un término con valor k, y la dejamos en blanco si aún no ha aparecido. Así, si analizamos un nuevo candidato, no hay que recorrer un conjunto, sino ir a su fila directamente. En la imagen vemos en la columna B los términos que van saliendo, y en la columna A un 1 en las filas correspondientes a dichos elementos:

1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	9
6	1	8
7		15
8	1	14
9	1	5
10		6
11		
12		
13		
14	1	
15	1	

Como el 14 y el 15 ya pertenecen a la sucesión, en las filas 14 y 15 figura un 1. La 10 está vacía porque aún no ha aparecido el 10 como término válido. Analiza bien los distintos valores de ambas columnas.

El averiguar si ya ha salido un número o no se puede resolver con esta función:

Function esta(m)
If ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1 Then esta = True Else esta = False
End Function

Si en la celda ***Cells(m, 1)*** hay escrito un 1, declaramos ***esta = True*** y ***false*** en caso contrario. Esto simplifica mucho el proceso y le da más rapidez.

La segunda parte, el que posea factores comunes con a(n-2) y no los posea con a(n-1) se resuelve con el MCD. Si este es mayor que 1, existen factores comunes y si es 1, no, y los términos son primos entre sí.

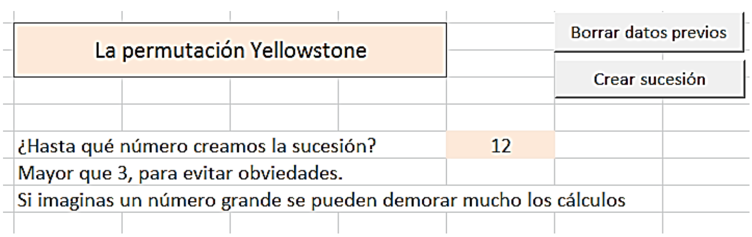
El Basic VBA lo resolvemos así: ***mcd(m, a) > 1 And mcd(m, b) = 1***

Teniendo en cuenta estas dos consideraciones, el resto del algoritmo se reduce a borrados de celdas, estructuras de control y demás. Lo puedes estudiar en nuestra hoja Yellowstone.xlsm, alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/yellowstone.xlsm

En ella, para comprobar que esta sucesión recorre todos los números naturales (por eso la llamamos *permutación* además de *sucesión*), permitimos que se escriba un entero (no debe ser muy grande por la limitada velocidad del algoritmo) y la sucesión se desarrolle hasta llegar a ese número.

En la imagen hemos deseado llegar hasta el 12:



Disponemos de un botón para borrar datos previos y otro para iniciar la sucesión. En efecto, al pulsar este, en la columna B aparece la sucesión Yellostone hasta el 12:

A	B
1	1
1	2
1	3
1	4
1	9
1	8
	15
1	14
1	5
	6
	25
1	12
1	
1	

Los términos aparecen en la columna B y los lugares ya ocupados, mediante un 1, en la A.

Descarga la hoja si te apetece y busca valores algo mayores, para descubrir en qué número de orden aparecen en la sucesión y observarás que la columna A se va llenando de unos.

Por ejemplo, el 540 no aparece hasta el término 590

589	1	271
590		540
591	1	

Esto significa que han aparecido unos 50 términos mayores que él antes de que se incorpore él mismo.

Para quienes no deseen descargar la hoja y sólo estudiar el proceso, incluimos el código utilizado. Más adelante comprobaremos algunas otras propiedades de esta sucesión.

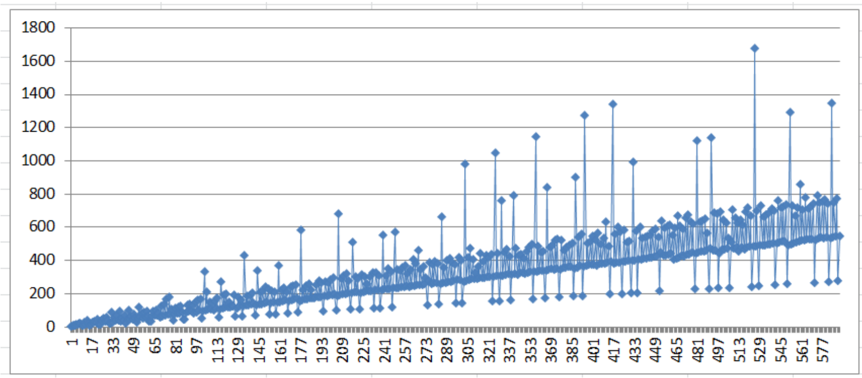
```
Public Function mcd(a1, b1)
Dim a, b, r

'Halla el MCD de a1 y b1

r = 1
a = a1
b = b1
If b = 0 Then b = 1
If a = 0 Then a = 1
While r <> 0
r = a - b * Int(a / b)
If r <> 0 Then a = b: b = r
Wend
mcd = b
End Function

Function esta(m)
If ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1
Then esta = True Else esta = False
End Function
```

```
Sub sucesion()
Dim n, k, b, c, m, i
Call borrado
n = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 9).Value
a = 2: b = 3:  k = 3
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 2).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 2).Value = 2
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(3, 2).Value = 3
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 1).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 1).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(3, 1).Value = 1
While k < 10 ^ 5 And b <> n
m = 3
While esta(m): m = m + 1: Wend
While Not (mcd(m, a) > 1 And mcd(m, b) = 1) And m
< 10 ^ 5
m = m + 1
While esta(m): m = m + 1: Wend
Wend
a = b: b = m: k = k + 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(k, 2).Value = m
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1
Wend

End Sub
```

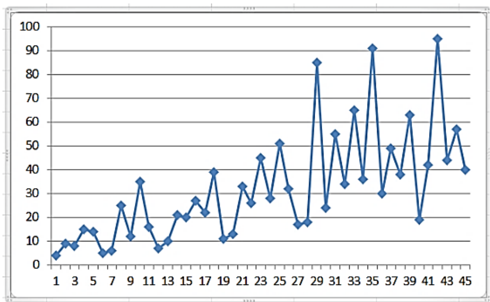
Curiosidades

Ya conocemos la definición de esta sucesión y cómo generarla con hoja de cálculo. Ahora desarrollaremos algunas propiedades, la mayoría tomadas de la página http://oeis.org/A098550

En primer lugar, bueno será el estudio gráfico de la evolución de esta sucesión:



Los datos están tomados del ejemplo del apartado anterior, términos hasta que aparezca el 540. Vemos una línea de tendencia lineal clara (en realidad, se ha visto que no es lineal), un poco por debajo de los números de orden, con otra línea de más pendiente algo difusa, además de casos aislados situados superior e inferiormente. Si esta sucesión recorre todos los valores, cada uno elegido en la escala del eje Y se corresponderá con un punto del gráfico. Parece ser que el nombre de Yellowstone proviene de este gráfico, en el que las imágenes más pequeñas corresponden a los números primos, el núcleo central contiene bastantes alternancias entre pares e impares, mientras que surgen picos semejantes a los chorros aleatorios de materia de un ***geyser***. Muchos de estos picos aparecen dos unidades más tarde que los primos. Vemos un corte con más detalle:



Aquí los mínimos se sitúan en los valores primos 5, 7, 11 (junto al 13) y 19, mientras que los "chorros" o picos corresponden a 85, 91 y 95. Nos referimos a valores, no a números de orden.

Infinitud de la sucesión

Para demostrar que la serie es infinita bastará mostrar que dados un a(n-2) y a(n-1), el conjunto de candidatos a ser el siguiente número, no está vacío. En efecto, basta elegir el valor a(n-2)*p, siendo p un número primo mayor que a(n-1). Si ese conjunto no está vacío, siempre existirá un término posterior a los dados, y la sucesión será infinita. Por una razón similar, en cada tres términos consecutivos ha de haber al menos un número compuesto, pues tres primos consecutivos no cumplirían la definición.

Dentro de esta sucesión infinita los primeros primos aparecen en su orden natural, como podemos comprobar en esta lista

1, **2**, **3**, 4, 9, 8, 15, 14, **5**, 6, 25, 12, 35, 16, **7**, 10, 21, 20, 27, 22, 39, **11**, **13**, 33, 26, 45, 28, 51, 32, 17, 18, 85, 24, 55, 34, 65, 36, 91, 30, 49, 38, 63, **19**, 42, 95, 44, 57, 40, 69, 50, **23**, 48,…

No se ha podido demostrar esta conjetura para todos los primos.

Puntos fijos

Una cuestión curiosa es averiguar qué números aparecen en un número de orden igual a ellos, es decir, que a(n)=n. Hasta ahora sólo se han encontrado estos:

1, 2, 3, 4, 12, 50, 86 (http://oeis.org/A251411)

Se ha intentado hasta 10^8 sin conseguir otro más. Con nuestra hoja de cálculo podemos comprobar alguno. En la imagen tienes el correspondiente al 86:

¿Hasta qué número creamos la sucesión?	86
Mayor que 3, para evitar obviedades.	
Si imaginas un número grande se pueden demorar mucho los cálculos	
Ese número aparece en la posición	86

LOS INTERPRIMOS

Se llaman "interprimos" a los números naturales que son media de dos primos consecutivos. El conjunto de estos números es amplísimo, y se puede descomponer en diversos subconjuntos interesantes, la mayoría ya publicados. Los primeros interprimos son

4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 26, 30, 34, 39, 42, 45, 50, 56, 60, 64, 69, 72, 76, 81, 86, 93, 99, 102, 105, 108, 111, 120, 129, 134, 138, 144,…y están publicados en https://oeis.org/A024675.

Basta estudiar la lista para darse cuenta de que hay entre ellos cuadrados (A075190), como 81 y 144, pares (A072568) e impares (A072569), triangulares (A130178), como el 6 y el 15, semiprimos (A078443), como el 21, y muchos más tipos. Sólo los que son potencias ocupan muchas páginas de OEIS (A075190, A075191, A075192, A075228, A075229,…) Visita la página http://oeis.org/wiki/Interprimes y te abrumará la cantidad de variantes que presentan los interprimos.

Quedan pocas posibilidades para explorar, pero alguna habrá por ahí. Evidentemente, un interprimo no puede ser primo, pues entonces los dos primos no serían consecutivos.

Casi todos los interprimos son múltiplos de 2 o de 3, pero no todos (que es lo que afirma Wikipedia), ya que hemos encontrado este contraejemplo: 803 es interprimo entre 797 y 809, y no es múltiplo ni de 2 ni de 3, ya que 803=11*73. De hecho, están publicados los interprimos que no lo cumplen:

205, 217, 473, 515, 625, 667, 803, 1003, 1207, 1243, 1313, 1465, 1505, 1517, 1537, 1681, 1715, 1795, 1817,… https://oeis.org/A072573

Interprimos entre primos gemelos

Entre ellos son interesantes los que son media de dos primos gemelos:

4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 102, 108, 138, 150, 180, 192, 198, 228, 240, 270, 282, 312, 348,… https://oeis.org/A014574

Salvo el primero, todos son múltiplos de 6, ya que los primos gemelos han de tener la forma 6k-1 y 6k+1 (salvo 3 y 5), con lo que la media será 6k. Este mismo hecho demuestra también que el interprimo es la raíz cuadrada del producto de los dos primos más una unidad:

(6k-1)(6k+1)+1=36k^2=(6k)^2

Según esto, (6k)^2-1 es un semiprimo, pues sólo tiene como factores 6k-1 y 6k+1. Esta puede ser una definición alternativa para estos interprimos. Lo puedes comprobar con PARI

{for(i=1,10^3,m=i*i-1;if(!issquare(m)&&bigomega(m)==2,print1(i,", ")))}

Te devuelve la misma sucesión, pero con la definición de números tales que n^2-1 es un semiprimo.

Interprimos entre primos “cousin” y “sexy”

Los primos “cousin” son los que se diferencian en 4 unidades. Sus promedios son estos:

5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, 99, 105, 111, 129, 165, 195, 225, 231, 279, 309, 315, 351, 381, 399, 441,… https://oeis.org/A087679

Si los anteriores eran todos múltiplos de 6, salvo los primeros, estos lo serán de 3 y no de 6. La razón es que los primos que se diferencian en 4 unidades han de tener la forma 6k+1 y 6k+5, con lo que el promedio será (12k+6)/2=6k+3.

Si el par de primos es “sexy”, es decir, que se diferencian en 6 unidades, sus interprimos son:

26, 34, 50, 56, 64, 76, 86, 134, 154, 160, 170, 176, 236, 254, 260, 266, 274, 334, 356, 370, 376, 386,… https://oeis.org/A072571

En este caso, para que diferencien en 6, los primos han de ser 6k+1 y 6(k+1)+1 o bien 6k+5 y 6(k+1)+5. Y los promedios 6k+4 o 6(k+1)+2, luego estos interprimos son todos pares, pero no múltiplos de 3.

Algunos tipos curiosos de interprimos

Ya hemos destacado que existen interprimos cuadrados (A075190). También los hay triangulares (A130178)

Interprimos cuadrados

Son los siguientes:

4, 9, 64, 81, 144, 225, 324, 441, 625, 1089, 1681, 2601, 3600, 4096, 5184, 6084, 8464, 12544, 13689, 16641, 19044, 19600, 25281, 27225, 28224, 29584, 36864, 38025, 39204, 45369,…(http://oeis.org/A069495)

Salvo el primero, asociado a los primos gemelos 3 y 5, ningún otro será media de este tipo de primos, pues estos tendrían la expresión n^2-1 y n^2+1, y el primero no es primo para n>3, por ser igual a (n+1)(n-1). El mismo razonamiento nos vale para afirmar que la diferencia entre el cuadrado dado y sus primos próximos no puede ser un cuadrado k^2, pues el anterior sería $n^2-k^2=(n+k)(n-k)$, no primo. De hecho, estas son las primeras diferencias entre el interprimo cuadrado y el primo más próximo:

Cuadrado	Diferencia
4	1
9	2
64	3
81	2
144	5
225	2
324	7
441	2
625	6
1089	2
1681	12
2601	8
3600	7
4096	3
5184	5

Vemos que ninguna es un cuadrado. En ocasiones similares nos hemos preguntado si se recorrerán todas las diferencias posibles, en este caso no cuadradas.

Vemos 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12,…¿Estarán todas? Hemos creado una función para averiguarlo. Si no te interesa la programación, ignora el código que se inserta a continuación:

Public Function difcuad(d) ‘Busca el primer cuadrado interprimo con diferencia ***d***
Dim i, n, d1, d2, n0
Dim novale As Boolean
i = 1 ‘Contador de búsqueda
n0 = 0 ‘En el inicio damos el valor 0 a la función por si fracasa la búsqueda
novale = True ‘Variable para controlar el fin de la búsqueda
While i < 10 ^ 5 And novale ‘El tope de 10^5 es arbitrario. Si salen ceros habrá que aumentarlo
n = i * i ‘Se construye un cuadrado
d1 = n - primant(n) ‘Se analizan sus diferencias con los primos próximos
d2 = primprox(n) - n
If d1 = d And d2 = d Then n0 = n: novale = False ‘Si es interprimo, se toma nota y paramos
i = i + 1
Wend
difcuad = n0 ‘La función devuelve el primer cuadrado con la diferencia pedida.
End Function

Diferencia	Cuadrado mínimo
2	9
3	64
4	
5	144
6	625
7	324
8	2601
9	
10	154449
11	260100
12	1681
13	898704
14	27225
15	114244
16	
17	278784
18	223729
19	4410000
20	25281
21	12888100
22	4730625
23	1512900
24	4774225
25	
26	8208225
27	6130576
28	1121481
29	12744900
30	34586161
31	2433600
32	45360225
33	9784384
34	1271279025
35	64064016
36	
37	69956496

Con esta función hemos creado una tabla, en la que a cada diferencia (no cuadrada) se le asigna el primer cuadrado n^2 tal que sea interprimo y su diferencia con los primos próximos sea la dada:

Observamos que hasta el 37 todas las diferencias se corresponden con un cuadrado. A partir de ahí, el cálculo se ralentiza, aunque es de esperar que todas las diferencias no cuadradas tengan una imagen en esta función. Si quieres experimentar por tu cuenta, usa este programa en PARI

```
difcuad(n)= { local(i=2,m,v=0,p,q);
while(v==0&&i<10^6,m=i*i; p=m-precprime(m-
1);q=nextprime(m+1)-m;if(p==n&&q==n,v=m);i+=1)
;return(v) }
{x=difcuad(50);print(x);print(sqrt(x))}
```

Sustituye el 50 por otro número cualquiera, y si el resultado es 0, cambia 10^6 por una potencia mayor. Aunque PARI es rápido, puedes tener que esperar un poco. Si nuestra conjetura es cierta, al final obtendrás un cuadrado.

Interprimos triangulares

Existen también números triangulares que son interprimos. Los primeros son estos:

6, 15, 21, 45, 105, 120, 231, 300, 351, 465, 741, 780, 861, 1176, 1431, 1485, 3081, 3240, 3321, 3828, 4005, 4278, 5460, 6786, 6903, 7140, 7381, 7503, 7875, 8001, 10731, 11175, 11325, 11781, 12246, 12561,…(http://oeis.org/A130178)

Casi todos ellos son múltiplos de 2, 3 o ambos, pero no todos. Una excepción es 7381=11*11*61, interprimo entre 7369 y 7393.

No hemos encontrado interprimos triangulares cuya diferencia con sus primos próximos sea también triangular, salvo el caso trivial de 6 con 5 y 7.

Otros interprimos

Oblongos

Un oblongo puede ser también interprimo. Los primeros son estos:

6, 12, 30, 42, 56, 72, 240, 342, 420, 462, 506, 552, 600, 650, 870, 1056, 1190, 1482, 1722, 1806, 2550, 2652, 2970, 3540, 4422, 6320, 7140, 8010, 10302, 12656, 13572, 14042, 17292, 18360, 19182, 19460, 20022, 22952, 23562, 24180, 27060, 29070, 29756, 31152, 33306, 35156, 35532, 39006,…

Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en https://oeis.org/A263676

Por su propia definición, todos son pares. Si estudiamos sus restos respecto al 6, veremos que sólo pueden ser 0 y 2, es decir, todos los oblongos de esta sucesión han de tener la forma 6k o bien 6k+2. La razón es que los primos son todos del tipo 6k+1 o 6k+5. Intenta encontrar sus medias y verás que nunca pueden ser del tipo 6k+4.

Potencias de primo no triviales

Las potencias de un primo aparecen en muchas cuestiones sobre números. Tampoco faltan entre los interprimos. Los primeros son estos:

4, 9, 64, 81, 625, 1681, 4096, 822649, 1324801, 2411809, 2588881, 2778889, 3243601, 3636649, 3736489, 5527201, 6115729, 6405961, 8720209, 9006001, 12752041, 16056049, 16589329, 18088009, 21743569, 25230529, 29343889, 34586161, 37736449, …

Los más abundantes son los cuadrados de primos, como puedes comprobar en la lista.

Se pueden engendrar en PARI (nosotros los hemos comprobado con hoja de cálculo) mediante este código:

PARI

```
{for(i=1,10^10,if(isprimepower(i)>1&&i==(precprime(i-1)+nextprime(i+1))/2,write1("final.txt",i,", ");print(i)))}
```

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A263675

La función isprimepower es muy útil, pues da el posible exponente de la potencia de primo que buscamos. Como deseamos que dicha potencia no sea trivial, exigimos que el valor de la función sea mayor que 1. Es muy curiosa la lista de potencias en base pequeña que son interprimas. Las más destacadas son:

Potencias de 2

4, 64, 4096, 75557863725914323419136, 306499108173177771671669405430061836723747824 4367204352,…

Por ejemplo, 75557863725914323419136=2^76 es interprimo entre 75557863725914323419121 y 75557863725914323419151. Es una simple curiosidad, pero impresiona que hayamos podido llegar a encontrar estos ejemplos.

Potencias de 3

9, 81, 387420489, 3486784401, 7509466514979724803946715958257547, 147808829414345923316083210206383297601, 114338112728368848266658740496853576136021270802373825711531514715683892490233936080502227064160777707 21,

448892491307036257313398359006707643432387469456810160991926368303464199896097475113561830407152947942076292623881529083368591747123618100530770752056321305926194706763551153705251146130442138394723337920866081218864301061606664140464321,

Potencias de 5

5, 625,

32311742677852643549664402033982923967414535582065582275390625,

16155871338926321774832201016991461983707267791032791137695312 5,

Una buena cuestión, que daríamos por verdadera, es si existen infinitas potencias de este tipo.

Dobles interprimos

A los interprimos, que son media entre dos primos consecutivos, les podíamos exigir que también lo fueran respecto al anterior y al siguiente primo de ese par. Es decir, que dados cuatro primos consecutivos p, q, r y s, exista un número N tal que N=(p+s)/2 y N=(q+r)/2. Esto se cumplirá cuando q-p = s-r, lo cual no quiere decir que los cuatro estén en progresión aritmética.

Un ejemplo: 600 es doble interprimo, porque está en el centro de los cuatro primos consecutivos 593, 599, 601 y 607, cumpliéndose que 600 = (599+601)/2 = (593+607)/2.

No es difícil encontrarlos, y no son escasos. Los primeros que aparecen son:

9, 12, 15, 18, 30, 42, 60, 81, 102, 105, 108, 120, 144, 165, 186, 195, 228, 260, 270, 312, 363, 381, 399, 420, 426, 441, 462, 489, 495, 552, 570, 582, 600, 696, 705, 714, 765, 816, 825, 858,…

(Los publicamos en https://oeis.org/A263674)

A primera vista todos parecen ser múltiplos de 2 o 3, pero, como nos ocurrió con una propiedad similar, esa afirmación es falsa. El primer contraejemplo es 2405, doble interprimo entre 2393, 2399, 2411 y 2417.

¿QUÉ HAY ENTRE DOS PRIMOS CONSECUTIVOS?

Evidentemente, lo que hay entre ellos son números compuestos, pero puede haber también cuadrados, semiprimos u oblongos, y se pueden contar o sumar. De algunas clases sólo habrá uno o ninguno, como en el caso de los cuadrados, y en otras aparecerán muchos más. Nos entretendremos con esas búsquedas, para ver qué conseguimos.

En primer lugar, un escenario

Para entender mejor lo que sigue, hemos construido una tabla con todos los números del 2 al 997, que puedes extender tanto como desees. Dicha tabla está organizada escribiendo los números primos en una misma columna, y los comprendidos entre cada dos de ellos consecutivos (los llamaremos “entreprimos”), en las columnas siguientes. Algo como esto:

C	D	E	F	G	H	I
	Primos		Entreprimos			
	2					
	3	4				
	5	6				
	7	8	9	10		
	11	12				
	13	14	15	16		
	17	18				
	19	20	21	22		
	23	24	25	26	27	28
	29	30				
	31	32	33	34	35	36
	37	38	39	40		
	41	42				
	43	44	45	46		
	47	48	49	50	51	52
	53	54	55	56	57	58

Hemos alojado esta tabla en

http://www.hojamat.es/blog/entreprimos.xlsm

De esta forma, cuando deseemos contar, sumar o destacar entreprimos, trabajaremos por filas, lo que en una hoja de cálculo facilita mucho el trabajo. Por ejemplo, con la función CONTAR podemos añadir una columna que nos exprese el intervalo entre dos primos consecutivos. Por eso comenzamos la tabla en la columna D, para poder insertar columnas delante de ella. Observa cómo quedaría la función CONTAR en la columna C:

C	D	E	F	G	H	I
	Primos			Entreprimos		
1	2					
2	3	4				
2	5	6				
4	7	8	9	10		
2	11	12				
4	13	14	15	16		
2	17	18				
4	19	20	21	22		
6	23	24	25	26	27	28
2	29	30				
6	31	32	33	34	35	36
4	37	38	39	40		

Como era de esperar, salvo el caso del 2 y el 3, el número de entreprimos es siempre par, y distribuido de forma irregular.

Podíamos haber sumado, y obtendríamos los términos de la sucesión http://oeis.org/A054265

0, 4, 6, 27, 12, 45, 18, 63, 130, 30, 170, 117, 42, 135, 250, 280, 60, 320, 207, 72,… como puedes

observar en la imagen, en la que hemos usado la función SUMA.

C	D	E	F	G	H	I	J
	Primos		Entreprimos				
0	2						
4	3	4					
6	5	6					
27	7	8	9	10			
12	11	12					
45	13	14	15	16			
18	17	18					
63	19	20	21	22			
130	23	24	25	26	27	28	
30	29	30					
170	31	32	33	34	35	36	

En la página enlazada http://oeis.org/A054265 se te propone una fórmula para estas sumas. Es fácil de entender. Si llamamos P(N) al primo número N es claro que el número de entreprimos entre P(N) y P(N+1) es P(N+1)-P(N). Pero es trivial que forman una progresión aritmética, luego se pueden sumar mediante la fórmula clásica

$$S(n) = \frac{(a(1) + a(n)) \times n}{2}$$

Que en este caso sería (P(N+1)-1+P(N)+1)*(P(N+1)-P(N)+1)/2, es decir:

$$S(n) = \frac{\big(P(N) + P(N+1)\big) \times (P(N+1) - P(N) + 1)}{2}$$

Por ejemplo, entre 23 y 29 la suma de compuestos sería (23+29)*(29-23+1)/2=26*5=130, como se comprueba en la tabla.

Número de entreprimos

Para recuentos posteriores, es útil disponer de una fórmula para contar los entreprimos inferiores a un primo dado. Recordamos que existe una función PI(x), o π(x) con x real, que cuenta los primos menores o iguales a un número dado. En lenguajes de programación se podrá expresar como PrimePi(x) en el Wolfram Language, primepi(x), en PARI o nuestra PRIMHASTA para hoja de cálculo. Es evidente que el número de entreprimos hasta N se calculará restando N y PRIMEPI(N), para así eliminar los primos. En PARI podíamos definir esta función:

entreprimos(n)=n-primepi(n)

Con este código contamos los entreprimos de la tabla-escenario propuesta:

entreprimos(n)=n-primepi(n)

{print(entreprimos(997))}

Si lo ejecutas te devolverá 829, aunque en la tabla hay 828. Esto es porque cuenta el 1.

Si deseas contar entre dos primos puedes usar esta otra función:

entreprimos2(m,n)=n-primepi(n)-m+primepi(m)

Por ejemplo, para m=31 n=53 nos devuelve el valor 17, que puedes comprobar en la tabla

31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		
41	42				
43	44	45	46		
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60				

Usaremos más adelante estas funciones en cálculos de densidades de ciertos tipos de entreprimos.

Casos particulares

Mucho más atractivo es contar o sumar entreprimos de un cierto tipo determinado, como los cuadrados

Entreprimos cuadrados

El caso de los entreprimos cuadrados es muy interesante, porque con ellos estudiamos el reverso de la Conjetura de Legendre, según veremos más adelante. En la tabla que proponemos (ENLACE), es muy sencillo contar los cuadrados existentes en cada fila, o destacarlos con formatos en color. También podemos usar el Basic VBA de las hojas, y por último, acudir a PARI para los recuentos. Recorremos los distintos procedimientos:

Destacar cuadrados

Lo puedes realizar manualmente, recorriendo las distintas filas y marcando con negrita o cualquier color los cuadrados que encuentres.

Primos	Entreprimos				
2					
3	4				
5	6				
7	8	9	10		
11	12				
13	14	15	16		
17	18				
19	20	21	22		
23	24	25	26	27	28
29	30				
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		

Te darás cuenta al hacerlo de que no hay más de un cuadrado en cada fila de entreprimos. Ya verás que esto se relaciona con la conjetura de Legendre.

Hay una forma automática de colorear todos los cuadrados. Lo hemos conseguido con las funciones de un complemento que tenemos instalado, y lo que sigue, un poco oscuro, sólo te servirá de incentivo para introducirte en el Excel avanzado, pero es bueno dejar constancia del método empleado.

Sub recorrido()
Dim i, j, m
Dim f As Boolean
For i = 4 To 200
For j = 4 To 30
m = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, j).Value ‘Lee el valor de cada celda
If IsNumeric(m) And m > 0 Then ‘Si es un número, seguimos

f = Application.Run("escuad", m) ‘Si es un cuadrado, lo colorea

If f Then Call colorea(i, j, 1)

End If

Next j

Next i

End Sub

Sub colorea(x, y, c) ‘Rutina para colorear o borrar el color

If c = 1 Then

Cells(x, y).Interior.Color = RGB(255, 0, 0)

Else

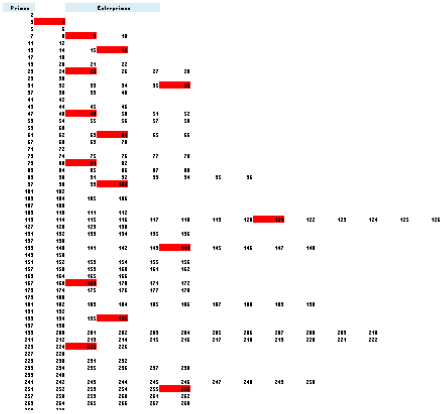
Cells(x, y).Interior.Color = RGB(255, 255, 255)

End If

End Sub

Con estas dos rutinas podemos colorear sólo los cuadrados de cada fila.

Vemos que efectivamente, el número de cuadrados entre dos primos sólo puede ser cero o uno.



Búsqueda en Basic o PARI

Si deseamos proseguir la búsqueda de cuadrados más allá del número 1000 necesitamos algo más rápido, que nos devuelva un listado con el número de cuadrados (0 o 1) contenidos en cada intervalo entre dos primos consecutivos. La función que sigue, ampliable, encuentra los cuadrados (tipo=1) o los triangulares (tipo=2) que siguen a un primo, pero inferiores al siguiente (entreprimos)

```
Function num_entreprimos(n, tipo)
Dim nm, p, i

nm = 0

If esprimo(n) Then
p = primprox(n)
For i = n + 1 To p - 1
Select Case tipo
```

```
Case 1: If escuad(i) Then nm = nm + 1
Case 2: If estriangular(i) Then nm = nm + 1
End Select
Next i
End If
num_entreprimos = nm
End Function
```

El problema que presenta es que usa funciones diseñadas por el autor y que no siempre son fáciles de encontrar. Por eso, proponemos también la versión en PARI (para cuadrados)

```
numcuad_entre(n)={local(i,m=0);if(isprime(n),for(i=n+1,nextprime(n+1)-1,if(issquare(i),m+=1)));m}
```

En ella contamos los cuadrados ("issquare") entre *n+1* y *nextprime(n+1)-1*, es decir, entre los *entreprimos.*

Por ejemplo, detrás del primo número 1000 (7919) existe un cuadrado. Puedes comprobarlo si escribes

```
numcuad_entre(n)={local(i,m=0);if(isprime(n),for(i=n+1,nextprime(n+1)-1,if(issquare(i),m+=1)));m}

{print(numcuad_entre(prime(1000)))}
```

Lo puedes ver en esta tabla

7919	**Es cuadrado**
7920	FALSO
7921	VERDADERO
7922	FALSO
7923	FALSO
7924	FALSO
7925	FALSO
7926	FALSO
7927	FALSO

El siguiente primo a 7919 es el 7927, y entre ambos existe el cuadrado de 89, 7921.

Listado del número de cuadrados

Primo	Número de cuadrados
2	0
3	1
5	0
7	1
11	0
13	1
17	0
19	0
23	1
29	0
31	1
37	0
41	0
43	0
47	1

Hemos usado una variante para que figuren los valores en columna, con este resultado:

Estos valores coinciden con los publicados en http://oeis.org/A061265

0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1,…

En dicha página Vladeta Jovovic propone una formula muy sencilla para encontrar ese número de cuadrados:

a(n) = floor(sqrt(prime(n+1)))-floor(sqrt(prime(n)))

Si las partes enteras de las raíces cuadradas de dos primos consecutivos son iguales, no existirá ningún cuadrado entre ellos, y sí habrá uno si son diferentes.

Si deseamos obtener el listado en forma de sucesión acudiremos a PARI, con un código similar al que usamos en anteriores párrafos. También de esta forma prescindimos de los complementos de Excel. Podemos usar lo siguiente:

{forprime(i=2,prime(50),c=nextprime(i+1);a=0;for(k=i+1,c-1,if(issquare(k),a+=1));print1(a,", "))}

Recorremos los primos desde el primero hasta el de orden 50 (por ejemplo). Para cada uno encontramos su siguiente primo y contamos los cuadrados (issquare) que hay entre ellos. Este listado nos servirá de modelo para otras búsquedas, y a ti para experimentar si lo deseas. Su resultado es este, que coincide con los anteriores:

```
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0,
 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
? 
```

Nos hemos detenido en varios procedimientos, para que veas que coinciden y también para que los conozcas previamente a las siguientes búsquedas.

Relación con la Conjetura de Legendre

¿Por qué los resultados son siempre 0 o 1? La causa es la Conjetura de Legendre:

Entre dos cuadrados consecutivos siempre existe al menos un número primo.

Si esta conjetura es cierta, sólo puede haber un cuadrado entre dos primos consecutivos, pues si hubiera al menos dos, entre ellos debería existir otro primo, con lo cual los primos dados no serían consecutivos.

Entreprimos triangulares

Con procedimientos similares podemos descubrir que entre dos primos consecutivos sólo existe un triangular o ninguno:

0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0,…

Los tienes destacados en nuestra tabla de entreprimos:

Primos		Entreprimos					
2							
3	4						
5	**6**						
7	8	9	**10**				
11	12						
13	14	**15**	16				
17	18						
19	20	**21**	22				
23	24	25	26	27	**28**		
29	30						
31	32	33	34	35	**36**		
37	38	39	40				
41	42						
43	44	**45**	46				
47	48	49	50	51	52		
53	54	**55**	56	57	58		
59	60						
61	62	63	64	65	**66**		
67	68	69	70				
71	72						
73	74	75	76	77	**78**		
79	80	81	82				
83	84	85	86	87	88		
89	90	**91**	92	93	94	95	96
97	98	99	100				
101	102						
103	104	**105**	106				
107	108						
109	110	111	112				
113	114	115	116	117	118	119	**120**
127	128	129	130				
131	132	133	134	135	**136**		
137	138						
139	140	141	142	143	144	145	146
149	150						
151	152	**153**	154	155	156		

Como era previsible, no coexisten dos triangulares en la misma fila, aunque observamos que el 3 es primo y triangular a la vez. Eso nos complicará una fórmula que veremos más adelante.

Puedes usar este código en PARI para obtener el listado:

{forprime(i=2,prime(100),c=nextprime(i+1);a=0;for(k=i+1,c-1,if(issquare(8*k+1),a+=1));print1(a,", "))}

(un número N es triangular si 8*N+1 es un cuadrado. De ahí la expresión "***issquare(8*k+1)")***

Detrás del 2 o el 3 no aparecen triangulares. Entre el 5 y el 7 está el 6, y por eso el tercer valor de la sucesión es 1. Entre 7 y 11 se encuentra el triangular 10, pero entre 11 y 13 no hay ninguno. Así podríamos seguir comprobando la sucesión.

El que exista sólo un triangular o ninguno es consecuencia de una conjetura similar a la de Legendre:

Entre dos triangulares consecutivos siempre existe al menos un número primo

Imitamos la fórmula de Vladeta Jovovic para cuadrados, pero para triangulares es algo más larga:

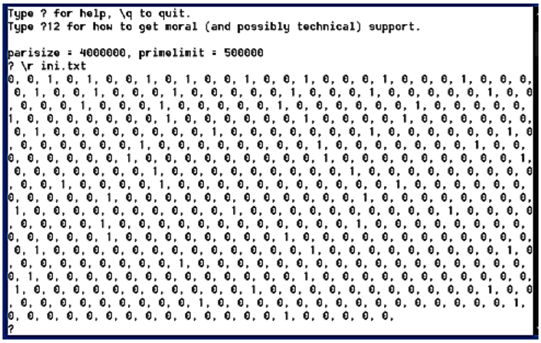
a(n) = floor((sqrt(8*prime(n+1)+1)-1)/2)-floor((sqrt(8*prime(n)+1)-1)/2)

Sólo es válida a partir del 3, porque entre el 2 y el 3 falla al ser 3 primo y triangular

Entreprimos oblongos

Los oblongos son dobles de triangulares, por lo que esperamos que sólo exista uno o ninguno en cada intervalos entre primos. ¿Será así?

En la imagen puedes ver los resultados para los primeros 400 primos, obtenidos con PARI, que hacen sospechar que sí se tiene la misma situación que con cuadrados o triangulares. Era de esperar.



```
Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primelimit = 500000
? \r ini.txt
0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0
, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
?
```

También para estos valores podemos usar una fórmula similar a las anteriores:

a(n) = floor((sqrt(4*prime(n+1)+1)-1)/2)-floor((sqrt(4*prime(n)+1)-1)/2)

Con ella obtenemos el listado:

0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,…

Si usamos la tabla en hoja de cálculo observamos que en la mayoría de los casos el oblongo es el número siguiente al primo:

Primos		Entreprimos				
2						
3	4					
5	6					
7	8	9	10			
11	12					
13	14	15	16			
17	18					
19	20	21	22			
23	24	25	26	27	28	
29	30					
31	32	33	34	35	36	
37	38	39	40			
41	42					
43	44	45	46			
47	48	49	50	51	52	
53	54	55	56	57	58	
59	60					
61	62	63	64	65	66	
67	68	69	70			
71	72					
73	74	75	76	77	78	
79	80	81	82			
83	84	85	86	87	88	
89	90	91	92	93	94	95
97	98	99	100			
101	102					
103	104	105	106			
107	108					
109	110	111	112			
113	114	115	116	117	118	119
127	128	129	130			
131	132	133	134	135	136	
137	138					
139	140	141	142	143	144	145
149	150					
151	152	153	154	155	156	

Es sencillo razonar que esto ocurrirá en primos que procedan de la expresión n^2-n-1, que se encuentran ya publicados:

5, 11, 19, 29, 41, 71, 89, 109, 131, 181, 239, 271, 379, 419, 461, 599, 701, 811, 929, 991, 1259, 1481, 1559, 1721, 1979, 2069, 2161, 2351, 2549, 2861, 2969, 3079, 3191, 3539, 3659, 4159,…

(http://oeis.org/A002327)

¿Qué primos poseen un cuadrado y un triangular antes del próximo primo?

Después de revisar los párrafos anteriores nos damos cuenta de que algunos primos van seguidos de un cuadrado y de un triangular antes de llegar al próximo primo. Son estos:

7, 13, 23, 31, 61, 113, 167, 251, 317, 523, 619, 773, 887, 1223, 1759, 2207, 2477, 2699, 3229, 3469, 4093, 5039, 5749, 6553, 7741, 11003, 17939, 22787, 26561, 30593, 32381, 34963, 41611, 48823, 66047, 75041, 118297, 139123, 196247, 293749, 326023, 339887, 374537, 410857, 465119, 505513, 609929,…

Si recorres la tabla en la que hemos destacado tanto triangulares como cuadrados lo comprobarás:

Primos	Entreprimos				
2					
3	4				
5	6				
7	8	9	10		
11	12				
13	14	15	16		
17	18				
19	20	21	22		
23	24	25	26	27	28
29	30				
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		
41	42				
43	44	45	46		
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60				
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70		

El 3 posee dos destacados, pero hemos de desecharlo por no ser entreprimo. Después siguen con dos destacados 7, 13 y 23. El 31 sólo tiene uno, pero es que 36 es a la vez triangular y cuadrado.

Se puede reproducir el listado con este código para VBA, fácilmente trasladable a otros lenguajes:

```
If esprimo(i) Then

c = primprox(i)
a = 0
b = 0
For k = i + 1 To c - 1
If escuad(k) Then a = a + 1: m = k
Next k
For k = i + 1 To c - 1
If estriangular(k) Then b = b + 1: n = k
Next k
If a > 0 And b > 0 Then
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 6).Value = i
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 7).Value = m
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 8).Value = n
'ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 9).Value = b
'ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 10).Value = c
fila = fila + 1
End If
End If
```

Potencias de primo no triviales

Entre dos primos consecutivos es normal que se intercale la potencia de otro primo. Por ejemplo, entre 7 y 11 figuran 2^3 y 3^2. Está publicada la lista de los primos que poseen al menos un entreprimo potencia no trivial de otro primo. Los primeros son estos:

3, 7, 13, 23, 31, 47, 61, 79, 113, 127, 167, 241, 251, 283, 337, 359, 509, 523, 619, 727, 839, 953, 1021, 1327, 1367, 1669, 1847, 2039, 2179, 2207,…(http://oeis.org/A053607)

Por ejemplo, el 619 tiene como siguiente primo 631, y entre ambos aparece 625=5^4.

No obstante, que aparezcan dos potencias es mucho más difícil. Sólo se han encontrado cinco ejemplos menores que 2^63: 7, 23, 113, 2179, 32749 (http://oeis.org/A053706) El 7 ya lo hemos analizado. El 2179, por ejemplo, contiene las potencias 3^7 y 13^3 antes de llegar al próximo primo 2203.

.

"PALPRIMOS" (PRIMOS PALINDRÓMICOS)

Tomamos la palabra *palprimo* directamente del inglés, pero si te apetece, nómbralos como *primos palindrómicos*.

Según se deduce del nombre, los *palprimos* son números primos capicúas o palindrómicos (nos limitaremos al sistema de numeración en base 10 por ahora), es decir, que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Los números de una sola cifra se suelen considerar palindrómicos (en realidad, cumplen la definición), por lo que es fácil entender que los primeros *palprimos* son

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721,…(https://oeis.org/A002385)

Para identificarlos con hoja de cálculo necesitaremos la función ESPRIMO y la ESCAPICUA. Disponemos de las dos en nuestra colección, por lo que nos limitaremos a copiarlas aquí.

```
Public Function esprimo(a) As Boolean
Dim n, r
Dim es As Boolean

'Devuelve true si es primo.
es = False
If a = Int(a) Then  ‘Ha de ser entero
If a = 1 Then es = False ‘Casos particulares
If a = 2 Then es = True
If a > 2 Then
If a / 2 = Int(a / 2) Then ‘Descarta los pares
es = False
Else
n = 3: es = True: r = Sqr(a) ‘Busca posibles divisores
 While n <= r And es = True
 If a / n = Int(a / n) Then es = False ‘Si se encuentra un divisor se declara compuesto
 n = n + 2
 Wend
End If
```

```
End If
End If
esprimo = es
End Function

Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$
 'Convierte el número en texto para lograr más rapidez. Devuelve VERDADERO si es palindrómico o capicúa
auxi = haztexto(n) ‘Se puede usar la función STR$ del Basic
l = Len(auxi)
If l < 2 Then
escapicua = False
Else
c = True
i = 1
k = Int(l / 2)
While i <= k And c
  If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c = False ‘Va comparando cada dígito con su simétrico
  i = i + 1
  Wend
End If
escapicua = c
End Function
```

Con estas dos funciones podemos encontrar *palprimos* en cualquier intervalo, contarlos u operar con ellos. Por ejemplo, con esta rutina podemos destacar los existentes en un intervalo:

Sub buscapalprimos()

Dim i,j
i = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 7).Value ‘Suponemos que el intervalo está
j = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 8).Value ‘alojado en las celdas G6 y H6.
fila = 15 ‘Inicio del listado
For i = j To I
If esprimo(i) And escapicua(i) Then
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 6).Value = i ‘Se presenta e incrementamos la fila
fila = fila + 1
End If
Next i
End Sub

Aquí tienes el listado de los palprimos comprendidos entre 10000 y 11000:

10301
10501
10601

Como ves, muy pocos. Entre 1000000 y 1100000 sólo encontramos estos:

1003001
1008001
1022201
1028201
1035301
1043401
1055501
1062601
1065601
1074701
1082801
1085801
1092901
1093901

Antes de seguir adelante, quizás te hayas percatado de que no existen palprimos con un número de cifras par, porque entonces serían múltiplos de 11, y no primos, como le ocurre a 1771, que es igual a 7*11*23. Así que siempre nos referiremos a un número impar de cifras.

Se ha conjeturado que existen infinitos primos palídrómicos. Unos de los mayores encontrados es

$10^{320236} + 10^{160118} + (137\times10^{160119} + 731\times10^{159275}) \times (10^{843} - 1)/999 + 1$

(Tomado de Wikipedia)

Entre los mayores conocidos se encuentra el número de Belfegor, 1000000000000066600000000000001, llamado así por sus referencias al número de la bestia, 666.

La anterior rutina para destacar palprimos en un intervalo se puede transformar en una función que los cuente simplemente, sin tener que mostrarlos. Su estructura sería muy similar:

```
Public Function cuentapalprimos(m, n)

Dim i, c
c = 0
For i = m To n
If esprimo(i) And escapicua(i) Then c = c + 1
Next i
cuentapalprimos = c
End Function
```

Con esta función comprobamos que entre 10000 y 11000 existen tres, que son los que presentamos arriba, y entre 1000000 y 1100000, los catorce reseñados.

Con un poco de paciencia se puede obtener el número de palprimos para cada número de cifras: De tres cifras existen 15, de cinco 93 y de siete 668. El resto requiere de otras herramientas. Tienes los datos en http://oeis.org/A016115

Suma de inversos

Se ha comprobado que la suma de inversos de los primeros palprimos converge a una constante cuyos primeros decimales son 1.32398… Pondremos a prueba la capacidad de nuestra hoja de cálculo: buscaremos los primeros con la rutina presentada más arriba, hallaremos sus inversos y posteriormente la suma de estos. Como la tabla resultará larga, copiaremos sólo los primeros y últimos términos:

Palprimo	Inverso	Suma
2	0,5	0,5
3	0,333333333	0,83333333
5	0,2	1,03333333
7	0,142857143	1,17619048
11	0,090909091	1,26709957
101	0,00990099	1,27700056
131	0,007633588	1,28463414
151	0,006622517	1,29125666
181	0,005524862	1,29678152
191	0,005235602	1,30201713

1028201	9,72572E-07	1,32375234
1035301	9,65903E-07	1,32375331
1043401	9,58404E-07	1,32375427
1055501	9,47417E-07	1,32375521
1062601	9,41087E-07	1,32375615
1065601	9,38438E-07	1,32375709
1074701	9,30491E-07	1,32375802
1082801	9,23531E-07	1,32375895
1085801	9,20979E-07	1,32375987
1092901	9,14996E-07	1,32376078
1093901	9,1416E-07	1,3237617

Podíamos seguir con más cifras, pero ya vemos la tendencia a la constante límite. Con hoja de cálculo es preferible dejarlo aquí.

Hemos probado con los inversos de los cuadrados y ha aparecido una convergencia más fuerte (como era de esperar) hacia la constante 0,43008339502. Puedes probar otras posibilidades.

SEMIPRIMOS CONSECUTIVOS

No es la primera vez que relacionamos semiprimos. En una entrada anterior

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2016/04/volvemos-los-numeros-arolmar-5.html)

describimos los semiprimos arolmar. También hemos publicado en OEIS sucesiones relacionadas con ellos, como http://oeis.org/A187400.

Los semiprimos son aquellos números en cuya descomposición factorial aparecen sólo dos números primos, iguales, como en 9=3*3, o distintos, 6=2*3. Aquí no exigiremos que los dos factores de estos números sean distintos, por lo que nuestro estudio abarcará también los cuadrados de primos, es decir, todo el conjunto

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 106, 111, 115, 118,…

(http://oeis.org/A001358)

Todos ellos se caracterizan mediante la función BIGOMEGA, que cuenta los factores de cada número contando las repeticiones. En nuestro caso basta exigir que BIGOMEGA valga 2 para asegurar que un número es semiprimo. Si deseáramos que los factores fueran distintos, también nos aseguraríamos de que OMEGA, que cuenta los factores sin repetición, también valiera 2.

A partir de ahora nos dedicaremos a los semiprimos consecutivos, como 10=2*5 y 14=2*7. En este caso comparten el factor 2, pero esto no ocurre en general, hay consecutivos que no comparten factores, como 51=3*17 y 55=5*11.

Una primera cuestión que nos plantearemos es si la suma o diferencia de dos semiprimos consecutivos puede ser también un número semiprimo. Tenemos implementada la función ESSEMIPRIMO para hojas de cálculo, lo que facilita las búsquedas.

```
Public Function essemiprimo(n) As Boolean
Dim a, b

a = mayordiv(n)
b = n / a
If esprimo(a) And esprimo(b) Then essemiprimo = True Else essemiprimo = False
End Function
```

El problema es que usa la función mayordiv, por lo que lo dejamos aquí y pasamos al lenguaje PARI, que posee todas las funciones implementadas, es gratuito y de no muy difícil aprendizaje. En este lenguaje los semiprimos se caracterizan con la condición

bigomega(p)==2

Cada vez que encuentres una expresión similar en nuestras codificaciones sabrás que nos referiremos a que ese número es semiprimo.

Por ejemplo, con esta condición se puede encontrar el semiprimo más pequeño que es mayor que n mediante esta función:

```
proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if
(bigomega(p)==2,s=1;r=p)); return p}
```

En esta función la variable p va avanzando de unidad en unidad (p+=1) y creamos un bucle que no para hasta encontrar un semiprimo (***bigomega(p)==2)***, en cuyo caso la variable de control **s** pasa de 0 a 1, para salir del bucle.

Si esta función la aplicamos a un semiprimo p, obtendremos un par de semiprimos consecutivos, con p y proxsem(p), que es la estructura con la que vamos a comenzar este estudio.

Semiprimos consecutivos con suma también semiprima

Muchos pares de semiprimos consecutivos cumplen esto para la suma. Los primeros son:

4	[2,2]	6	[2,1][3,1]	10	[2,1][5,1]
6	[2,1][3,1]	9	[3,2]	15	[3,1][5,1]
25	[5,2]	26	[2,1][13,1]	51	[3,1][17,1]
34	[2,1][17,1]	35	[5,1][7,1]	69	[3,1][23,1]
38	[2,1][19,1]	39	[3,1][13,1]	77	[7,1][11,1]
39	[3,1][13,1]	46	[2,1][23,1]	85	[5,1][17,1]
46	[2,1][23,1]	49	[7,2]	95	[5,1][19,1]
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	106	[2,1][53,1]
57	[3,1][19,1]	58	[2,1][29,1]	115	[5,1][23,1]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	134	[2,1][67,1]
69	[3,1][23,1]	74	[2,1][37,1]	143	[11,1][13,1]
77	[7,1][11,1]	82	[2,1][41,1]	159	[3,1][53,1]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	178	[2,1][89,1]
93	[3,1][31,1]	94	[2,1][47,1]	187	[11,1][17,1]
95	[5,1][19,1]	106	[2,1][53,1]	201	[3,1][67,1]

En la tabla, creada con Excel, figura junto a cada número su descomposición en factores, sabiendo que el primer número del corchete es el factor primo y el segundo su exponente. Las dos primeras columnas contienen el par de semiprimos consecutivos y en la tercera su suma, también semiprima. Nos sorprendió su abundancia, pues creíamos que no aparecerían muchos.

Algunos comparten un factor, como 6, 9 y su suma 15, pero no es lo normal, En este caso, y en el anterior de 4, 6 y 10, es posible porque 2+3=5, suma prima de primos que sólo se da en los primos gemelos, pero según hemos observado, no dan lugar a semiprimos consecutivos. En la misma tabla, un poco más abajo, vemos que 34=2*17 no es consecutivo con 38=2*19, ya que se interpone 35=5*7. No hemos encontrado otros ejemplos con factores comunes.

Debemos inferir que aquí influye más la casualidad que las propiedades de los semiprimos en el hecho de que aparezca suma semiprima, como ocurre en el último ejemplo, en el que el par está formado por 129=3*43, 133=7*19 y su suma 262=2*131. Si recorres la tabla observarás que este caso se repite: dos semiprimos impares que suman un par con factor 2 y otro primo. No parece existir otra relación entre ellos.

Para buscarlos con PARI puedes usar esta codificación:

proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if (bigomega(p)==2,s=1;r=p));p}

{for(i=1,2000,if(bigomega(i)==2,a=proxsem(i);if(bigomega(a+i)==2,print1(i,", ")))))}

En la primera línea se define la función proxsem (próximo semiprimo) y en la segunda se emprende la búsqueda. El resultado es, para el primer semiprimo del par, el siguiente:

4, 6, 25, 34, 38, 39, 46, 51, 57, 65, 69, 77, 87, 93, 95, 106, 111, 118, 129, 133, 145, 146, 161, 166, 169, 177, 178, 187, 194, 201, 205, 206, 209, 213, 218, 221, 249, 262, 278, 291, 298, 305, 309, 314, 323, 334, 335, 341, 355, 361, 377, 381, 394, 395, 407, 422, 446, 447, 473, 478, 485, 489, 497, 501, 502, 559, 566, 583, 626, 629, 633, 655, 662, 671, 681, 689, 694, 698, 699, 723,…

Este resultado estaba inédito y lo hemos publicado en http://oeis.org/A272306.

Semiprimos consecutivos con diferencia también semiprima

Estos otros semiprimos se diferencian en un semiprimo con el siguiente semiprimo.

10, 15, 51, 58, 65, 87, 111, 123, 129, 146, 209, 226, 237, 249, 274, 278, 291, 305, 335, 346, 365, 371, 377, 382, 403, 407, 427, 447, 454, 485, 489, 493, 497, 505, 529, 538, 545, 573, 591, 597, 629, 635, 649, 681, 699, 707, 713, 749, 767, 781, 785, 803, 807, 831, 843, 889, 901, …

Los hemos obtenido en PARI con el código

proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if (bigomega(p)==2,s=1;r=p));p}

{for(i=1,2000,if(bigomega(i)==2,a=proxsem(i);if(bigo mega(a-i)==2,print1(i,", "))))}

Con Excel:

10	[2,1][5,1]	14	[2,1][7,1]	4	[2,2]
15	[3,1][5,1]	21	[3,1][7,1]	6	[2,1][3,1]
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	4	[2,2]
58	[2,1][29,1]	62	[2,1][31,1]	4	[2,2]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	4	[2,2]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	4	[2,2]
111	[3,1][37,1]	115	[5,1][23,1]	4	[2,2]
123	[3,1][41,1]	129	[3,1][43,1]	6	[2,1][3,1]
129	[3,1][43,1]	133	[7,1][19,1]	4	[2,2]
146	[2,1][73,1]	155	[5,1][31,1]	9	[3,2]
209	[11,1][19,1]	213	[3,1][71,1]	4	[2,2]
226	[2,1][113,1]	235	[5,1][47,1]	9	[3,2]
237	[3,1][79,1]	247	[13,1][19,1]	10	[2,1][5,1]
249	[3,1][83,1]	253	[11,1][23,1]	4	[2,2]
274	[2,1][137,1]	278	[2,1][139,1]	4	[2,2]
278	[2,1][139,1]	287	[7,1][41,1]	9	[3,2]
291	[3,1][97,1]	295	[5,1][59,1]	4	[2,2]
305	[5,1][61,1]	309	[3,1][103,1]	4	[2,2]
335	[5,1][67,1]	339	[3,1][113,1]	4	[2,2]
346	[2,1][173,1]	355	[5,1][71,1]	9	[3,2]
365	[5,1][73,1]	371	[7,1][53,1]	6	[2,1][3,1]
371	[7,1][53,1]	377	[13,1][29,1]	6	[2,1][3,1]

No debemos pensar que esta tabla equivale a la anterior con las columnas cambiadas, pues fallaría el hecho de que los semiprimos han de ser consecutivos. Hemos publicado esta sucesión en http://oeis.org/A272307

Intersección de ambos

Un subconjunto interesante de la primera sucesión (A272306) es el siguiente, su intersección con A272307:

51, 65, 87, 111, 129, 146, 209, 249, 278, 291, 305, 335, 377, 407, 447, 485, 489, 497, 629, 681, 699, 749, 767, 785, 917, 939, 951, 989, 1007, 1018, 1037, …

Recogemos en la tabla cada término con su siguiente semiprimo y la diferencia entre ambos

N1		N2		SUMA		DIFERENCIA	
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	106	[2,1][53,1]	4	[2,2]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	134	[2,1][67,1]	4	[2,2]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	178	[2,1][89,1]	4	[2,2]
111	[3,1][37,1]	115	[5,1][23,1]	226	[2,1][113,1]	4	[2,2]
129	[3,1][43,1]	133	[7,1][19,1]	262	[2,1][131,1]	4	[2,2]
146	[2,1][73,1]	155	[5,1][31,1]	301	[7,1][43,1]	9	[3,2]
209	[11,1][19,1]	213	[3,1][71,1]	422	[2,1][211,1]	4	[2,2]
249	[3,1][83,1]	253	[11,1][23,1]	502	[2,1][251,1]	4	[2,2]
278	[2,1][139,1]	287	[7,1][41,1]	565	[5,1][113,1]	9	[3,2]
291	[3,1][97,1]	295	[5,1][59,1]	586	[2,1][293,1]	4	[2,2]
305	[5,1][61,1]	309	[3,1][103,1]	614	[2,1][307,1]	4	[2,2]
335	[5,1][67,1]	339	[3,1][113,1]	674	[2,1][337,1]	4	[2,2]
377	[13,1][29,1]	381	[3,1][127,1]	758	[2,1][379,1]	4	[2,2]
407	[11,1][37,1]	411	[3,1][137,1]	818	[2,1][409,1]	4	[2,2]
447	[3,1][149,1]	451	[11,1][41,1]	898	[2,1][449,1]	4	[2,2]

No siempre resultan cuadrados en la diferencia, después aparecen otros semiprimos. El primero que aparece es el 15, correspondiente al semiprimo 5818 y su consecutivo 5833.

Números consecutivos, ambos semiprimos, cuya suma es semiprima:

Dos semiprimos consecutivos pueden serlo también como números (N y N+1). Ya están publicados en http://oeis.org/A188059 (sólo el semiprimo más pequeño del par)

25, 34, 38, 57, 93, 118, 133, 145, 177, 201, 205, 213, 218, 298, 334, 361, 381, 394, 446, 501, 633, 694, 698, 842, 865, 878, 898, 921, 1114, 1141, 1226, 1285,…

Por ejemplo, 57=3*19, 58=2*29, y su suma 115=5*23 también es semiprimo.

Semiprimos consecutivos que suman un primo

Terminamos con otras dos curiosidades, aunque podríamos abordar más. Dos semiprimos consecutivos pueden producir un número primo al sumar o restar. Estos que siguen suman un primo:

9, 14, 21, 22, 26, 33, 35, 62, 74, 82, 86, 115, 141, 155, 158, 226, 259, 267, 295, 326, 346, 358, 362, 393, 417, 453, 482, 623, 703, 718, 734, 771, 799, 914, 933, 934, 955, 995, …

Por ejemplo, 33=3*11 es semiprimo. Su consecutivo es 34=2*17, y su suma 67 es prima.

Los hemos publicado en http://oeis.org/A272308, y puedes estudiar allí varias formas de generarlos.

Igualmente, existen semiprimos consecutivos con diferencia prima. Los primeros son:

4, 6, 22, 26, 35, 39, 46, 49, 55, 62, 69, 74, 77, 82, 91, 95, 106, 115, 119, 134, 143, 155, 159,… y los hemos publicado en http://oeis.org/A272309

Por ejemplo 69=3*23 y 74=2*37 se diferencian en 7, que es primo.

OTRA VEZ LOS POLIGONALES

DAMOS VUELTAS A LOS TRIANGULARES CUADRADOS

Generación de la sucesión

Dos entradas del blog de John D. Cook

(http://www.johndcook.com/blog/2015/08/20/when-is-a-triangle-a-square/ y siguiente) me han animado a volver a tomar el tipo de entrada al que llamé "dar vueltas" a un tema o concepto. Lo haré sobre estos números:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,…

(http://oeis.org/A001110)

Evidentemente, estos números tienen en común el ser triangulares y cuadrados a la vez. Puedes leer un desarrollo sencillo y claro en este documento:

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_IV_num_1/jue_mat_num_triang.pdf

Me he dado cuenta de que es un concepto sencillo pero que da lugar a bastantes reflexiones, algoritmos y repasos de teoría.

Nosotros seguiremos en parte este documento para iniciar el tema.

Búsqueda de números triangulares cuadrados

Un número triangular tiene por fórmula n(n+1)/2 y un cuadrado m^2. Aquellos números que participen de las dos características tendrán que cumplir la igualdad

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

De esta igualdad deducimos esta otra mucho más práctica:

$$n^2 + n + \frac{1}{4} - 2m^2 - 1/4 = (n + \frac{1}{2})^2 - 2m^2 - 1/4 = 0$$

O bien

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Con cambio de variable se convierte en una ecuación de Pell:

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Esta ecuación la tenemos muy estudiada

http://hojamat.es/parra/pell.pdf (documento de Rafael Parra)

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html

Disponemos además de una hoja de cálculo para ayudar a resolverla:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

Usamos esta herramienta para el coeficiente 8 y el segundo miembro 1 y nos dan las primeras soluciones:

› cuadrado perfecto)				8										
mbro, +1 ó -1				1										
	2	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	2	3	14	17	82	99	478	577	2786	3363	16238	19601	94642	114243
0	1	1	5	6	29	35	169	204	985	1189	5741	6930	33461	40391
	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1	-4	1
		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución		Solución

(1,0) (3,1) (17,6) (99,35) (577,204) (3363,1189) (19601,6930) (114243, 40391),…

Por recurrencia:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Según la teoría de la ecuación de Pell, las soluciones aparecen con las recurrencias (en este caso) $x_n=3*x_{n-1}+8*y_{n-1}$ $y_n=3*y_{n-1}+1*x_{n-1}$. Por ejemplo, 99=3*17+8*6, 35=3*6+1*17.

Ahora sólo nos queda elevar al cuadrado las soluciones de **y** (que equivalen a la variable **m** de la primera igualdad que planteamos) y nos resultarán los triangulares cuadrados:

0^2=0, 1^2=1, 6^2=36, 35^2=1225, 204^2=41616, 1189^2= 1413721,…

Primer algoritmo

El estudio que acabamos de desarrollar nos da una pista para la generación de términos triangulares cuadrados: Iniciamos dos variables X=1, Y=0, y en cada paso del algoritmo convertimos X en 3X+8Y y la Y en 3Y+X. Terminado el cálculo presentamos el valor de Y^2 como siguiente triangular cuadrado. En el Basic de las hojas de cálculo quedaría así:

Sub triangcuad()
Dim x, y, x1, y1, i, t, fila

x = 1: y = 0 ‘Valores de inicio
fila = 3 ‘Fila inicial
Cells(fila, 4).Value = 0 ‘El primer valor es un cero
For i = 1 To 8 ‘Calculamos sólo ocho
x1 = 3 * x + 8 * y ‘Iteración para x
y1 = 3 * y + x ‘Iteración para y
x = x1
y = y1
t = y * y ‘Número triangular cuadrado
fila = fila + 1

Cells(fila, 4).Value = t *‘*Se presenta el resultado
Next i
End Sub

Obtendríamos:

0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
5,5421E+10

El que el último se nos ofrezca en coma flotante nos da idea de las limitaciones de la hoja para cálculos con enteros de muchas cifras. Si acudimos a PARI no nos encontraremos con esas limitaciones. Prueba este código:

{x=1;y=0;print(0);while(x<10^10,x1=3*x+8*y;y1=3*y+x;x=x1;y=y1;t=y^2;print(t))}

```
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056
1882672131025
63955431761796
2172602007770041
73804512832419600
2507180834294496361
85170343853180456676
?
```

En pocos segundos te presenta los triangulares cuadrados menores que 10^10.

Relación de recurrencia con una sola variable

Por la naturaleza de su definición podemos esperar que estos números sigan una relación de recurrencia de segundo orden. Para encontrar su expresión, que será del tipo

$A_n=aA_{n-1}+bA_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 36, 1225, 41616 para plantear:

36=a*1+b*0+c
1225=a*36+b*1+c
41616=a*1225+b*36+c

Resolvemos

1189=35a+b

40391=1189a+35b

1224=36a y a=34, b=-1 y c=2

Según los cálculos anteriores, la relación de recurrencia será

$A_n=34A_{n-1}-A_{n-2}+2$

Es la misma que propone John D. Cook en su blog.

En este blog no olvidamos la hoja de cálculo. Intenta una resolución como la de la imagen usando cálculo matricial:

B	C	D	E	F
1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616

A partir de esta escritura matricial del sistema de ecuaciones, creamos debajo la matriz inversa de los coeficientes con MINVERSA, y a su derecha su producto por los términos independientes con MMULT:

1	0	1		36
36	1	1		1225
1225	36	1		41616
-0,97222222	1	-0,02777778		34
33,0277778	-34	0,97222222		-1
1,97222222	-1	0,02777778		2

Conseguimos así la misma solución 34, -1, 2

Segundo algoritmo

La relación de recurrencia nos permite un segundo algoritmo para encontrar los triangulares cuadrados. El que describimos a continuación presenta los nueve primeros (después existen problemas de coma flotante)

Sub triancuad1()
Dim m, n, p, k, fila
m = 0: n = 1 ‘Valores iniciales
fila = 3

Cells(1, 3).Value = m ‘presenta los dos primeros términos
Cells(2, 3).Value = n
For k = 1 To 7
p = 34 * n - m + 2 ‘relación de recurrencia
Cells(fila, 3).Value = p: fila = fila + 1 ‘presenta los siguientes términos
m = n: n = p ‘cada término se convierte en el anterior
Next k
End Sub

Los términos rellenarán una columna de hoja de cálculo:

C
0
1
36
1225
41616
1413721
48024900
1631432881
55420693056

Siguiendo nuestra costumbre, lo traducimos a PARI para conseguir más términos:

{x=0;y=1;print(0);print(1);for (k=1, 20, z=34*y-x+2;print(z);x=y;y=z)}

No resistimos la tentación, al igual que propone J.C. Cook, de intentar una versión recursiva en forma de función. Funciona muy bien en hoja de cálculo:

Public Function ftriangcuad(n)
If n < 2 Then
ftriangcuad = n
Else
ftriangcuad = 34 * ftriangcuad(n - 1) - ftriangcuad(n - 2) + 2
End If
End Function

No necesita explicación. La tabla siguiente se forma con gran rapidez de cálculo:

N	Ftriangcuad(N)
0	0
1	1
2	36
3	1225
4	41616
5	1413721
6	48024900
7	1631432881
8	55420693056

Fórmula directa

Si lees el capítulo sobre sucesiones recurrentes en nuestra publicación ***Sucesiones***

(http://www.hojamat.es/publicaciones/sucesiones.pdf) entenderás que a partir de la fórmula de recurrencia es posible encontrar la expresión directa de cada término (fórmula del término general). Sólo insertamos la captura de pantalla de nuestra hoja de cálculo ***Recurrencias***

(http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

en la parte homogénea de la recurrencia:

	Ecuación característica		**Resolver**
Discriminante	**1152**		
	Dos raíces reales		
	Z1= 33,97056		**Z2= 0,02944**
Solución general			
	0,02946		**-0,02946**
Expresión X(n)= .02946*(33.97056)^n+-.02946*(.02944)^n)			

Con un ligero retoque y la interpretación de los decimales llegamos a la propuesta por John D. Cook:

$$A(n)=\frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^{n}+\left(17-12\sqrt{2}\right)^{n}-2}{32}$$

El uso de la raíz cuadrada de 2 le quita utilidad en nuestro trabajo, por lo que intentaremos prescindir de ella. Para ver la influencia del formato de coma flotante, la implementamos en hoja de cálculo, y el resultado es similar al de los algoritmos anteriores:

A=	17+12√2	33,97056275	
B=	17-12√2	0,029437252	
	n	Fórmula directa	(A^n+B^n-2)/32
	0	0	
	1	1	
	2	36	
	3	1225	
	4	41616	
	5	1413721	
	6	48024900	
	7	1631432881	
	8	55420693056	
	9	1,88267E+12	

Función generatriz

Para quien no lo sepa, diremos que la función generatriz de una sucesión, si se desarrolla como una serie de potencias, poseerá como coeficientes de esas potencias de x los términos de la sucesión.

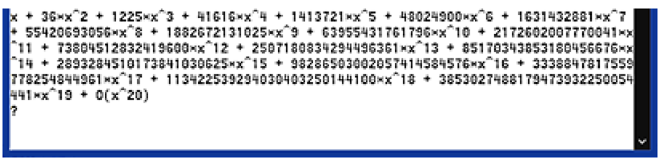
En el caso de los números triangulares cuadrados la función generatriz es

$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-34x+x^2)}$$

(ver http://oeis.org/A001110)

Con esta sencilla orden de PARI podemos comprobar su desarrollo.

print(taylor(x*(1+x)/((1-x)*(1-34*x+x^2)),x,20))



```
x + 36*x^2 + 1225*x^3 + 41616*x^4 + 1413721*x^5 + 48024900*x^6 + 1631432881*x^7
+ 55420693056*x^8 + 1882672131025*x^9 + 63955431761796*x^10 + 2172602007770041*x
^11 + 73804512832419600*x^12 + 2507180834294496361*x^13 + 85170343853180456676*x
^14 + 2893284510173841030625*x^15 + 98286503002057414584576*x^16 + 3338847817559
778254844961*x^17 + 113422539294030403250144100*x^18 + 3853027488179473932250054
441*x^19 + O(x^20)
?
```

Tercer algoritmo

Finalizamos el estudio con la presentación de un algoritmo de los que llamamos “ingenuos”, que no usan la teoría para simplificar los cálculos, pero sí la fuerza bruta de la velocidad de proceso. En este caso obligaremos a los números naturales a ir creciendo hasta alcanzar un cuadrado, y después a la inversa, que los cuadrados avancen hasta alcanzar un triangular. Cuando se llegue a una igualdad se imprime el resultado. A pesar de su simplicidad, no resulta lento. Es éste:

Sub triancuad2()
Dim i, j, m, n, k, fila
m = 3: n = 4: i = 2: j = 3 ‘Se inician las variables
k = 10 ^ 7
fila = 3
Cells(fila, 3).Value = 1: fila = fila + 1
While m < k ‘Busca soluciones menores que ***k***
While m <= n ‘Los triangulares crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1 ‘Hay igualdad
i = i + 1: m = m + i
Wend
While n <= m ‘Los cuadrados crecen
If m = n Then Cells(fila, 3).Value = m: fila = fila + 1‘Hay igualdad
j = j + 2: n = n + j
Wend
Wend
End Sub

Dejamos a los lectores el estudio de por qué funciona este algoritmo para descubrir los triangulares cuadrados. Como los anteriores, llega a los mismos resultados, en este caso hasta 10^7:

C
1
36
1225
41616
1413721

Curiosidades.

En el anterior apartado generamos los números que son a la vez triangulares y cuadrados mediante varios algoritmos y fórmulas directas, tanto para hojas de cálculo como en el lenguaje PARI, e incluso a través de una función recursiva. Ahora veremos algunas de sus propiedades y curiosidades sobre ellos.

Otra recurrencia

Según un comentario incluido en

http://oeis.org/A001110, podemos tener en cuenta otra recurrencia a partir de n=3:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_{n-1}}$$

En efecto, $1225=(36-1)^2/1$, $41616=(1225-1)^2/36$, … O con hoja de cálculo:

A(n)	(A(n)-1)^2/A(n-1)
0	
1	
36	1225
1225	41616
41616	1413721
1413721	48024900
48024900	1631432881
1631432881	55420693056

Intenta averiguar cómo crear esta tabla siguiendo la recurrencia. La podemos expresar también como que la media geométrica entre el anterior y el siguiente a un término coincide con el cuadrado de ese término al que se le ha restado una unidad.

Una propiedad similar es que la media geométrica entre un término y el siguiente es también un número triangular. Lo tienes en esta tabla. Escribe los triangulares cuadrados e intenta después reproducirla:

A(n)	RAIZ(A(n)*A(n+1))	Orden como triangular
0		
1		
36	6	3
1225	210	20
41616	7140	119
1413721	242556	696
48024900	8239770	4059
1631432881	279909630	23660

En http://oeis.org/A029549 tienes estudiadas esas medias geométricas y puedes descubrir que estos números son oblongos y también su conexión con ciertas ternas pitagóricas. A partir de esta sucesión se abren tantos caminos que es mejor parar aquí.

Por otra parte, por ser cuadrados, los términos son suma de dos triangulares consecutivos, luego los triangulares cuadrados son “triangulares suma de dos triangulares consecutivos”

Raíz cuadrada

Ya que tratamos con cuadrados, sería interesante estudiar sus raíces cuadradas, que son estas:

0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214, 46611179, 271669860,…

(http://oeis.org/A001109)

Estos números no nos son desconocidos, pues son soluciones de la incógnita Y en la ecuación de Pell que usamos para encontrar sus cuadrados

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Insertamos de nuevo la tabla que obtuvimos:

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Más adelante veremos alores relacionados con la variable X.

Recurrencia entre las raíces

Al igual que sus cuadrados, estos números se pueden generar mediante una recurrencia de segundo grado. Para descubrirla operamos como en anteriores ocasiones.

$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}+c$ usaremos los valores iniciales 0, 1, 6, 35, 204 para plantear:

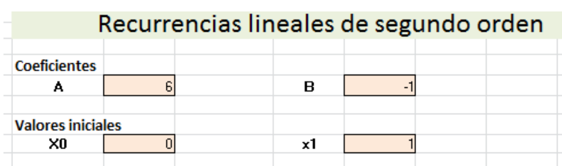
6=a*1+b*0+c
35=a*6+b*1+c
204=a*35+b*6+c
Resolvemos

29=5a+b
169=29a+5b
169-5*29=169-145=24=4a   a=6, b=-1, c=0
Luego $\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}}$, que es la recursión que figura en A001109

Esta recurrencia la podemos comprobar con nuestra hoja de cálculo dedicada a ellas

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Escribimos los coeficientes 6 y -1



Y obtenemos la sucesión

Sucesión	0
	1
	6
	35
	204
	1189
	6930
	40391
	235416
	1372105
	7997214
	46611179

Orden como triangulares

Al igual que hemos estudiado las raíces cuadradas de los triangulares cuadrados, también podemos fijar la atención en su orden como triangulares.

Para ello planteamos k(k+1)/2=A(n), siendo A(n) un término de la sucesión de triangulares cuadrados. Es fácil ver que la solución será

$$k = \frac{\sqrt{8A(n)+1}-1}{2}$$

Se generará esta otra sucesión:

1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449, 11309768, 65918161, 384199200,…

(http://oeis.org/A001108)

También estos números están relacionados con la ecuación de Pell vista anteriormente

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

X	Y	
3	1	+1 ó -1
17	6	1
99	35	1
577	204	1
3363	1189	1
19601	6930	1
114243	40391	1
665857	235416	1

Basta recordar que llamamos x a 2n+1. Deshaciendo el cambio en la tabla:

(3-1)/2=1, (17-1)/2=8, (99-1)/2=49, (577-1)/2=288,… y así resultarán todos.

Según OEIS, su fórmula recursiva es idéntica a la de los anteriores, pero con término independiente igual a 2:

$\mathbf{D_n=6D_{n-1}-D_{n-2}+2}$

Para no cansar a los lectores nos limitamos a comprobarla.

8=6*1-0+2, 49=6*8-1+2, 288=6*49-8+2,…

Diferencias entre términos

Si restamos cada dos términos consecutivos, el resultado coincide con las raíces cuadradas de los términos de orden impar. Es una propiedad muy curiosa, pero no he encontrado ninguna demostración elemental de la misma.

N	Triangulares cuadrados	Diferencias	Diferencias al cuadrado
0	0	0	
1	1	1	1
2	36	35	1225
3	1225	1189	1413721
4	41616	40391	1631432881
5	1413721	1372105	1,88267E+12
6	48024900	46611179	2,1726E+15
7	1631432881	1583407981	2,50718E+18
8	55420693056	53789260175	2,89328E+21

En la tabla, si elevamos las diferencias al cuadrado nos resultan los términos de orden impar. Son los de color rojo enlazados con flechas. Si, además, encontráramos su orden como triangulares, sería un cuadrado (compruébalo), y ellos mismos, además de triangulares serían ***hexagonales***. Bastante curioso, como ves.

Recurrencia directa

Lekraj Beedassy, en http://oeis.org/A001110, propone la siguiente recurrencia no lineal que sólo depende del término anterior:

$$a_{n+1} = 1 + 17a_n + 6\sqrt{a_n + 8{a_n}^2}$$

Esta propiedad permite engendrar de nuevo los números triangulares cuadrados en una hoja de cálculo directamente, sin macros, y con gran rapidez, con una fórmula similar a **=1+17*I5+6*RAIZ(I5+8*I5^2)**, donde puedes sustituir I5 por el término anterior de la sucesión.

PRIMOS DE FIBONACCI

Hoy estudiaremos otra conjetura bastante popular:

Existen infinitos números de Fibonacci que son primos.

Así que si construimos la sucesión de Fibonacci y elegimos los términos que sean primos, encontraremos uno de ellos que sea mayor que cualquier otro entero que imaginemos. Aprovecharemos esta conjetura para repasar conceptos, construir algoritmos y explicar algunas propiedades de los números de Fibonacci.

Los primeros primos de Fibonacci son estos:

2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073, 99194853094755497,…

(http://oeis.org/A005478)

Según la conjetura, esta sucesión debería tener infinitos términos. No es intuitivo, porque en cada aumento de índice resulta más improbable que el término correspondiente sea primo, pero así son las conjeturas, que se encuentran a veces en el término de separación entre lo imposible e improbable.

Comprobación de la conjetura

En la hoja CONJETURAS

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#conjeturas)

dispones de las funciones necesarias para comprobar la conjetura, se entiende que en unos pocos ejemplos. La primera, ESPRIMO, ya ha sido presentada muchas veces en este blog (escribe ESPRIMO HOJA en un navegador de Internet), pero necesitamos otra, ESFIBO, que nos indica si un número pertenece o no a la sucesión de Fibonacci. Esta función se basa en un popular criterio para saber si un número es de Fibonacci o no: ***Un número N pertenece a la sucesión de Fibonacci si y sólo si $5N^2+4$ o $5N^2-4$ es un cuadrado perfecto.***

(Ver http://gaussianos.com/algunas-curiosidades-sobre-los-numeros-de-fibonacci/)

Según eso, ésta puede ser la función que devuelva VERDADERO si un número es del tipo Fibonacci y FALSO en el caso opuesto:

Public Function esfibo(n) As Boolean 'devuelve verdadero si N es de Fibonacci
Dim f As Boolean
Dim a

f = False

a = 5 * n * n + 4
If escuad(a) Then f = True
a = 5 * n * n - 4
If escuad(a) Then f = True
esfibo = f
End Function

Disponiendo de esta función y de la ESPRIMO, podemos construir otra, a la que llamaremos FIBOPRIMPROX, que, dado un entero positivo, devuelva el menor primo Fibonacci que es mayor que él, es decir, el "próximo primo Fibonacci". Su código sería:

Function fiboprimprox(a) As Long
Dim p, prim As Long
Dim sale As Boolean

'Encuentra el menor primo de Fibonacci mayor que el dado
p = a + 1: sale = False: prim = 0
While Not sale
If esprimo(p) And esfibo(p) Then prim = p: sale = True
p = p + 1
Wend
fiboprimprox = prim
End Function

Se entiende fácilmente. El problema, como ocurre frecuentemente en este blog, es que la hoja de cálculo tiene una capacidad limitada de cálculo con enteros. Por ello, con la hoja CONJETURAS sólo hemos podido llegar al próximo a 100000.

¿Existen infinitos primos de Fibonacci?	
Número positivo	Próximo primo Fibonacci
10	13
100	233
1000	1597
10000	28657
100000	514229

Observa que los números de la segunda columna pertenecen a la sucesión de primos Fibonacci. El siguiente, 433494437, sería difícil de obtener con este procedimiento.

Si la conjetura es cierta, la función FIBOPRIMPROX(N) debe devolver un resultado por muy grande que sea N.

Como procedemos a menudo en este blog, traducimos el proceso a PARI para ver si podemos reproducir más elementos de la sucesión. Hemos optado por este código:

{for(i=1,10^4,f=fibonacci(i);if(isprime(f),print(f)))}

El resultado ha sido impresionante, porque en pocos segundos nos ha devuelto los primos contenidos en los 10000 primeros términos de la sucesión de Fibonacci:

```
gp-readline-2-7-1
Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primelimit = 500000
? \r ini.txt
2
3
5
13
89
233
1597
28657
514229
433494437
2971215073
99194853094755497
1066340417491710595814572169
19134702400093278081449423917
475420437734698220747368027166749382927701417016557193662268716376935476241
529892711006095621792039556787784670197112759029534506620905162834769955134424689676262369
1387277127804783827114186103186246392258450358171783690079918032136025225954602593712568353
3061719992484545030554313848083717208111285432353738497131674799321571238149015933442805665949
10597999265301490732599643671505003412515860435409421932560009680142974347195483140293254396195769876129909
36684474316080978061473613646275630451100586901195229815270242868417768061193560857904335017879540515228143777781065869
96041200618922553823942883360924865026104917411877067816822264789029014378308478864192589084185254331637646183008074629
```

Si en el código PARI hubiéramos pedido el valor del índice en lugar del término de Fibonacci nos hubiera resultado la sucesión:

3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677,…

Como se ve, salvo el caso del 4, todos los índices de números de Fibonacci primos son también primos. Esto se deriva de que si p divide a q, Fp también divide a Fq para p,q>=3. Así que si el número de orden no es primo, tampoco lo será el número Fibonacci correspondiente. La propiedad recíproca no es cierta. Por ejemplo, el término de índice 19, primo, es 4181=37*113, compuesto.

Divisibilidad en los números Fibonacci

La cuestión anterior da pie a que revisemos algunas propiedades interesantes que presentan los factores primos de los términos de esta sucesión.

El máximo común divisor

Los términos de la sucesión de Fibonacci cumplen la siguiente curiosa propiedad

$$MCD(F_m, F_n) = F_{MCD(m,n)}$$

Por ejemplo, si elegimos los términos 24 y 36 de la sucesión,

F(24) = 46368 $=2^5*3^2*7*23$ y F(36) = 14930352 = $2^4*3^3*17*19*107$, tendremos

MCD(46368, 14930352) = 144, MCD(24, 36) = 12 y F(12)=144

Por tanto, si el índice de un número de Fibonacci es primo, éste será coprimo con el anterior y el siguiente. Obviamente, esto lo cumplirán los primos Fibonacci, pero también el contraejemplo que vimos más arriba, F(19) = 4181. En la tabla verás la falta de elementos comunes con el anterior y el siguiente elemento Fibonacci.

N	F(N)	Factores
18	2584	[2,3][17,1][19,1]
19	4181	[37,1][113,1]
20	6765	[3,1][5,1][11,1][41,1]

Teorema de Carmichael

Relacionado con este tema de divisores de los números Fibonacci disponemos de este interesante teorema:

Todo término de la sucesión de Fibonacci distinto de 1, 8 y 144, posee un factor primo que no divide al anterior término.

Lo puedes comprobar en esta tabla de divisores de los términos 10 a 20:

N	F(N)	Factores
10	55	[5,1][11,1]
11	89	[89,1]
12	144	[2,4][3,2]
13	233	[233,1]
14	377	[13,1][29,1]
15	610	[2,1][5,1][61,1]
16	987	[3,1][7,1][47,1]
17	1597	[1597,1]
18	2584	[2,3][17,1][19,1]
19	4181	[37,1][113,1]
20	6765	[3,1][5,1][11,1][41,1]

Todo término posee un factor primo que no divide al anterior (recuerda que el segundo número de cada corchete es el exponente del factor primo).

Puede ocurrir que un factor dado no divida a ningún otro término anterior. Por ejemplo, el factor 41 de F(20) no divide a ningún término anterior. En este caso le llamaremos factor característico o primitivo. Los tienes en https://oeis.org/A001578.

CONJETURA DE OPPERMANN

Esta conjetura está relacionada con otras tres que ya hemos estudiado en este blog:

Legendre
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/04/comprobar-conjeturas-con-hoja-de.html

Andrica
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/03/comprobar-conjeturas-con-hoja-de.html

Brocard
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/05/conjetura-de-brocard-y-otras-cuestiones.html

La primera afirma que *entre dos cuadrados consecutivos* n^2 *y* $(n+1)^2$ *existe siempre un número primo*, la de Andrica que "*La diferencia entre las raíces cuadradas de dos números primos consecutivos es siempre menor que 1*" y la de Brocard que "*Para n>1, si representamos como p(n) al enésimo número primo, se verificará que entre* $p(n)^2$ *y* $p(n+1)^2$ *existirán al menos cuatro números primos*".

En las entradas enlazadas se estudian las tres y sus relaciones mutuas.

Conjetura de Oppermann

Esta conjetura está muy relacionada con las tres referidas, y es una condición más fuerte que ellas. Fue establecida por Opperman en 1882.
Afirma lo siguiente:
Para todo número entero $x>1$, existe al menos un número primo entre $x(x-1)$ y x^2, y otro primo entre x^2 y $x(x+1)$.

El que tenga un carácter más fuerte proviene de que $\mathbf{x(x-1)>(x-1)^2}$ y $\mathbf{x(x+1)<(x+1)^2}$, con lo que los intervalos en los que se ha de encontrar un número primo se acortan.
Observamos que tanto x(x-1) como x(x+1) son números oblongos, y además consecutivos, siendo x^2 la media de ambos.
Al igual que nos ocurrió con la conjetura de Legendre, si usamos la función π, que da la distribución de los números primos (π(200) equivaldría a los primos que existen menores o iguales a 200), la conjetura de Opperman se podría expresar así:

$$\pi\big(n(n+1)\big) > \pi(n) > \pi(n(n-1))$$

Lo interesante aquí es que las desigualdades son estrictas, lo que indica que existen números primos intercalados, que es lo que afirma la conjetura.

Comprobación de la conjetura

Como en anteriores entradas de esta serie, usaremos nuestra herramienta conjeturas.xlsm, que puedes descargar desde la página
http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm

Esta hoja posee algunas funciones interesantes, aunque el trabajo de comprobación depende de nosotros. Hemos construido un esquema que nos permitirá la comprobación. Puedes intentarlo también. El nuestro es así:

Conjetura de Opperman

Valores de N	N(N-1)	Próximo primo	N^2	Próximo primo	N(N+1)
100	9900	9901	10000	10007	10100
101	10100	10103	10201	10211	10302
102	10302	10303	10404	10427	10506
103	10506	10513	10609	10613	10712
104	10712	10723	10816	10831	10920
105	10920	10937	11025	11027	11130
106	11130	11131	11236	11239	11342
107	11342	11351	11449	11467	11556
108	11556	11579	11664	11677	11772
109	11772	11777	11881	11887	11990
110	11990	12007	12100	12101	12210

En primer lugar se ha diseñado la cabecera, de forma que contenga los tres valores que figuran en la conjetura, N(N-1), N^2 y N(N+1). Entre ellos se han reservado dos columnas para que aparezcan los números primos que anuncia la conjetura.

La estructura es muy sencilla. Todo depende del número que escribamos en la parte superior izquierda, en la imagen el 100. Debajo de él figurarán automáticamente los siguientes. Esto no es necesario, bastaba con un número, pero así percibimos mejor la potencia de la conjetura. Hemos programado que cada celda sea igual a la anterior más una unidad.

Las columnas N(N-1), N^2 y N(N+1) son fáciles de rellenar en una hoja de cálculo y no las explicaremos. Las correspondientes a los primos que se esperan las hemos rellenado con la función PRIMPROX, que nos da el próximo primo mayor que un número. En la segunda columna aparecerá PRIMPROX(N(N-1)) y en la cuarta PRIMPROX(N^2).

Esta función nos da el primer primo entre esos números, pero con eso nos basta, ya que sólo deseamos resaltar que existe uno al menos. Si hubiera más, aparecería el primero de ellos.
Bastará ahora elegir números más pequeños o mayores para que verifiquemos la conjetura en casos particulares.

Conjetura de Opperman					
Valores de N	N(N-1)	Próximo primo	N^2	Próximo primo	N(N+1)
2	2	3	4	5	6
3	6	7	9	11	12
4	12	13	16	17	20
5	20	23	25	29	30
6	30	31	36	37	42
7	42	43	49	53	56
8	56	59	64	67	72
9	72	73	81	83	90
10	90	97	100	101	110
11	110	113	121	127	132
12	132	137	144	149	156

Forzamos la hoja de cálculo con números mayores:

Conjetura de Opperman					
Valores de N	N(N-1)	Próximo primo	N^2	Próximo primo	N(N+1)
30000	899970000	899970007	900000000	900000011	900030000
30001	900030000	900030011	900060001	900060013	900090002
30002	900090002	900090049	900120004	900120007	900150006
30003	900150006	900150029	900180009	900180059	900210012
30004	900210012	900210013	900240016	900240017	900270020
30005	900270020	900270043	900300025	900300043	900330030
30006	900330030	900330043	900360036	900360037	900390042
30007	900390042	900390047	900420049	900420061	900450056
30008	900450056	900450059	900480064	900480079	900510072
30009	900510072	900510089	900540081	900540083	900570090
30010	900570090	900570103	900600100	900600119	900630110

Si forzamos un poco más, ya no podemos contar con el cálculo en números enteros, y la hoja nos da error:

Conjetura de Opperman					
Valores de N	N(N-1)	Próximo primo	N^2	Próximo primo	N(N+1)
50000	2499950000	#¡VALOR!	2500000000	#¡VALOR!	2500050000
50001	2500050000	#¡VALOR!	2500100001	#¡VALOR!	2500150002
50002	2500150002	#¡VALOR!	2500200004	#¡VALOR!	2500250006
50003	2500250006	#¡VALOR!	2500300009	#¡VALOR!	2500350012
50004	2500350012	#¡VALOR!	2500400016	#¡VALOR!	2500450020
50005	2500450020	#¡VALOR!	2500500025	#¡VALOR!	2500550030
50006	2500550030	#¡VALOR!	2500600036	#¡VALOR!	2500650042
50007	2500650042	#¡VALOR!	2500700049	#¡VALOR!	2500750056
50008	2500750056	#¡VALOR!	2500800064	#¡VALOR!	2500850072
50009	2500850072	#¡VALOR!	2500900081	#¡VALOR!	2500950090
50010	2500950090	#¡VALOR!	2501000100	#¡VALOR!	2501050110

Esto es normal y lo tenemos asumido en este blog. No pretendemos grandes cálculos, imposibles con el formato de coma flotante, sino crear esquemas que nos ayuden a entender mejor las conjeturas.

La conjetura afirma la existencia de un número primo, pero en la práctica pueden aparecer muchos más. En la imagen que sigue hemos usado la función PRIMENTRE, que también está incluida en la hoja Conjeturas, y se puede observar que el número de primos es considerable.

Valores de N	N(N-1)	Primos intercalados	N^2	Primos intercalados	N(N+1)
100	9900	9	10000	11	10100
101	10100	12	10201	11	10302
101	10100	12	10201	11	10302
102	10302	11	10404	11	10506
102	10302	11	10404	11	10506
103	10506	9	10609	12	10712
103	10506	9	10609	12	10712
104	10712	9	10816	12	10920
105	10920	9	11025	12	11130
106	11130	9	11236	13	11342
107	11342	11	11449	11	11556

Relación con la espiral de Ulam

Si observamos una imagen de la espiral de Ulam, nos daremos cuenta de que la conjetura que estudiamos viene a decir que cada lado de dicha espiral ha de contener un número primo.

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Ya sabemos que pueden existir más. La imagen está tomada de nuestro documento http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/propuestas/rutas/htm/ulam.htm

que puede tener los vértices algo desplazados, pero se ven con claridad los distintos oblongos y cuadrados de cada lado y los primos comprendidos entre ellos.

Conjetura de Schinzel

Se puede afinar más la conjetura de Opperman. Schinzel conjeturó que *para $x>8$, existe al menos un número primo entre x y $x+(\ln x)^2$.*

Te invitamos a comprobarlo. En la imagen puedes ver cómo lo hemos hecho en este blog:

Valores de N	Primos comprendidos	$N+(\ln N)^2$
2000	7	2057,773718
2001	7	2058,781317
2002	7	2059,788913
2003	7	2060,796506
2004	6	2061,804095
2005	6	2062,811682
2006	7	2063,819264
2007	7	2064,826844
2008	7	2065,83442
2009	7	2066,841993
2010	7	2067,849563

FUNCIÓN "PARKING"

Estudiamos hoy un tema de Combinatoria, que la teníamos un poco abandonada. Se trata de la función "parking", o arreglos de aparcamiento. El planteamiento es el siguiente:

Imaginemos un aparcamiento de una empresa, situado en una calle estrecha, en la que no es posible dar marcha atrás, y que contiene **n** aparcamientos, que numeraremos de 1 a n. Podemos pensar que es el inicio de una jornada de trabajo y que suelen aparcar en ella siempre los mismos n coches.

Puede ocurrir que cada coche tenga preferencia por un determinado aparcamiento. Si llega y está libre, lo ocupa, y si no, como no puede retroceder, ocupa el siguiente que esté libre. Esto hace que no todas las preferencias de los coches sean viables. Unamos en un mismo conjunto ordenado las preferencias de los conductores. Por ejemplo, si n = 3, el conjunto ordenado (2, 1, 1) es viable, porque el primer coche ocuparía el aparcamiento 2, su preferido. El segundo iría al 1, y el tercero, aunque prefiere el 1, ha de irse al 3, pero aparca.

El arreglo (2, 3, 2) no es válido, ya que el primer coche aparca en el 2, el segundo en el 3, pero el tercero, encuentra ocupado su preferido 2 y también el siguiente, y no puede aparcar. Vemos que una hipótesis poco creíble es que cada conductor se dirige a su aparcamiento preferido ignorando los anteriores. Imaginemos que su empecinamiento le costaría volver a intentarlo y esta vez ocupar el 1 aunque no fuera su preferido, pero esas son las reglas de este juego.

Simulación

Hemos preparado una hoja de cálculo muy simple para que experimentes qué preferencias son válidas. La tienes alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/parking.xlsm
Basta escribir en ella dichas preferencias, ajusta el retardo en segundos para ver bien el proceso, y rellenar las preferencias. Al pulsar los botones "Vaciar parking" e "Intento", se desarrollará, con el retardo que desees, el proceso de aparcamiento.

En la imagen puedes ver el final del proceso con unas preferencias válidas

	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	1	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A	C	D	E	G	F

Todos los coches han podido aparcar

En esta otra imagen hemos creado unas preferencias no válidas

	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	6	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A		D	E	C	F

La plaza tercera se ha quedado vacía y el coche G no ha podido aparcar.

Llamamos *coches afortunados* (“lucky car”) a aquellos vehículos que aparcan donde ellos prefirieron previamente. En el ejemplo de la imagen son afortunados A, B, C, D, E y F. Si las preferencias se repiten, sólo serán afortunados algunos de los coches pretendientes a una plaza. Se llama salto (“jump”) al número de plazas que ha de desplazarse un coche si no logra su plaza preferida. Es evidente que los afortunados presentan un salto igual a cero.

Criterio de validez

Se puede razonar que una función parking es válida si se pueden ordenar las preferencias en orden creciente, y entonces, cada una de ellas **es menor o igual que su**

número de orden. En caso contrario, si una preferencia fuera mayor, se dejaría una plaza vacía aunque entraran todos los coches, por lo que alguno de ellos quedaría fuera. En el anterior ejemplo (2, 3, 2) ordenamos de forma creciente (2, 2, 3) y observamos que no hay forma de llenar la plaza número 1, que quedaría vacía. Por el contrario, si en el orden creciente no se sobrepasa el número de orden, como en (1, 3, 1), o en orden creciente (1, 1, 3), sea cual sea el orden de entrada, siempre habrá plaza para todos. Si el orden creciente es válido, cualquier permutación del mismo también lo será.

Con esta condición, no es difícil escribir todas las funciones válidas en su forma ordenada creciente. En el caso de 3 serían

(1, 1, 1) (1, 1, 2) (1, 1, 3) (1, 2, 2) (1, 2, 3)

Ahora le aplicamos a cada una las permutaciones posibles, con lo que nos dará 1+3+3+3+6=16 funciones válidas distintas. Coincide este resultado con la expresión

$$P(n) = (n+1)^{n-1}$$

En este caso $(3+1)^{3-1}=4^2=16$. Se puede demostrar, mediante teoría de grafos, que esta expresión es válida.

En esta dirección puedes leer un esbozo de demostración
http://www-math.mit.edu/~rstan/transparencies/parking.pdf

La idea consiste en añadir otra plaza más de aparcamiento, la n+1 que dejamos vacía, y permitir a los coches otro intento. De esta forma todos aparcarán, aunque se puedan dejar una plaza vacía. El número de opciones ahora será (n+1) elementos para n plazas. El número de funciones es, por tanto, $(n+1)^n$. Si sometemos al proceso a una traslación módulo n+1, sólo será función válida aquella que deje vacía la plaza n+1. Dividimos y queda $(n+1)^n$.

Generación de resultados

Las funciones parking ordenadas se pueden obtener mediante construcción directa, ya que sólo hay que tener cuidado de no sobrepasar del índice i en el término a(i). Para valores de n mayores hemos usado nuestra hoja de cálculo Cartesius (no publicada en este momento). Por ejemplo, en la imagen puedes observar las 14 funciones ordenadas para n=4

	X1	X2	X3	X4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
4	1	1	1	4
5	1	1	2	2
6	1	1	2	3
7	1	1	2	4
8	1	1	3	3
9	1	1	3	4
10	1	2	2	2
11	1	2	2	3
12	1	2	2	4
13	1	2	3	3
14	1	2	3	4

Para n=5 resultarían 42 arreglos. En general, el número de funciónes parking ordenadas coincide con los números de Catalan:
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,… (http://oeis.org/A000108).

Como tales, se pueden generar con la fórmula

$$C(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Por ejemplo, C(4)=1/5C(8,4)=70/5=14

RACHAS DE DÍGITOS

En Combinatoria es interesante el problema de las rachas, conjuntos de elementos consecutivos iguales. Por ejemplo, el conjunto AABBCDDDDEE posee cinco rachas; AA, BB, C, DDDD y EE. No se impone ninguna condición a la longitud de cada racha.

Aquí estudiaremos algunas rachas de dígitos que puede presentar un número entero. Distinguiremos tres tipos con sus estadísticas correspondientes y después particularizaremos en algunos casos, como primos, cuadrados o triangulares.

Tipos de racheado

Un número puede presentar los dígitos agrupados, es decir, con rachas todas de longitud mayor que 1, como pueden ser 3366677 o 112222. Le llamaremos número de tipo 1, o con "dígitos agrupados".
Puede ocurrir que ningún dígito se agrupe con el siguiente, que equivale a afirmar que todas las rachas tienen longitud 1, como en 345643. Obsérvese que no se prohíbe que los dígitos se repitan, siempre que no sean consecutivos. Serán estos números los del tipo 2, o de "dígitos aislados"

Los restantes números presentarán rachas de longitud 1 y otras mayores, como en el caso de 1442 o 54322111. Les asignaremos el tipo 3, que es el menos interesante.

Independientemente de consideraciones combinatorias, podemos evaluar de forma aproximada la frecuencia que presenta cada uno de los casos. Usaremos una función en Visual Basic de hoja de cálculo, que, por su relativa complejidad, explicamos al final de la entrada.

El algoritmo que usa funciona en dos fases:

(1) Búsqueda de las rachas existentes entre los dígitos del número entero. En el listado del final puedes ver que se almacenan en una matriz r.

(2) Estudio de la longitud mínima y máxima de racha existente en el número.

Si la mínima longitud no es 1, los dígitos se presentan agrupados, y el entero será de tipo 1. Si la máxima es 1, no habrá agrupamientos, y el tipo será 2. Los restantes ejemplos serán de tipo 3.

Si te apetece, sigue estas fases en el listado VBA del final.

Frecuencias de los tipos

Mediante la función citada y un contador adecuado, hemos observado que las frecuencias en los distintos intervalos son bastante parecidas a las de la tabla, obtenida en el intervalo (10000, 100000)

A	10000	
B	100000	
Tipo 1	171	0,19%
Tipo 2	59049	65,61%
Tipo 3	30781	34,20%
	90001	100,00%

Se observa que son muy escasos los de tipo 1, con todos los dígitos agrupados, un 0,19%, los más frecuentes los del tipo 2, con dígitos aislados, con un 65,61%, quedando los del tipo mixto en una frecuencia intermedia del 34,20%. En otros intervalos las frecuencias son semejantes, ya que están basadas en propiedades combinatorias.

Justificar estas frecuencias puede resultar complejo, pero en el caso del tipo 1 no es difícil. Son 171 porque de dos cifras los únicos agrupados son 11, 22, 33,…99. Si le añadimos una cifra más, deberá ser idéntica a la última, luego, seguirán siendo 9: 111,222,…,999. Al llegar a cuatro cifras disponemos de dos caminos para construir los números de tipo 1: O bien añadimos dos cifras iguales por la derecha a los de dos cifras (incluido el cero), con lo que tendríamos 9*10=90 casos, como 1199, 2200,… o bien las añadimos por la izquierda (sin el cero), lo que daría 9*9=81 casos. Sumamos y obtenemos 90+81=171, que es lo que nos da la estadística.

En general, para una racha existen 9 posibilidades si ignoramos el 0. Para dos, 9*9, ya que ambas han de contener dígitos distintos, y para tres rachas, 9*9*9=729. Con una hoja nuestra sobre Combinatoria hemos calculado el número de rachas de cada tipo hasta 7 cifras, quedando esta tabla:

	Número de cifras						
Posibles rachas	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	2	3	4
3	0	0	0	0	0	1	3
4	0	0	0	0	0	0	0
Total	0	9	9	90	171	981	2520

Todas las cantidades están comprobadas: 9 números de tipo 1 de dos cifras, 9 de tres, 90 de cuatro, 171 de cinco, 981 de seis y 2520 de siete.

¿Presentarán los distintos tipos de números frecuencias parecidas? Por ejemplo, ¿existirán más rachas con longitud superior a 1 en los cuadrados?¿y en los primos?...Nos dedicaremos, en plan lúdico, a estudiar diversos casos y observar, si existen, variaciones apreciables en las frecuencias.

Los cuadrados

Por este carácter informal que queremos darle a este estudio, nos limitaremos en todos los casos al intervalo (1, 100000), ya que con él basta para detectar curiosidades.

En ese intervalo sólo aparece el cuadrado 7744=88^2, y las frecuencias son

Cuadrados	
1	0%
208	66%
107	34%
316	100%

Prácticamente coinciden con el caso general. No aparece ningún otro cuadrado de ese tipo entre 1 y 500000. Estás invitado a buscar uno. Por cierto, si lo encuentras, deberá terminar en 00 o 44. Razónalo si te apetece.

Los primos

Establecemos el mismo intervalo, para ver si tampoco en este caso se aprecian diferencias importantes. Y no, resultan casi iguales a las anteriores:

Primos	
15	0%
6387	66%
3190	33%
9592	100%

Los 15 primos encontrados son: 11, 11177, 11777, 22111, 22277, 22777, 33311, 33377, 44111, 44777, 55333, 55511, 77711, 77999 y 88811. Como ves, son muy atractivos. Puedes ver más en
http://oeis.org/A034873

Como en el caso de los cuadrados, sólo unas terminaciones son válidas: 11, 33, 77, 99, como es fácil entender.

Otros casos

Ya vamos sospechando que las frecuencias variarán poco. Lo vemos:

Triangulares

En este caso aumentan algo las frecuencias de tipo 1 y 2 en detrimento del 3:

Triangulares	
4	1%
321	72%
121	27%
446	100%

Los cuatro triangulares de tipo 1 son muy sugestivos: 55, 66, 666, 2211, Tienes más en
http://oeis.org/A116055

Oblongos

Como estos números son los dobles de los triangulares, presentan frecuencias similares, también con ligero predominio de los tipos 1 y 2 respecto al conjunto de todos los números.
En el intervalo (1,100000) sólo aparecen tres de tipo 1: 1122=33*34, 4422=66*67 y 9900=99*100. No están publicados los siguientes. Si te atreves…

Pentagonales

Aparecen tres de tipo 1:22, 8855 y 55777.

Pitagóricos

¿Qué longitudes de hipotenusas de triángulos de lados enteros aparecerán de tipo 1?
De este tipo aparecen muchos más, pues estarían entre ellos algunos múltiplos adecuados de 55, 111 y 100, que presentan rachas de al menos dos elementos. Estos son los primeros, con sus correspondientes catetos:

55	33 , 44
111	36 , 105
222	72 , 210
333	108 , 315
444	144 , 420
555	171 , 528
666	216 , 630
777	252 , 735
888	288 , 840
999	324 , 945
1100	308 , 1056
1111	220 , 1089

Aquí lo dejamos. Podemos analizar algunos más, pero vemos que las proporciones no cambian mucho. Es tan imprevisible la aparición de las cifras en los cálculos previos, que al reunir las frecuencias se llega a resultados muy similares.

Aquí tienes una tabla resumen:

	Frecuencias de agrupamiento							
	Todos los números		Cuadrados		Primos		Triangulares	
Tipo 1	279	0%	1	0%	15	0%	4	1%
Tipo 2	66429	66%	208	66%	6387	66%	321	72%
Tipo 3	33292	33%	107	34%	3190	33%	121	27%
Total	100000	100%	316	100%	9592	100%	446	100%

ANEXO

Función para encontrar el tipo de agrupamiento de dígitos

Public Function tipoagrupa(n)

Dim i, t, nr, l, maxr, minr

Dim r(20) ‘Esta variable contendrá las rachas

Dim sr$, c$, d$

sr$ = Str$(n)

sr$ = Right$(sr$, Len(sr$) - 1) + "$" ‘Convierte el número en un *string* adecuado

nr = 0

maxr = 1: minr = 1000 ‘Máxima y mínima longitud de racha

For i = 1 To 20: r(i) = 0: Next i

i = 1

l = Len(sr$)

While i < l ‘La variable ***i*** recorre los dígitos

nr = nr + 1

r(nr) = 1

c$ = Mid$(sr$, i, 1)

d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)

While c$ = d$ ‘Un dígito es igual al siguiente. Hay racha mayor que 1

r(nr) = r(nr) + 1

i = i + 1

c$ = Mid$(sr$, i, 1)

d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)

Wend

If r(nr) > maxr Then maxr = r(nr) ‘Toma nota de la racha máxima

If r(nr) < minr Then minr = r(nr) ‘Toma nota de la racha mínima

i = i + 1

Wend

t = 3 'En principio suponemos que el tipo es 3, caso mixto

If minr > 1 Then t = 1 'Tipo 1. Todos agrupados, porque las rachas son mayores que 1

If maxr = 1 Then t = 2 'Tipo 2. Todos aislados y rachas unitarias

tipoagrupa = t

End Function

VOLVEMOS A LOS NÚMEROS AROLMAR

HISTORIA Y GENERACIÓN

Esta entrada y las siguientes que aparecerán sobre el mismo tema suponen un regreso a una sucesión que ideamos en 2011, cuya originalidad atrajo a nuestro colaborador Rafael Parra, que fue quien le dio el nombre de "números arolmar". Tanto él como el autor publicaron sobre el tema en OEIS (The On-line Encyclopedia of integer sequences). Ahora, transcurridos cuatro años, hemos querido desarrollar con tranquilidad la generación de esos números, así como sus propiedades, curiosidades y otras sucesiones afines.

No busque el lector profundidad en esta serie. Se trata tan sólo de exprimir a nivel descriptivo las posibilidades que nos ofrece esta sucesión, sin plantearnos otros objetivos.

Es posible que la publicación no se efectúe de forma consecutiva, a fin de no bloquear el blog si surgen cuestiones de actualidad. Pueden aparecer siete entradas distintas, que bloquearían el blog durante semanas.

Historia

Con fecha 23/2/2011 se publicó en este blog una pequeña entrada titulada “Primos por todas partes”

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/primos-por-todas-partes.html)

En ella se presentaba la sucesión

21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195,…

Son números compuestos que tienen todos sus factores primos distintos (son números libres de cuadrados) y el promedio de esos factores es un número primo.

Por ejemplo 145=5*29, y el promedio de ambos es (5+29)/2= 17, que es primo.

195=3*5*13, y el promedio es (3+5+13)/3 = 21/3 = 7, también primo.

Posteriormente se publicó esta sucesión en OEIS (https://oeis.org/A187073), y Rafael Parra Machío les dio el nombre de números ***arolmar,*** dedicándoles un estudio publicado en http://hojamat.es/parra/arolmar.pdf

Dado el interés del tema, ampliaremos la búsqueda de esos números y estudiaremos algunos detalles más sobre esta sucesión y otras afines. Nos moveremos en un nivel de profundidad de tipo medio, que es el que domina el autor, sin pasar a cuestiones de criptosistemas, muy bien explicados en el documento de Rafael Parra. Nuestro objetivo será el de ampliar las formas de generarlos, estudiar alguna subsucesión y buscar números con propiedades similares.

En esta primera entrada reflexionaremos sobre su generación con varias herramientas.

Generación de la sucesión

Con el Buscador de Naturales

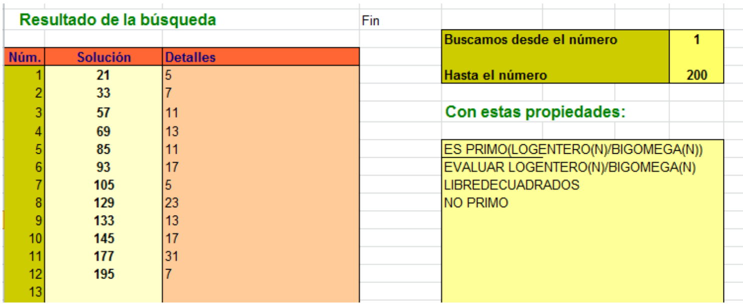
En el documento

http://www.hojamat.es/publicaciones/Hojanum3.pdf publicamos la forma de encontrar estos números con nuestro Buscador de números naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global)

Basta leer las cuatro líneas de condiciones necesarias para entender la gran potencia de este buscador:

es primo(logentero(n)/bigomega(n))
evaluar logentero(n)/bigomega(n)
libredecuadrados
no primo

Si lo descargas y escribes las cuatro condiciones en la zona dedicada a ellas obtendrás los primeros términos de la sucesión:



Resultado de la búsqueda — Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	21	5
2	33	7
3	57	11
4	69	13
5	85	11
6	93	17
7	105	5
8	129	23
9	133	13
10	145	17
11	177	31
12	195	7
13		

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

ES PRIMO(LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N))
EVALUAR LOGENTERO(N)/BIGOMEGA(N)
LIBREDECUADRADOS
NO PRIMO

En la primera columna figuran los términos y en la segunda el número primo promedio de los factores primos de los mismos.

La primera condición exige que el promedio de factores primos sea también primo. La segunda lo presenta. La tercera exige que esté libre de cuadrados, y la cuarta que no sea primo.

Con el Basic de las hojas

Al ser el Buscador una herramienta no contrastada, puede ser bueno comprobar los resultados con otros instrumentos. En este blog solemos usar el Basic de las hojas de cálculo. Si tenemos definidas las funciones pertinentes, la búsqueda se reduce a un simple bucle FOR-NEXT

Necesitamos las funciones

PARTECUAD

Te devuelve la parte cuadrada de un número natural. Si esa parte vale 1, es que el número es libre de cuadrados. La tienes en http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/05/parte-cuadrada-y-parte-libre-solucion.html

Se puede encontrar escribiendo PARTECUAD en Google.

ESPRIMO

La hemos usado mucho en este blog. La puedes encontrar en nuestra hoja sobre conjeturas

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#global

SOPF y F_OMEGA (o SOPFR Y BIGOMEGA, que en libres de cuadrados son equivalentes)

La primera suma los factores y la segunda los cuenta. Su cociente dará el promedio.

En la entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/11/de-donde-vengo-3-sumamos-y-contamos.html

damos algunas ideas sobre ellas.

Bucle

Con esas funciones y alguna otra podemos ya construir nuestro bucle de búsqueda:

For i = 2 to 1000
If Not esprimo(i) And partecuad(i) = 1 Then
b = sopf(i) / f_omega(i)

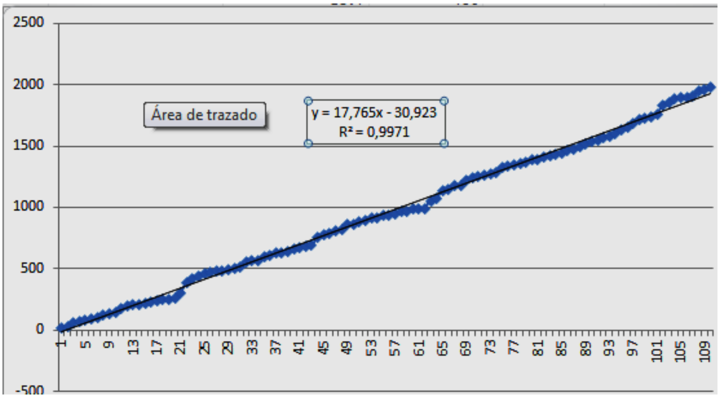
If esentero(b) And esprimo(b) Then msgbox(i)
End If
Next i

Implementando un programa similar en una hoja en la que los resultados aparecen bien ordenados, obtenemos los mismos resultados que con el Buscador:

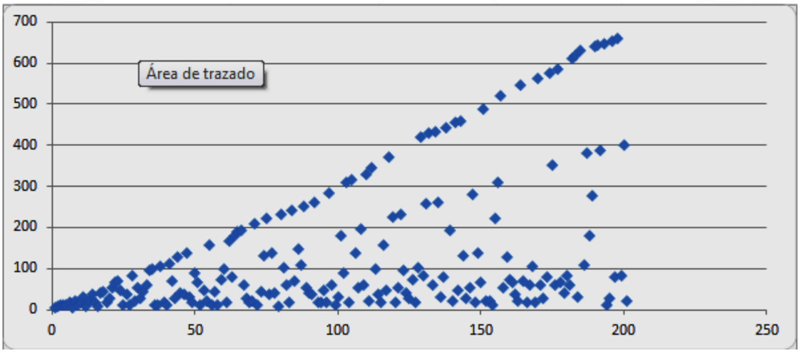
21	5
33	7
57	11
69	13
85	11
93	17
105	5
129	23
133	13
145	17
177	31
195	7
205	23
213	37
217	19

En la primera columna figuran los números ***arolmar*** y en la segunda el promedio (primo) de sus factores primos.

Existen infinitos números ***arolmar***, según veremos en la próxima entrada, siempre que se admita la conjetura de Goldbach. En el gráfico de los primeros de ellos (hasta una cota de 2000) se percibe una clara tendencia lineal, que en este intervalo presenta una pendiente aproximada de 17 con un ajuste de nivel 0,9971. Podemos esperar un número ***arolmar*** en cada incremento de 17.



Más incidencias presenta la distribución de los números primos que son promedio de sus factores:



En el gráfico distinguimos fácilmente varias líneas de tendencia ¿Adivinas la causa? Pues sí, depende del número de factores que intervengan en el promedio. La línea superior corresponden a los números ***arolmar*** que son semiprimos, la siguiente a los que tienen tres factores, y las de más abajo, que llegan a hacerse indistinguibles, a los números que poseen más factores aún. Como también veremos en la siguiente entrada, este gráfico recorre todos los primeros números primos.

Código PARI

En la sucesión A187073 figura un código generador debido a Charles R Greathouse IV

isA187073(n)=my(f=factor(n)); #f[, 1]>1&vecmax(f[, 2])==1&denominator(f=sum(i=1, #f[, 1], f[i, 1])/#f[, 1])==1&isprime(f)

Como puede resultar incomprensible, por compacto, lo sustituiremos por otro más sencillo (y largo), pero que nos permitirá ir explicando las funciones que necesitamos:

```
freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)
sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1,
matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }
averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}
{  for (n=4, 10^3,  if(freesqrcomp(n),
m=averg(n);if(m==truncate(m),if(isprime(m),
print1(n, ", "))))))}
```

En él se van implementando las condiciones exigidas a los números buscados.

Carácter de número compuesto libre de cuadrados:

Basta definir esta función.

freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)

En ella exigimos que sea libre de cuadrados (***issquarefree***) y que no sea primo (***!isprime(n)***). El signo "!" representa la conectiva NO y && la conjunción Y. Si escribes a continuación "{print(freesqrcomp(30))}" la respuesta será 1, que significa VERDADERO, pues 30=2*3*5 es compuesto y libre de cuadrados. Ya tenemos el primer paso: identificar los números de este tipo.

Función SOPF

sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }

Esta parte es más difícil de entender. Esta función suma los factores primos de un número sin contar las repeticiones. En PARI la matriz (o vector) ***factor(n)*** contiene los factores primos en la primera columna y sus exponentes en la segunda. La variable ***s*** suma sólo los factores primos, pero no sus exponentes. Por eso se escribe ***s+=f[i, 1])***

Promedio de los factores primos

averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}

Se basa en la función anterior SOPF y en OMEGA, que cuenta los factores primos sin repetición. Por tanto, su cociente es el promedio de los factores primos.

Bucle de búsqueda

{ for (n=4, 10^3, if(freesqrcomp(n), m=averg(n);if(m==truncate(m),if(isprime(m), print1(n, ", "))))))}

Lo que queda es ya recorrer los números (en el ejemplo desde 4 hasta 1000) e imprimir aquellos cuyo promedio de factores primos es entero (***m==truncate(m)***) y primo (***isprime(m)***)

Aquí tienes la pantalla con el resultado:

```
%1 = (n)->issquarefree(n)&&!isprime(n)
%2 = (n)->local(f,s=0);f=factor(n);for(i=1,matsize(f)[1],s+=f[i,1]);return(s)
%3 = (n)->local(s);s=sopf(n)/omega(n);return(s)
21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195, 205, 213, 217, 231, 237, 2
49, 253, 265, 309, 393, 417, 445, 465, 469, 483, 489, 493, 505, 517, 553, 565, 5
73, 597, 609, 627, 633, 645, 663, 669, 685, 697, 753, 781, 793, 813, 817, 861, 8
65, 889, 897, 913, 915, 933, 935, 949, 969, 973, 985, 987, 993,
?
```

Hemos querido detenernos en esta generación en PARI porque usaremos más adelante códigos similares.

Por último, incluimos la función ESAROLMAR, que nos devuelve VERDADERO si su argumento es un número *arolmar*. Con ella se pueden emprender otras búsquedas y encontrar curiosidades.

Función ESAROLMAR

Con el Basic de las hojas de cálculo podría tener esta estructura:

```
Public Function esarolmar(n)
Dim es As Boolean
Dim b

es = False
If Not esprimo(n) And partecuad(n) = 1 Then
b = sopf(n) / f_omega(n)
If esentero(b) And esprimo(b) Then es = True
End If
esarolmar = es
End Function
```

La segunda línea exige que el número no sea primo (***Not esprimo(n)***)y que sí sea libre de cuadrados, o bien que su parte cuadrada sea igual a 1 (***partecuad(n) = 1***), que son las dos condiciones iniciales de la definición de número arolmar.

En la siguiente se calcula la media de los factores primos, dividiendo su suma (***sopf(n)***) entre su número (***f_omega(n)***) y, por último, se exige que el resultado sea entero y primo.

La versión con PARI necesita la definición progresiva de varias funciones:

```
freesqrcomp(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)
sopf(n)= { local(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); return(s) }
averg(n)={local(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}
esarolmar(n)={local(a=averg(n),s);s=freesqrcomp(n)
&&a==truncate(a)&&isprime(a); return(s)}
{for(i=2,1000,if(esarolmar(i),print(i)))}
```

La última línea presenta todos los números arolmar hasta el 1000.

DIFERENCIAS

En un apartado anterior se desarrollaron algunas técnicas para la búsqueda e identificación de los números *arolmar* (aquellos números compuestos que tienen todos sus factores primos distintos (son números libres de cuadrados) y el promedio de esos factores es un número primo). En esta buscaremos propiedades y curiosidades sobre ellos.

Todos son impares

No puede haber números pares en esta sucesión *arolmar*, porque en ese caso uno de los factores primos sería 2 (elevado a la unidad por ser libres de cuadrados) lo que daría lugar a lo siguiente:

Si el 2 está acompañado de un número impar de primos impares, su suma con el 2 sería impar, y al hallar el promedio deberíamos dividir entre un número par, lo que produciría un promedio no entero. Si el número de factores primos que acompañan al 2 es par, la suma de todos sería par, pero habría que dividir entre un impar, con lo que, en el caso de media entera, esta sería par y no prima.

No obstante este razonamiento, hemos generado términos hasta altas potencias de 10 sin encontrar ningún par, como era de esperar.

Estudio de las diferencias

Podemos encontrar números *arolmar* que se diferencien en un número par dado 2K. Así podemos encontrar, por ejemplo números arolmar gemelos (que se diferencien en 2 unidades). Usaremos esta función para ver si N y N+2K son ambos del tipo arolmar:

Public Function aroldif(n, k) As Boolean
If esarolmar(n) And esarolmar(n + 2 * k) Then aroldif = True Else aroldif = False
End Function

(Tienes la descripción de la función *esarolmar* en la anterior entrada citada)

Si formamos un bucle con todos los números naturales hasta un tope y una diferencia dada, se nos devolverán aquellos números N del tipo arolmar tales que N+2k también lo sea.

Números arolmar gemelos

Si hacemos k=1 y pasamos la función anterior a un conjunto de números, obtendremos la lista de los números *arolmar gemelos*. Son estos:

N	N+2	Factores(N)	Factores(N+2)	Media(N)	Media(N+2)
913	915	[11,1][83,1]	[3,1][5,1][61,1]	47	23
933	935	[3,1][311,1]	[5,1][11,1][17,1]	157	11
985	987	[5,1][197,1]	[3,1][7,1][47,1]	101	19
1417	1419	[13,1][109,1]	[3,1][11,1][43,1]	61	19
2605	2607	[5,1][521,1]	[3,1][11,1][79,1]	263	31
2893	2895	[11,1][263,1]	[3,1][5,1][193,1]	137	67
2913	2915	[3,1][971,1]	[5,1][11,1][53,1]	487	23
3335	3337	[5,1][23,1][29,1]	[47,1][71,1]	19	59
3367	3369	[7,1][13,1][37,1]	[3,1][1123,1]	19	563
3505	3507	[5,1][701,1]	[3,1][7,1][167,1]	353	59
4405	4407	[5,1][881,1]	[3,1][13,1][113,1]	443	43
4713	4715	[3,1][1571,1]	[5,1][23,1][41,1]	787	23
4715	4717	[5,1][23,1][41,1]	[53,1][89,1]	23	71
4765	4767	[5,1][953,1]	[3,1][7,1][227,1]	479	79
5017	5019	[29,1][173,1]	[3,1][7,1][239,1]	101	83
5377	5379	[19,1][283,1]	[3,1][11,1][163,1]	151	59
5883	5885	[3,1][37,1][53,1]	[5,1][11,1][107,1]	31	41
6097	6099	[7,1][13,1][67,1]	[3,1][19,1][107,1]	29	43
7683	7685	[3,1][13,1][197,1]	[5,1][29,1][53,1]	71	29
8553	8555	[3,1][2851,1]	[5,1][29,1][59,1]	1427	31

En las dos primeras columnas tenemos los pares de números *arolmar gemelos*, en las siguientes su descomposición en factores primos, y en las últimas, los promedios primos de sus factores. Los hemos incluido para que se destaque que aparecen valores promedio bastante alejados, especialmente si el número de primos en la descomposición es diferente en ellos.

También se observa que ambos gemelos han de tener factores primos diferentes. Si hubiera uno igual en ambos, al sacarlo factor común veríamos que la diferencia debería ser mayor que 2. Destacamos en la tabla el par (5883,5885), que produce primos promedio muy cercanos, 31 y 41.

Como estas entradas van de curiosidades en gran parte, incluimos ahora conjuntos de cuatro impares consecutivos, en los que los dos primeros son del tipo arolmar y los últimos primos gemelos:

Arol, Arol, Primo, Primo

3367, 3369, 3371, 3373
5017, 5019, 5021, 5023
15637, 15639, 15641, 15643
16645, 16647, 16649, 16651
23737, 23739, 23741, 23743
42277, 42279, 42281, 42283
48307, 48309, 48311, 48313
52285, 52287, 52289, 52291
52357, 52359, 52361, 52363
91093, 91095, 91097, 91099

Por su magnitud vemos que no parece ser un caso infrecuente, y que surgirán más en números mayores.

También existen conjuntos similares, pero con los dos primos gemelos anteriores a los gemelos arolmar:

Primo, Primo, Arol, Arol

5879, 5881, 5883, 5885
59357, 59359, 59361, 59363
82529, 82531, 82533, 82535
116189, 116191, 116193, 116195
121439, 121441, 121443, 121445
122609, 122611, 122613, 122615
152039, 152041, 152043, 152045
192629, 192631, 192633, 192635
206909, 206911, 206913, 206915
223829, 223831, 223833, 223835

Y ya, por terminar, situaremos a los *arolmar* en el centro y los primos en los extremos:

Primo, Arol, Arol, Primo

7681, 7683, 7685, 7687
10831, 10833, 10835, 10837
23167, 23169, 23171, 23173
27067, 27069, 27071, 27073
28387, 28389, 28391, 28393
30631, 30633, 30635, 30637
33311, 33313, 33315, 33317
33931, 33933, 33935, 33937
37561, 37563, 37565, 37567

Os invitamos a encontrar otras posibilidades.

Números arolmar cousin (se diferencian en 4)

Usando la misma técnica que con los gemelos, podemos encontrar pares (N, N+4) entre los arolmar. Los primeros son:

N	N+4	Factores(N)	Factores(N+4)
129	133	[3,1][43,1]	[7,1][19,1]
213	217	[3,1][71,1]	[7,1][31,1]
249	253	[3,1][83,1]	[11,1][23,1]
465	469	[3,1][5,1][31,1]	[7,1][67,1]
489	493	[3,1][163,1]	[17,1][29,1]
813	817	[3,1][271,1]	[19,1][43,1]
861	865	[3,1][7,1][41,1]	[5,1][173,1]
969	973	[3,1][17,1][19,1]	[7,1][139,1]
1329	1333	[3,1][443,1]	[31,1][43,1]
1389	1393	[3,1][463,1]	[7,1][199,1]
1437	1441	[3,1][479,1]	[11,1][131,1]
1893	1897	[3,1][631,1]	[7,1][271,1]
2409	2413	[3,1][11,1][73,1]	[19,1][127,1]
2577	2581	[3,1][859,1]	[29,1][89,1]
2649	2653	[3,1][883,1]	[7,1][379,1]
2757	2761	[3,1][919,1]	[11,1][251,1]
2769	2773	[3,1][13,1][71,1]	[47,1][59,1]

Al igual que los anteriores, estos tampoco pueden tener factores primos comunes, pues en ese caso la diferencia no podría ser 4. Predominan los pares en los que uno de los términos es múltiplo de 3, con pocas excepciones, como 19561=31*631 y 19565=5*7*13*43. Como ambos son impares, si el primero es múltiplo de 3 se cumplirá que el segundo es del tipo 6k+1. Basta desarrollar 3*(2m+1)+4=6m+7=6k+1. Si el múltiplo de 3 es el segundo, el primero será 3*(2m+1)-4=6m-1

Los *arolmar sexy*

En los pares (N,N+6) sí puede existir el factor común 3, y es un caso que se presenta frecuentemente:

N	N+6	Factores(N)	Factores(N+6)
231	237	[3,1][7,1][11,1]	[3,1][79,1]
483	489	[3,1][7,1][23,1]	[3,1][163,1]
627	633	[3,1][11,1][19,1]	[3,1][211,1]
663	669	[3,1][13,1][17,1]	[3,1][223,1]
987	993	[3,1][7,1][47,1]	[3,1][331,1]
1887	1893	[3,1][17,1][37,1]	[3,1][631,1]
2067	2073	[3,1][13,1][53,1]	[3,1][691,1]
2751	2757	[3,1][7,1][131,1]	[3,1][919,1]
3507	3513	[3,1][7,1][167,1]	[3,1][1171,1]
4117	4123	[23,1][179,1]	[7,1][19,1][31,1]
4191	4197	[3,1][11,1][127,1]	[3,1][1399,1]
4623	4629	[3,1][23,1][67,1]	[3,1][1543,1]
5307	5313	[3,1][29,1][61,1]	[3,1][7,1][11,1][23,1]
5559	5565	[3,1][17,1][109,1]	[3,1][5,1][7,1][53,1]
5713	5719	[29,1][197,1]	[7,1][19,1][43,1]
6531	6537	[3,1][7,1][311,1]	[3,1][2179,1]

Como en casos similares, nos podemos preguntar si existirán pares con cualquier diferencia par que imaginemos. En la tabla siguiente hemos reflejado la primera aparición de dos números *arolmar* con diferencia 2k igual al doble de la dada k.

Primera ocurrencia de la diferencia 2k		
k	arolmar1	arolmar1+2k
1	913	915
2	129	133
3	231	237
4	85	93
5	195	205
6	21	33
7	217	231
8	69	85
9	177	195
10	85	105
11	195	217
12	33	57
13	205	231
14	57	85
15	597	627
16	145	177
17	231	265
18	21	57
19	445	483
20	93	133

Podemos confiar en que sea verdadera la conjetura de que para una diferencia dada 2k siempre existirá un par de números arolmar con esa diferencia.

Hemos proseguido con PARI y para las primeras 1000 diferencias pares nos resultan números arolmar no excesivamente grandes.

913, 129, 231, 85, 195, 21, 217, 69, 177, 85, 195, 33, 205, 57, 597, 145, 231, 21, 445, 93, 195, 85, 889, 21, 145, 33, 177, 253, 195, 33, 133, 21, 129, 145, 195, 21, 553, 57, 231, 133, 483, 21, 145, 57, 105, 85, 1239, 33, 133, 33, 93, 133, 1239, 21, 85, 21, 195, 133, 663, 57, 505, 21, 69, 85, 663, 85, 493, 69, 57, 253, 793, 33, 85, 57, 483, 85, 627, 21, 469, 57, 33, 85, 627, 69, 493, 33, 21, …

Ello puede ser debido a la tendencia prácticamente lineal de los números *arolmar*.

Ternas de números *arolmar* gemelos

Ya hemos adivinado que los números que estudiamos son más asequibles que los primos para ciertas propiedades. Por ejemplo, podemos encontrar muchas ternas de números *arolmar* con diferencia igual a 2:

4713, 4715, 4717
12813, 12815, 12817
26941, 26943, 26945
27861, 27863, 27865
46293, 46295, 46297
56013, 56015, 56017
57757, 57759, 57761
63969, 63971, 63973
66009, 66011, 66013…

Dejamos a los lectores su búsqueda, así como otras estructuras similares. Sólo daremos algún otro ejemplo destacado.

663243, 663245, 663247, 663249, es una cuaterna de números arolmar gemelos. Aquí tienes el desarrollo:

arolmar	663243	663245	663247	663249
Factores	[3,1][7,1][31583,1]	[5,1][11,1][31,1][389,1]	[13,1][163,1][313,1]	[3,1][221083,1]
Promedio	10531	109	163	110543

979145, 979147, 979149, 979151 es la siguiente.

Con cinco pares consecutivos hemos encontrado estos: 10075387, 10075389, 10075391, 10075393, 10075395. La comprobación es esta:

arolmar	10075387	10075389	10075391	10075393	10075395
Factores	[7,1][73,1][19717,1]	[3,1][3358463,1]	[137,1][251,1][293,1]	[67,1][150379,1]	5,1][11,1][227,1][269,1]
Promedio	6599	1679233	227	75223	103

Os dejamos el resto de búsquedas de este tipo.

COINCIDENCIAS

Los números *arolmar* pueden presentar otras características, pertenecer a otro tipo de números. Por definición, no pueden ser primos ni cuadrados, pero sí, por ejemplo, triangulares. Aquí tienes los primeros números arolmar que también son triangulares:

(En la tabla figura el número **n**, su orden como triangular y sus factores)

n	Ordentriang	factores
21	6	[3,1][7,1]
105	14	[3,1][5,1][7,1]
231	21	[3,1][7,1][11,1]
253	22	[11,1][23,1]
465	30	[3,1][5,1][31,1]
861	41	[3,1][7,1][41,1]
1653	57	[3,1][19,1][29,1]
5253	102	[3,1][17,1][103,1]
5565	105	[3,1][5,1][7,1][53,1]
8911	133	[7,1][19,1][67,1]

Entre ellos hay pocos semiprimos, ya que se pueden necesitar más factores para construir una expresión del tipo n(n+1)/2. Un caso especial es el 231, que es triangular de orden también triangular.

Como ser triangular aquí es una mera casualidad, no aparecen muchos. Inferiores a 10000 sólo hay los diez de la tabla.

También pueden ser pentagonales:

N	Orden_5	Factores
145	10	[5,1][29,1]
1717	34	[17,1][101,1]
4845	57	[3,1][5,1][17,1][19,1]
5017	58	[29,1][173,1]
7107	69	[3,1][23,1][103,1]
9087	78	[3,1][13,1][233,1]

O hexagonales:

N	Orden_6	Factores
231	11	[3,1][7,1][11,1]
861	21	[3,1][7,1][41,1]
1653	29	[3,1][19,1][29,1]
5565	53	[3,1][5,1][7,1][53,1]
8911	67	[7,1][19,1][67,1]

Otra causalidad es que un *arolmar* pertenezca a la sucesión de Fibonacci. Entre los inferiores a 25000 sólo hemos encontrado estos dos, el de orden 8 y el de 16.

N	Quefibo
21	8
987	16

Existen también palindrómicos

33
393
505
565
949
969
1221
1441
5885

Y también hipotenusas de ternas pitagóricas:

N	Catetos
85	13 , 84
105	63 , 84
145	17 , 144
195	48 , 189
205	45 , 200
265	23 , 264
445	84 , 437

Parecerá que deben ser múltiplos de 5, pero no es necesario. El siguiente en la lista es el 493.

Con estos ejemplos vemos que los números *arolmar* están entremezclados con los de otros tipos, compartiendo términos con muchos de ellos. La principal causa de esto es su relativa abundancia y su tendencia casi lineal (ver la primera entrada de esta serie ENLACE), que los aproxima a otros que presentan tendencias distintas.

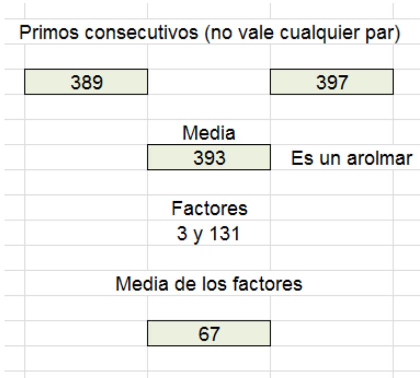
Números *arolmar* interprimos

En la entrada anterior (ENLACE) presentamos pares de números *arolmar* gemelos entremezclados con primos gemelos. Esto nos anima a buscar interprimos, es decir, números que son media aritmética entre dos números primos consecutivos. Ya señalamos que la abundancia de los números *arolmar* propicia que aparezcan bastantes situaciones que planteemos. Esta es una de ellas. Basta ver la tabla para darse cuenta de la abundancia de los números *arolmar* interprimos:

AROLMAR	Primo anterior	Primo siguiente
21	19	23
69	67	71
93	89	97
105	103	107
129	127	131
195	193	197
205	199	211
217	211	223
231	229	233
309	307	311
393	389	397
465	463	467
483	479	487
489	487	491
645	643	647
861	859	863
897	887	907
915	911	919

Comprueba con algunos casos que los números primos son consecutivos y que su media es el número *arolmar*.

Un número *arolmar*, por definición, produce un número primo como media de sus divisores primos. Así tendríamos una generación de primos a partir de dos de ellos consecutivos. Esto no es más que una curiosidad, pero muy atractiva. Tienes un ejemplo en la imagen siguiente:



Es evidente que esta generación sólo tiene lugar si los dos primos tienen como media un número *arolmar*. Lo destacable, y eso lo hemos visto en anteriores entradas, es que los números *arolmar* relacionan números primos con otros fácilmente. En la siguiente entrada veremos más.

Dobles interprimos

Recientemente hemos publicado la sucesión de dobles interprimos (https://oeis.org/A263674), aquellos que son media de dos primos consecutivos y también del anterior y el posterior a ese par. Por ejemplo, es doble interprimo el 9, porque 9 = (7+11)/2 = (5+13)/2, con 5, 7, 11, 13 primos consecutivos. También entre ellos figuran algunos *arolmar*:

AROLMAR	Factores	Media prima	Cuatro primos consecutivos				Media
105	[3,1][5,1][7,1]	5	101	103	107	109	105
195	[3,1][5,1][13,1]	7	191	193	197	199	195
489	[3,1][163,1]	83	479	487	491	499	489
897	[3,1][13,1][23,1]	13	883	887	907	911	897
987	[3,1][7,1][47,1]	19	977	983	991	997	987
1569	[3,1][523,1]	263	1559	1567	1571	1579	1569
2121	[3,1][7,1][101,1]	37	2111	2113	2129	2131	2121
3219	[3,1][29,1][37,1]	23	3209	3217	3221	3229	3219
3615	[3,1][5,1][241,1]	83	3607	3613	3617	3623	3615
4449	[3,1][1483,1]	743	4441	4447	4451	4457	4449

Estos son los primeros que aparecen. Hemos incluido sus factores y media prima, así como los cuatro primos consecutivos de los que el *arolmar* es media de dos en dos (y por tanto, también de los cuatro). Se observa que no existe relación aparente entre la media prima y los valores y diferencias entre los cuatro primos consecutivos. Era de esperar.

¿Existen *arolmar* equilibrados?

Llamaremos *arolmar* equilibrados a aquellos que son media de otros consecutivos con ellos y de la misma clase (también *arolmar*).

Sí existen, y son estos:

ANTERIOR	EQUILIBRADO	POSTERIOR
493	505	517
1221	1239	1257
1257	1265	1273
1333	1345	1357
2245	2255	2265
3417	3435	3453
3597	3615	3633
3805	3817	3829
4713	4715	4717
4873	4885	4897
5965	5989	6013
6099	6117	6135
6313	6349	6385
8585	8593	8601
9169	9177	9185
9177	9185	9193
9213	9231	9249

En ellos el número *arolmar* del centro es media entre los dos extremos, que también son *arolmar*. Vemos, por ejemplo, la terna 2245, 2255 y 2265. Es evidente que el central es media de los otros dos. En la siguiente tabla los analizamos:

Terna	Factores	Media prima	Es primo
2245	[5,1][449,1]	227	VERDADERO
2255	[5,1][11,1][41,1]	19	VERDADERO
2265	[3,1][5,1][151,1]	53	VERDADERO

Los tres son compuestos, libres de cuadrados y media prima, luego 2255 es un arolmar equilibrado. Como en curiosidades anteriores, la media prima resultante no ha de tener ninguna relación aparente con la terna que elijamos.

Entre ellos figurarán las ternas de gemelos, cousin o sexy.

Arolmar abundantes

Al ser los *arolmar* números libres de cuadrados parece que no habrá muchos entre ellos que sean abundantes, es decir, que sus divisores propios presenten una suma mayor que el número dado, o bien que sigma(n)>2n (https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_abundante)

Efectivamente, hasta el 33495 no aparece ningún *arolmar* abundante. En la siguiente tabla están contenidos los primeros, junto con su descomposición factorial, el cociente sigma(n)/n y la media prima:

AROLMAR	Factores	Sigma(n)/n	Media prima
33495	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]	2,063592	11
41055	[3,1][5,1][7,1][17,1][23,1]	2,020314	11
50505	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]	2,022453	13
68145	[3,1][5,1][7,1][11,1][59,1]	2,028615	17
102795	[3,1][5,1][7,1][11,1][89,1]	2,017219	23
206745	[3,1][5,1][7,1][11,1][179,1]	2,005949	41
276045	[3,1][5,1][7,1][11,1][239,1]	2,003152	53
310695	[3,1][5,1][7,1][11,1][269,1]	2,002221	59
451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]	2,203979	11
770385	[3,1][5,1][7,1][11,1][23,1][29,1]	2,153313	13
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]	2,139741	13

Llama la atención que todos contienen como factores 3, 5, 7 y 11 o 13, y que, por tanto, la media prima sea también relativamente pequeña. Parece ser que la existencia de primos pequeños propicia que existan más divisores y su suma aumente hasta sobrepasar 2n. Dejamos esta cuestión para otro momento.

Podríamos seguir buscando coincidencias con otros tipos de números, pero parece quedar claro que rara es la propiedad que no está presente en algún término de nuestra sucesión.

¿QUÉ HAY ENTRE DOS *AROLMAR*?

Esta es la cuarta entrada de la serie que dedicamos a estos números de nuestra invención. Si deseas leer las anteriores basta con que señales la etiqueta “Números AROLMAR” en el blog.

Una cuestión que ya estudiamos en otra entrada respecto a los números primos, la aplicamos hoy a los números *arolmar*. Deseamos saber qué hay entre dos *arolmar* consecutivos, por ejemplo si hay primos, cuadrados, triangulares y otros. La frecuencia de nuestros números es similar a la de los números primos, por lo que los resultados mostrarán similitudes. Comenzamos con los cuadrados.

Cuadrados entre dos arolmar

En la primera entrada de esta serie

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/12/volvemos-los-numeros-arolmar-1-historia.html definimos la función ***esarolmar***, tanto para Basic VBA como para PARI. Ahora necesitaremos la función ***proxarolmar***, que devuelve el primer *arolmar* que sigue a cualquier número:

Function proxarol(a) As Long (Versión para VBA)

```
Dim p, prim As Long
Dim sale As Boolean

p = a + 1: sale = False: prim = 0
While Not sale
If esarolmar(p) Then prim = p: sale = True
p = p + 1
Wend
proxarol = prim
End Function
```

No necesita mucha explicación para entender el proceso: va avanzando en los números siguientes al dado hasta encontrar el primer *arolmar*.

La función en PARI, basada en la ya definida ***esarolmar***, quedaría así:

```
proxarol(n)={local(p=0,k);k=n+1;while(p==0,if(esarolmar(k),p=k);k+=1);p}
```

Con esta función podemos investigar qué tipo de números se puede encontrar entre dos *arolmar* consecutivos. Comenzamos con los cuadrados. En Basic se puede programar así:

```
Function num_entrearol(n, tipo)
Dim nm, p, i
nm = 0

If esarolmar(n) Then
p = proxarol(n)
For i = n + 1 To p - 1
Select Case tipo
Case 1: If escuad(i) Then nm = nm + 1
Case 2: If estriangular(i) Then nm = nm + 1
End Select
Next i
End If
num_entrearol = nm
End Function
```

Está preparada para contar cuadrados, triangulares u otros según el tipo. En el listado nos hemos limitado a los casos cuadrado o triangular. También se adapta a PARI, pero no lo incluimos por no alargar.

Al recorrer esta función para cuadrados en todos los números *arolmar* nos llevamos una sorpresa: *entre dos arolmar consecutivos aparecen como mucho dos* *cuadrados*. En efecto, aquí tienes el listado para los primeros:

Arolmar	Cuadrados entre dos
21	1
33	2
57	1
69	1
85	0
93	1
105	1
129	0
133	1
145	1
177	0
195	1
205	0
213	0
217	1
231	0
237	0

De hecho, el valor de 2 sólo se alcanza en el 33 y el 309. En el resto sólo se han encontrado o un cuadrado o ninguno. Una causa probabilística de esto es que los cuadrados se van espaciando, para cada N en un incremento de 2N+1, mientras que los *arolmar* siguen un crecimiento aproximadamente lineal con incrementos próximos a 17. Hemos probado hasta 10^7 sin encontrar dos arolmar consecutivos entre los que existan tres cuadrados. La cota se queda en 2 para los casos citados. El 309 lo volveremos a encontrar más adelante, ya que presenta una diferencia grande con el siguiente *arolmar*.

Expresamos la conjetura:

Entre dos números arolmar consecutivos mayores que 309, existe a lo más un cuadrado.

Triangulares comprendidos

Esperamos aquí un fenómeno similar, ya que los triangulares crecen con incrementos también crecientes. Acudimos al programa en Basic y nos queda:

21	1
33	3
57	1
69	1
85	1
93	0
105	1
129	0
133	1
145	2
177	1
195	0
205	1
213	0
217	0
231	0

Descubrimos un 3, lo que es lógico, ya que los triangulares dejan intervalos entre ellos más pequeños que los cuadrados. Con el valor 3 aparecen los mismos números que en el caso de los cuadrados: el 33, que está seguido por los triangulares 36, 45 y 55 antes de llegar al siguiente *arolmar* 57, y el 309, seguido de 325, 351 y 378.

Esto nos hizo sospechar que nunca se daría el valor 4. Hemos adaptado nuestro código en PARI y, en efecto, para n<10^7 no se presenta ningún 4. Lo damos por bueno, como conjetura:

Entre dos números arolmar consecutivos mayores que 309, existen a lo más tres triangulares.

¿Ocurrirá algo parecido con los oblongos, dobles de triangulares o los poligonales?

Así es: sólo en los valores 33, 265 y 309 se intercalan 2 oblongos. Hemos buscado el valor 3 y no aparece. Con los pentagonales sólo poseen el valor 2 los ya sabidos 33 y 309. Prueba con otros tipos, pero por nuestra parte ya está bien. Hemos descubierto de paso que estos números 33 y 309 presentan un comportamiento especial.

Primos intercalados

Vimos en entradas anteriores que el ritmo de aparición de primos y de números *arolmar* es parecido. Por eso no debe extrañar que se den muchos valores distintos al contar primos entre dos *arolmar* consecutivos. Desde 0 hasta 30 aparecen para números inferiores a un millón. Aquí tienes los primeros:

Arolmar	Primos intercalados
21	3
33	5
57	3
69	4
85	1
93	3
105	4
129	1
133	2
145	6
177	4
195	2
205	1
213	0

Llama la atención que de nuevo el 309 destaca, en este caso por tener 14 primos intercalados hasta el siguiente arolmar 393. No es nada extraordinario, pues un par que está distanciado entre sí.

Potencias de primo.

Si en lugar de contar primos contamos sus potencias no triviales (de exponente mayor que 1), el número de intercalados disminuye bastante:

Arolmar	Potencias de primo intercaladas
21	3
33	1
57	1
69	1
85	0
93	0
105	3
129	0
133	0
145	1
177	0
195	0
205	0
213	0
217	0
231	0
237	1
249	0
253	1
265	1
309	2

Entre 21 y 33 aparecen 5^2, 3^3 y 2^5, y entre 105 y 129, 11^2, 5^3 y 2^7. Detrás de estos hay que saltar al 2173 y no aparecen más, al menos hasta 10^7. Consideraciones probabilísticas nos llevan a pensar que no hay más casos.

Como resumen destacamos que el comportamiento de los intervalos entre arolmar es bastante parecido al comprendido entre primos, pero con las frecuencias de aparición un poco mayores.

SEMIPRIMOS *AROLMAR*

Proseguimos en esta entrada el regreso a los números ***arolmar*** que emprendimos en las anteriores. En esta nos dedicaremos a estudiar los términos de la sucesión que son semiprimos. Hemos descubierto que son bastante interesantes, ya que dan lugar a propiedades curiosas.

Caso de dos factores primos

En esta sucesión de números *arolmar* https://oeis.org/A187073 es fácil encontrar los términos que son semiprimos:

21, 33, 57, 69, 85, 93, 129, 133, 145, 177, 205, 213, 217, 237, 249, 253, 265, 309, 393, 417, 445, 469, 489, 493, 505, 517, 553, 565, 573,…

21	[3,1][7,1]
33	[3,1][11,1]
57	[3,1][19,1]
69	[3,1][23,1]
85	[5,1][17,1]
93	[3,1][31,1]
129	[3,1][43,1]
133	[7,1][19,1]
145	[5,1][29,1]
177	[3,1][59,1]
205	[5,1][41,1]
213	[3,1][71,1]
217	[7,1][31,1]
237	[3,1][79,1]
249	[3,1][83,1]
253	[11,1][23,1]
265	[5,1][53,1]
309	[3,1][103,1]
393	[3,1][131,1]
417	[3,1][139,1]
445	[5,1][89,1]
469	[7,1][67,1]

Vemos en el listado que todos se descomponen en dos factores primos distintos (el 1 que les acompaña es el exponente). En ellos la suma de sus dos factores primos es evidente que equivale al doble de otro primo. Consecuencia inmediata es que en estos números la suma de sus factores primos presenta al menos dos soluciones para lo exigido por la conjetura de Goldbach. Por ejemplo, 205=5*41, y 46=5+41=23+23=2*23

Ambos primos han de ser del tipo 4k+3 o del tipo 4k+1, pues si fueran de tipos distintos, su suma sería equivalente a 4k+1+4p+3=4(k+p+1), un múltiplo de 4 que no puede ser doble de un primo. Por ejemplo, en

133=7*19, 7=4*1+3 y 19=4*4+3, y en 445=5*89, 5=4*1+1 y 89=4*22+1, ambos del mismo tipo. Sin embargo, respecto al 6, los factores admiten todas las variantes, como puedes comprobar fácilmente.

Por otra parte, los dos factores de un *semiprimo arolmar* no pueden ser primos consecutivos, ya que la media de ambos está intercalada entre ellos.

Así que a cada número de esta lista le corresponderá un número primo, la mitad de la suma de sus factores. Esta relación no tiene que ser biyectiva. Por ejemplo, los términos 93, 145 y 253 se corresponden con el 17. Compruébalo con sus factores primos:

93	[3,1][31,1]	17
145	[5,1][29,1]	17
253	[11,1][23,1]	17

Número *arolmar* correspondiente a un primo

Se puede ver la correspondencia desde el punto de vista opuesto. Podemos tomar un número primo, calcular su doble y descomponerlo en todas las soluciones posibles como suma de primos diferentes. Cada una de ellas, multiplicando ambos primos, producirá un *arolmar*.

(Ver en el documento de Rafael Parra http://www.hojamat.es/parra/arolmar.pdf la explicación de este proceso con el estudio de varios casos)

Por ejemplo, tomemos el 23. Su doble, 46, se puede descomponer como suma de dos primos diferentes así: 46=3+43=5+41=17+29. Si ahora multiplicamos los dos factores de cada descomposición, nos resultarán tres números *arolmar*: 129, 205 y 493.

La correspondencia entre números primos y números *arolmar* semiprimos no es biyectiva.

En el documento de Rafael Parra se consideran todos los casos similares, se descompongan en dos o en más sumandos primos. Ahora nos limitaremos al caso de dos factores.

Número *arolmar* mínimo y asociados para un primo dado.

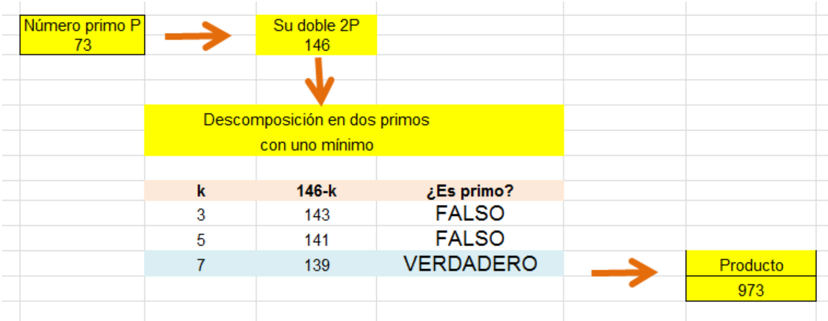
Siguiendo las ideas del documento citado de Rafael Parra, si de todos los números *arolmar* que se corresponden con un primo dado eligiéramos el mínimo (en el ejemplo anterior el 129) sí podríamos establecer la correspondencia biyectiva. Es fácil ver, como sugiere Rafael Parra, que basta elegir el que posea el número primo menor en una descomposición en dos factores, en el ejemplo 129=3*43.

Con un poco de álgebra es fácil demostrarlo: llamemos P a ese factor primo mínimo (será $P<N/2$) y N al doble del primo dado. El número *arolmar* generado será entonces P(N-P), mientras que todo otro número de ese tipo tendrá la expresión (P+k)(N-P-k) con $0<P+k<N/2$ (si suponemos los factores ordenados). Restamos ambas expresiones:

$$(P+k)(N-P-k)- P(N-P)= PN-PP-Pk+kN-kP-kk-PN+PP=k(N-P-P-k)=k(N/2-P+N/2-(P+k))>0$$

Luego (P+k)(N-P-k) es siempre mayor que P(N-P). Si aumentamos el número de factores, el número *arolmar* correspondiente sería aún mayor, luego este semiprimo con un primo mínimo es el menor posible.

Así que el número *arolmar* mínimo asociado a cualquier número primo es el que contiene el factor primo menor posible en una descomposición con dos factores. Podemos resumir el proceso mediante este esquema:



Tomamos el primo 73, le calculamos el doble 146, ensayamos sumas de primos para él y nos quedamos con la que presente el menor primo. En este caso 7+139. Multiplicamos ambos y nos resulta 973.

Dado un primo P y su número *arolmar* asociado R, se tendrá, si sólo posee dos factores, que R=(P+K)(P-K), siendo ambos paréntesis primos, es decir P^2-K^2 con un K adecuado, siempre par. Por tanto R estará siempre acotado por P^2.

Rafael Parra ha llamado a estos números mínimos “primos *arolmar*”, y al resto, no minimales, “asociados”. En la secuencia publicada por él (http://oeis.org/A191683) figuran todas las soluciones para cada primo mayor que 3 y para cada número de sumandos:

21, 33, 57, 69, 93, 105, 129, 177, 195, 213, 217, 237, 249, 265, 309, 393, 417, 445, 465, 483, 489, 565, 573, 597, 633, 645, 669,…

Es evidente que es una subsecuencia de la sucesión A187073. Como nos hemos comprometido en esta entrada a un desarrollo limitado a los semiprimos, seguimos con esa condición. Veremos lo siguiente:

A cada número primo le corresponde un único "primo *arolmar*" semiprimo

Esto es fácil de entender, pero la característica de ser únicos convierten a estos números en ***imágenes de una función***. Podemos definir PRIMAROL a la función que hace corresponder a cada número primo el semiprimo ya definido.

Un ejemplo:

Elegimos el número primo 103. Su doble, 206, admite estas descomposiciones de dos sumandos primos (recuerda que nos limitamos a este caso, pero podrían ser 3 o más)

7	199	1393
13	193	2509
43	163	7009
67	139	9313
79	127	10033
97	109	10573

Elegimos el mínimo, 1393, y lo definiremos como primarol(103)=1393.

La formación de PRIMAROL queda clara con el esquema incluido más arriba. No está definida ni para el 2 ni para el 3. La razón es que detrás de todo esto está la conjetura de Goldbach. Esta correspondencia biyectiva nos demuestra que los conjuntos de números ***arolmar*** y ***primos arolmar*** es infinito, hecho que se podía adivinar observando su evolución.

Implementación en una hoja de cálculo

No es difícil implementar esta función en Basic si cuentas con la función ESPRIMO

Public Function primarol(a)
Dim i, p, k, n
Dim novale As Boolean

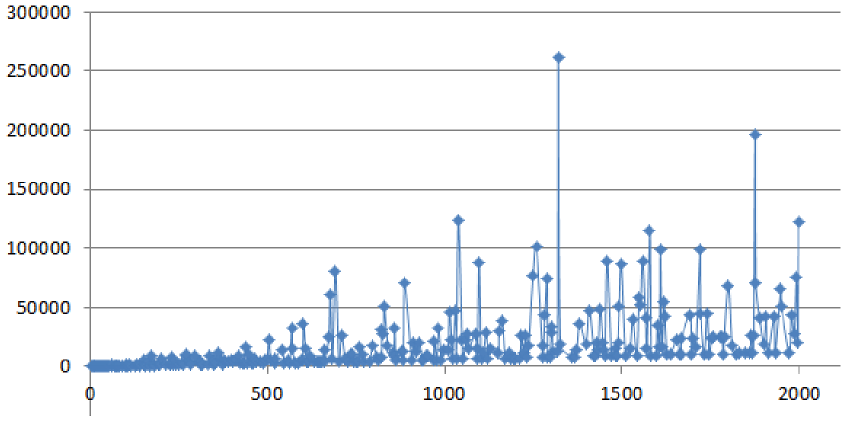
k = 2: p = 0: n = a * 2
novale = True
While novale And k < n / 2 ‘Buscamos la primera suma de primos
If esprimo(k) And esprimo(n - k) Then
p = k * (n - k) ‘Hemos encontrado la suma. Como sólo queremos el mínimo, paramos.

novale = False ‘Señal de parada
End If
k = k + 1
Wend
primarol = p ‘La función recoge el producto más pequeño
End Function

Esta función no conserva el orden, pues a mayor número primo no le corresponde una imagen también mayor. Por ejemplo, el 217 aparece como imagen de 19 y más adelante el 129 como imagen de 23

La función primarol no es creciente.

Lo puedes comprobar con este gráfico de dispersión:



El máximo que destaca corresponde al primo 1321, cuyo doble 2642 se descompone en la suma

2642=103+2539, que da el semiprimo minimal 261517=103*2539

Estudio con PARI

Para quien tenga una cierta experiencia en el tema, no es difícil traducir el código de ***primarol*** a PARI:

primarol(a)={local(k=2,p=0,n=a*2,v=1); while(v>0&&k<n/2, if(isprime(k)&&isprime(n-k),p=k*(n-k);v=0);k+=1);p}

Con esta definición podemos, por ejemplo encontrar la imagen del primer primo de 7 cifras:

Primarol(1000003)=6000009=3*2000003

Relación con ternas de primos en progresión

Es evidente, según lo tratado hasta ahora, que los números *arolmar* semiprimos se basan en una progresión aritmética formada por una terna de números primos, pues en ese caso el primo central será la media aritmética de los otros dos. Así por ejemplo, 3, 13 y 23 forman el número ***arolmar*** semiprimo 3*23=69 y, al contrario, cualquier otro elemento de la sucesión, como 669=3*223, da lugar a la progresión 3, 113, 223.

Así que, de paso, hemos comprobado que existen infinitas ternas de primos en progresión aritmética.

Un caso especialmente llamativo es el de los primos equilibrados: 5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977 (http://oeis.org/A006562)

En ellos los integrantes de la terna son el anterior y posterior primo al central y darán, según consideraciones que hemos visto en párrafos anteriores, el mayor número *arolmar* correspondiente al primo central. Formamos una tabla:

Primo	Arolmar
5	21
53	2773
157	24613
173	29893
211	44377
257	66013
263	69133
373	139093
563	316933
593	351613
607	368413
653	426373
733	537253
947	896773
977	954493
1103	1216573
1123	1261093
1187	1408933
1223	1495693
1367	1868653
1511	2282977
1747	3051973
1753	3072973
1907	3636613

En ella vemos el rápido crecimiento, por ser maximales los números generados por este procedimiento.

SEMIPRIMOS *AROLMAR* ENLAZADOS

Vimos en la anterior entrada dedicada a este tema ENLACE que cada *semiprimo arolmar* está determinado por un par de primos cuya media es otro primo. Podíamos intentar enlazar el tercer primo de la terna con un cuarto primo (el menor posible) que también formara un *arolmar* con el tercero. Según la tabla incluida en la anterior entrada

21	[3,1][7,1]
33	[3,1][11,1]
57	[3,1][19,1]
69	[3,1][23,1]
85	[5,1][17,1]
93	[3,1][31,1]
129	[3,1][43,1]
133	[7,1][19,1]
145	[5,1][29,1]
177	[3,1][59,1]
205	[5,1][41,1]
213	[3,1][71,1]
217	[7,1][31,1]
237	[3,1][79,1]
249	[3,1][83,1]
253	[11,1][23,1]
265	[5,1][53,1]
309	[3,1][103,1]
393	[3,1][131,1]
417	[3,1][139,1]
445	[5,1][89,1]
469	[7,1][67,1]

21=3*7 está enlazado con 133=7*19, con lo que los tres primos 3, 7 y 19 están enlazados con sus medias 5 y 11 y sus números arolmar 21 y 133. El 33=3*11 está enlazado con 253=11*23.

Igual que conjeturamos que a cada primo P le correspondía un *arolmar* semiprimo cuyos factores primos sumaran 2P, ahora podemos intentar que dado un primo P, encontrar otro primo cuya media con el primero también sea prima. Así, las cadenas de semiprimos *arolmar* enlazados alcanzarían una longitud infinita.

Hemos implementado esta búsqueda de un segundo primo en hoja de cálculo, con lo que podemos crear cadenas de primos enlazados con media prima entre cada dos consecutivos. Su código es el siguiente:

Public Function proxprimrol(p)
Dim pr, prox
Dim es As Boolean

If Not esprimo(p) Then proxprimrol = 0: Exit Function ‘Si no es primo se devuelve un cero
pr = p + 1 ‘La variable **pr** busca el siguiente primo válido
es = True ‘Control del WHILE
prox = 0
While es
pr = primprox(pr) ‘Busca los primos siguientes
If esprimo((p + pr) / 2) Then prox = pr: es = False ‘Si la media es prima, lo hemos encontrado
Wend
proxprimrol = prox
End Function

En esta función nos hemos arriesgado a que se entre en un bucle sin fin si no se encuentra el siguiente primo, pero confiamos en la conjetura de que todo primo encontrará su pareja.

En una primera exploración podemos observar que todos los primos se encadenan con otros mayores, y que se forman cadenas que al principio son independientes, pero que al final aparecen términos comunes. En la siguiente tabla están ordenados por columnas:

Primos encadenados arolmar

3	5	11	13	31	37	41
7	17	23	61	43	97	53
19	29	59	73	79	109	89
43	53	83	181	127	193	113
79	89	131	241	151	229	149
127	113	167	313	163	313	197
151	149	179	349	199	349	257
163	197	347	397	223	397	269
199	257	359	421	331	421	293
223	269	419	457	367	457	401
331	293	443	541	379	541	461
367	401	479	601	439	601	521
379	461	503	613	487	613	593
439	521	683	673	607	673	641
487	593	719	709	619	709	653
607	641	827	757	643	757	701
619	653	887	997	739	997	821

Calcula mentalmente la media entre dos consecutivos de una misma columna y verás que el resultado es primo: (61+73)/2=67, (109+193/2=151…

Observamos que los primos 3, 5, 11, 13, 31, 37 y 41 inician cadenas independientes (al principio), pero algunas de ellas desembocan en un elemento común. Por ejemplo. El 53 tiene como antecesores el 29 y el

41, ya que (29+53)/2=41, primo, y (41+53)/2=47, también primo. No se incluye el 2 porque su carácter par lo invalida para esta operación.

Otros primos, como el 7, tienen antecedentes, y no inician cadena (ya que (3+7)/2=5, primo).

Elementos primarios

¿Qué números primos no tienen antecedentes? Conocemos por la tabla que parecen no tener el 3, 5, 11 y 13 (luego veremos que no es cierto, pues el 11 sí tiene antecedente 3). A aquellos que no provienen de otros en la cadena les llamaremos *primarios*. Un número primo será de este tipo si no forma media prima con ninguno de los primos menores que él. Como siempre, resolveremos esta cuestión con una función, que recorra los primos menores que el dado y busque si forman media prima con él. Puede ser esta:

Public Function esprimario(p) As Boolean
Dim prev
Dim espr As Boolean

If Not esprimo(p) Then esprimario = False: Exit Function
prev = primant(p) ‘comenzamos la búsqueda con el primo anterior

espr = True
While espr And prev > 0
If esprimo((prev + p) / 2) Then espr = False ‘Si aparece media prima, no es primario
prev = primant(prev) ‘seguimos descendiendo en la lista de primos
Wend
esprimario = espr
End Function

Al aplicar esta función nos llevamos una sorpresa: los únicos primarios que resultan son 3, 5, 13 y 37. Hemos buscado en números mayores sin encontrar ningún otro. Los demás poseen un antecedente en la cadena. Si no aparecen claramente en la tabla anterior es porque se construyó con primos de este tipo consecutivos, y no han de serlo. Por ejemplo, un antecedente de 11 es el 3, porque (11+3)/2=7 es primo. Si modificamos ligeramente la función anterior, podemos construir una tabla de antecedentes mayores, los más próximos al primo dado:

Primo	Antecedente mayor	Media prima
3	0	
5	0	
7	3	5
11	3	7
13	0	
17	5	11
19	7	13
23	11	17
29	17	23
31	7	19
37	0	
41	17	29
43	31	37
47	11	29
53	41	47
59	47	53
61	13	37
67	19	43
71	47	59
73	61	67
79	67	73
83	59	71
89	53	71
97	61	79
101	41	71
103	43	73
107	71	89
109	97	103
113	101	107
127	79	103

Figuran con un cero los elementos primarios. Para quienes se interesen por la programación, adjuntamos su código:

```
Public Function antec(p)
Dim prev, espr

If Not esprimo(p) Then antec = 0: Exit Function
prev = primant(p)
espr = 0
While espr = 0 And prev > 0
If esprimo((prev + p) / 2) Then espr = prev
prev = primant(prev)
Wend
```

antec = espr
End Function

Al recorrer la tabla descubrimos algo muy interesante, y es que si formamos cadenas descendentes con cada primo y su antecedente mayor, al final desembocaremos en 3, 5, 13 o 37. Por ejemplo, elegimos un elemento de la tabla, sea el 109. Buscando en la misma iremos descendiendo mediante antecedentes: 109 – 97 – 61 – 13. Otro: 101 – 41 – 17 – 5.

Conjetura: Si se forma una cadena a partir de un número primo insertando en cada tramo el máximo primo que forma media prima con el anterior, el proceso terminará en 3, 5, 13 o 37.

Esta propiedad divide a los números primos en cuatro clases, según sea el final de su cadena de antecedentes. Estas clases son disjuntas, porque el final es único, y abarcan todos los números primos salvo 3, 5, 13 o 37 o bien otro mayor que se descubra algún día como contraejemplo de la conjetura. Aquí las tienes:

3	7	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103	107
5	17	29	41	53	89	101	113	137	149	173	197	233	257	269
13	61	73	97	109	157	181	193	229	241	277	313	337	349	373
37														

La primera está formada por todos los primos que se encadenan hasta el 3, y son todos del tipo 4K+3. Las dos siguientes desembocan en 5 y 13 respectivamente. Su tipo es 4K+1. La cuarta clase, sorprendentemente, sólo está formada por el número 37. Ningún primo superior parece terminar su serie de antecedentes en el 37

Como observación empírica, destacamos que las diferencias entre términos en la primera clase son menores (en promedio) que las de la segunda y las de esta con la tercera.

Si a cada elemento de estas cuatro clases le calculamos la media con su antecedente, no aparecen regularidades en los tipos 4K+1 y 4K+3.

Semiprimos *arolmar* maximales

Si en las clases anteriores multiplicamos cada primo con su antecedente, resultan números *arolmar* semiprimos maximales, es decir, los mayores engendrados por una media prima.

21	33	133	253	217	1333	517	2773	1273	3337	5293
85	493	697	2173	4717	4141	11413	12193	16837	17473	29353
793	4453	5917	10573	15229	17557	21037	44197	43621	50137	75433

La cuarta clase no puede producir semiprimos. En la tabla tienes los primeros en las tres primeras clases.

Comprobarás que no están todos los *arolmar* semiprimos.

Al igual que los primos *arolmar* presentaban una correspondencia biyectiva con los números primos (ver entrada anterior), y eran elementos minimales, esto no se da con los maximales, pues no todo doble de un número primo se puede descomponer en un primo sumado con su antecedente.

Grado de equilibrio en un número arolmar

Las ideas que hemos estado manejando, de primos *arolmar* y semiprimos maximales podrían concretarse en un índice entre 0 y 1 que midiera el grado de equilibrio existente entre los dos primos constituyentes de un semiprimo *arolmar*. El cálculo que nos parece más adecuado es el del cociente entre el primo menor y el mayor. Así, los semiprimos maximales tendrán un índice cercano a 1, y los primos *arolmar* presentarán un valor pequeño. Aquí tienes los índices de los primeros semiprimos arolmar:

AROLMAR	FACTORES	ÍNDICE
21	[3,1][7,1]	0,429
33	[3,1][11,1]	0,273
57	[3,1][19,1]	0,158
69	[3,1][23,1]	0,130
85	[5,1][17,1]	0,294
93	[3,1][31,1]	0,097
129	[3,1][43,1]	0,070
133	[7,1][19,1]	0,368
145	[5,1][29,1]	0,172
177	[3,1][59,1]	0,051
205	[5,1][41,1]	0,122
213	[3,1][71,1]	0,042
217	[7,1][31,1]	0,226
237	[3,1][79,1]	0,038
249	[3,1][83,1]	0,036
253	[11,1][23,1]	0,478
265	[5,1][53,1]	0,094
309	[3,1][103,1]	0,029

Entre los semiprimos arolmar menores que 10000 el más equilibrado (maximal en su clase de suma de factores 146) es el 5293=67*79, con una media prima de 73 y el más desequilibrado 9993=3*3331, de media prima 1667.

NÚMEROS “*AROLMAR*” CON MÁS DE DOS FACTORES

Los números *arolmar semiprimos* nos dieron bastante juego en apartados anterioresr. Probaremos ahora con los que son producto de tres factores primos distintos (recuerda que son números libres de cuadrados).

Números arolmar con más de dos factores primos

Ya presentamos anteriormente la función ESAROLMAR

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/12/volvemos-los-numeros-arolmar-1-historia.html

que determina si un entero positivo es de tipo arolmar o no. La usaremos de nuevo en esta entrada para seguir descubriendo curiosidades.

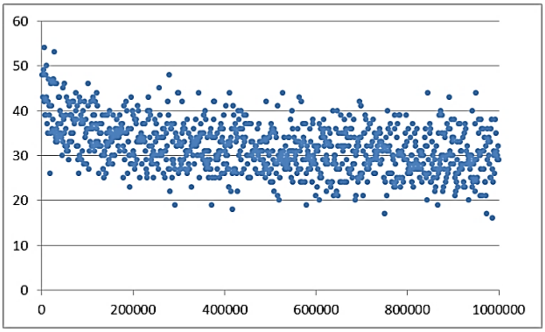
Función arolmarentre

Puede resultar interesante una función que cuente los números *arolmar* existentes entre dos números, o los inferiores a uno dado, tal como se efectúa con los números primos y la función ***prime(N).*** Una vez tenemos definida la función *esarolmar*, bastará crear un bucle desde M hasta N y contar los *arolmar* que aparecen.

Hemos recorrido los enteros de 1000 en 1000 y contado los de tipo *arolmar* que aparecen en ellos. Cuando estudiamos los resultados observamos que existe bastante regularidad si se prescinde de pequeñas oscilaciones. Lo puedes observar en esta tabla, que llega hasta el 20000:

Enteros	Arolmar que aparecen
1000	48
2000	43
3000	48
4000	49
5000	54
6000	42
7000	39
8000	39
9000	48
10000	50
11000	43
12000	37
13000	35
14000	42
15000	47
16000	41
17000	39
18000	26
19000	35
20000	46

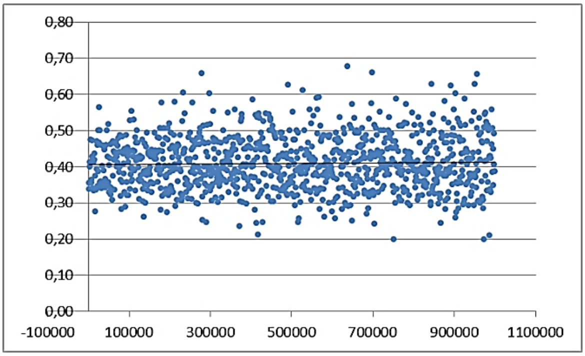
Hemos prolongado el estudio hasta 100000 con hoja de cálculo, resultando un incremento medio de unas 32 apariciones en cada millar, con un coeficiente de variación del 17%, bastante alto e indicativo del grado de oscilación que presentan los datos. Gráficamente:



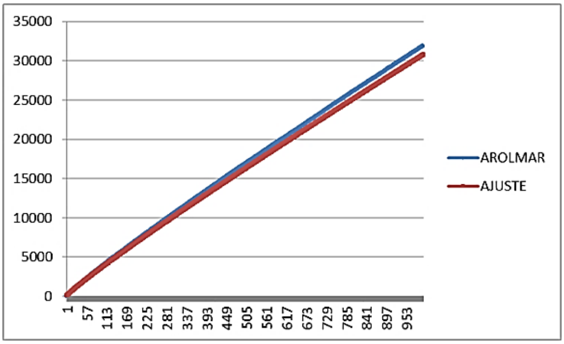
Resulta interesante comparar estos datos con los que nos devuelve la función ***primo(n)***, que calcula los números primos existentes hasta **n**, o, en nuestro caso, entre dos enteros. Al compararlos advertimos un gran paralelismo, tanto que el cociente entre los números *arolmar* de cada intervalo y los números primos existentes en ellos muestra siempre valores cercanos a un promedio de 0,41, por lo que ambos fenómenos van a la par, como hemos comprobado para valores inferiores a 10^6:

Enteros	arolmarentre(n)/primoentre(n
1000	0,36
2000	0,34
3000	0,40
4000	0,41
5000	0,47
6000	0,36
7000	0,36
8000	0,35
9000	0,43
10000	0,47
11000	0,42
12000	0,34
13000	0,33
14000	0,41
15000	0,44
16000	0,42
17000	0,38
18000	0,28
19000	0,34
20000	0,47

Y gráficamente:



Estos resultados nos animan a relacionar la distribución de números *arolmar* con el teorema de los números primos, y ajustar a la expresión 0,42N/ln(N) (hemos aumentado el coeficiente para lograr un mejor ajuste). Lo hemos efectuado y resulta un coeficiente impresionante de R^2=0,99999275. En la gráfica lo vemos:



Números arolmar con tres o más factores

Con la función ***esarolmar*** se pueden emprender búsquedas más fáciles. Por ejemplo, si le añadimos la condición de que el número de factores primos (***f_omega(n)***) sea igual a 3, nos resultarán los ***arolmar 3-p***.

Los primeros son estos:

105, 195, 231, 465, 483, 609, 627, 645, 663, 861, 897, 915, 935, 969, 987, 1185, 1221, 1239, 1265, 1419, 1545, 1581, 1599, 1653, 1729, 1743, 1887, 2067, 2121, 2139, 2255, 2265, 2373, 2409, 2465, 2607, 2679, 2751, 2769, 2821, 2895, 2915, 2967…

Aquí tienes las descomposiciones factoriales de los primeros. Puedes comprobar mentalmente que el promedio de los tres factores es primo. Por ejemplo, 465=3*5*31 y la media de los tres factores es 13, otro primo.

105	5	[3,1][5,1][7,1]
195	7	[3,1][5,1][13,1]
231	7	[3,1][7,1][11,1]
465	13	[3,1][5,1][31,1]
483	11	[3,1][7,1][23,1]
609	13	[3,1][7,1][29,1]
627	11	[3,1][11,1][19,1]
645	17	[3,1][5,1][43,1]
663	11	[3,1][13,1][17,1]
861	17	[3,1][7,1][41,1]
897	13	[3,1][13,1][23,1]
915	23	[3,1][5,1][61,1]
935	11	[5,1][11,1][17,1]
969	13	[3,1][17,1][19,1]
987	19	[3,1][7,1][47,1]
1185	29	[3,1][5,1][79,1]
1221	17	[3,1][11,1][37,1]
1239	23	[3,1][7,1][59,1]
1265	13	[5,1][11,1][23,1]
1419	19	[3,1][11,1][43,1]
1545	37	[3,1][5,1][103,1]
1581	17	[3,1][17,1][31,1]
1599	19	[3,1][13,1][41,1]
1653	17	[3,1][19,1][29,1]
1729	13	[7,1][13,1][19,1]
1743	31	[3,1][7,1][83,1]
1887	19	[3,1][17,1][37,1]
2067	23	[3,1][13,1][53,1]
2121	37	[3,1][7,1][101,1]
2139	19	[3,1][23,1][31,1]
2255	19	[5,1][11,1][41,1]

2265	53	[3,1][5,1][151,1]
2373	41	[3,1][7,1][113,1]
2409	29	[3,1][11,1][73,1]
2465	17	[5,1][17,1][29,1]
2607	31	[3,1][11,1][79,1]
2679	23	[3,1][19,1][47,1]
2751	47	[3,1][7,1][131,1]
2769	29	[3,1][13,1][71,1]
2821	17	[7,1][13,1][31,1]
2895	67	[3,1][5,1][193,1]
2915	23	[5,1][11,1][53,1]
2967	23	[3,1][23,1][43,1]

Número arolmar r-p correspondiente a un primo dado

Siguiendo las ideas aportadas por Rafael Parra en el documento citado (http://www.hojamat.es/parra/arolmar.pdf), dado un primo P, si descomponemos 2P en todas las sumas de primos posibles y nos quedamos con la que presente el producto mínimo (o los factores más pequeños) encontraremos el *primo arolmar* correspondiente a P, que será precisamente ese producto, y los demás números *arolmar* asociados que no tendrán ese carácter minimal. Este procedimiento se aplica a cualquier número de factores, sustituyendo 2P por 3P, 4P,…por lo que dará lugar a números *arolmar* producto de un número cualquiera de factores.

Por ejemplo, deseamos encontrar el primo arolmar correspondiente al primo 11, con cuatro factores. Bastará encontrar todas las descomposiciones de 4*11=44 en sumas de cuatro primos y con media prima.

X1	X2	X3	X4	Promedio	Producto
3	5	7	29	11	3045
3	5	13	23	11	4485
3	5	17	19	11	4845
3	7	11	23	11	5313
3	11	13	17	11	7293
5	7	13	19	11	8645

El mínimo 3045 será el primo *arolmar* que puede constituir una función del primo 11 y del número 4 de factores.

Aumento de factores a partir un número *arolmar* dado

Un caso interesante es el de aquellos números *arolmar* de tres factores que provienen de un arolmar semiprimo al que multiplicamos por la media de sus factores, que será prima:

Semiprimo	Factores	3-casiprimo	Factores
21	[3,1][7,1]	105	[3,1][5,1][7,1]
33	[3,1][11,1]	231	[3,1][7,1][11,1]
57	[3,1][19,1]	627	[3,1][11,1][19,1]
69	[3,1][23,1]	897	[3,1][13,1][23,1]
85	[5,1][17,1]	935	[5,1][11,1][17,1]
93	[3,1][31,1]	1581	[3,1][17,1][31,1]
129	[3,1][43,1]	2967	[3,1][23,1][43,1]
133	[7,1][19,1]	1729	[7,1][13,1][19,1]
145	[5,1][29,1]	2465	[5,1][17,1][29,1]
177	[3,1][59,1]	5487	[3,1][31,1][59,1]
205	[5,1][41,1]	4715	[5,1][23,1][41,1]
213	[3,1][71,1]	7881	[3,1][37,1][71,1]
217	[7,1][31,1]	4123	[7,1][19,1][31,1]
237	[3,1][79,1]	9717	[3,1][41,1][79,1]
249	[3,1][83,1]	10707	[3,1][43,1][83,1]
253	[11,1][23,1]	4301	[11,1][17,1][23,1]
265	[5,1][53,1]	7685	[5,1][29,1][53,1]
309	[3,1][103,1]	16377	[3,1][53,1][103,1]
393	[3,1][131,1]	26331	[3,1][67,1][131,1]
417	[3,1][139,1]	29607	[3,1][71,1][139,1]
445	[5,1][89,1]	20915	[5,1][47,1][89,1]
469	[7,1][67,1]	17353	[7,1][37,1][67,1]
489	[3,1][163,1]	40587	[3,1][83,1][163,1]
493	[17,1][29,1]	11339	[17,1][23,1][29,1]
505	[5,1][101,1]	26765	[5,1][53,1][101,1]
517	[11,1][47,1]	14993	[11,1][29,1][47,1]
553	[7,1][79,1]	23779	[7,1][43,1][79,1]
565	[5,1][113,1]	33335	[5,1][59,1][113,1]
573	[3,1][191,1]	55581	[3,1][97,1][191,1]
597	[3,1][199,1]	60297	[3,1][101,1][199,1]
633	[3,1][211,1]	67731	[3,1][107,1][211,1]
669	[3,1][223,1]	75597	[3,1][113,1][223,1]
685	[5,1][137,1]	48635	[5,1][71,1][137,1]
697	[17,1][41,1]	20213	[17,1][29,1][41,1]
753	[3,1][251,1]	95631	[3,1][127,1][251,1]
781	[11,1][71,1]	32021	[11,1][41,1][71,1]
793	[13,1][61,1]	29341	[13,1][37,1][61,1]
813	[3,1][271,1]	111381	[3,1][137,1][271,1]
817	[19,1][43,1]	25327	[19,1][31,1][43,1]
865	[5,1][173,1]	76985	[5,1][89,1][173,1]
889	[7,1][127,1]	59563	[7,1][67,1][127,1]
913	[11,1][83,1]	42911	[11,1][47,1][83,1]
933	[3,1][311,1]	146481	[3,1][157,1][311,1]
949	[13,1][73,1]	40807	[13,1][43,1][73,1]
973	[7,1][139,1]	71029	[7,1][73,1][139,1]
985	[5,1][197,1]	99485	[5,1][101,1][197,1]
993	[3,1][331,1]	165831	[3,1][167,1][331,1]

Vemos en ellos que el segundo tiene los mismos factores que el primero, con el añadido de su media aritmética que también es prima. Los tres forman una progresión aritmética:

Si en una terna de primos en progresion aritmética multiplicamos los dos extremos obtenemos un arolmar semiprimo y si multiplicamos los tres, un arolmar de 3 factores. Coinciden las dos generaciones paralelas.

Esta operación nos plantea una pregunta: ¿es el número primo media entre los dos factores el único que convierte un *arolmar* semiprimo en otro de tres factores, o existen más?¿Es posible en todos los casos encontrar esos otros primos, o existen casos en los que no es posible?

Arolmar semiprimo	Factor nuevo	Arolmar 3-casiprimo
21	11	231
33	19	627
57	17	969
69	7	483
85	29	2465
93	5	465
129	5	645
133	31	4123
145	23	3335
177	7	1239
205	11	2255
213	13	2769
217	13	2821
237	5	1185
249	7	1743
253	5	1265
265	11	2915
309	5	1545
393	7	2751
417	17	7089
445	17	7565
469	13	6097
489	11	5379
493	5	2465
505	17	8585
517	53	27401
553	37	20461
565	11	6215
573	7	4011

Conjeturamos que la respuesta es afirmativa, ya que esta operación equivale a resolver el problema diofántico siguiente: La suma de los dos factores de un arolmar semiprimo es un número par, doble de primo. Si le añadimos otro primo, para que al multiplicar resulte otro arolmar, la suma debe ser el triple de otro primo, es decir, se debe encontrar solución a la ecuación 3X-Y=2P, con X,Y primos. Las soluciones de una ecuación diofántica se expresan como términos de una progresión aritmética, luego por el Teorema de Dirichlet podemos confiar en que existan entre ellas números primos.

Hemos preparado un algoritmo (algo complejo, por lo que no lo incluimos) para encontrar el menor primo que convierta un arolmar semiprimo en otro de tres factores, sin acudir a la media. Incluimos los primeros resultados:

Conjetura: Todo arolmar semiprimo se puede convertir en un arolmar de tres factores primos si se multiplica por un factor primo adecuado, distinto de la media prima.

Podemos expresar estas operaciones desde el punto de vista de la divisibilidad: hemos conseguido que **todo arolmar semiprimo posea un múltiplo con tres divisores primos**. La operación inversa no tiene por qué tener éxito: encontrar un número arolmar que sea divisor de otro.

Números arolmar con más factores

A continuación incluimos el listado de los primeros números arolmar con 4, 5 o 6 divisores primos distintos:

Con 4 factores

En la tabla figura el número, su descomposición factorial y la media prima de su factores. Te puedes ejercitar en comprobar esas medias. Por ejemplo: 5565 es arolmar porque la media de sus factores 3, 5, 7 y 53 es (3+5+7+53)/4=17, número primo.

1365	7	[3,1][5,1][7,1][13,1]
3045	11	[3,1][5,1][7,1][29,1]
3885	13	[3,1][5,1][7,1][37,1]
4485	11	[3,1][5,1][13,1][23,1]
4845	11	[3,1][5,1][17,1][19,1]
5313	11	[3,1][7,1][11,1][23,1]
5565	17	[3,1][5,1][7,1][53,1]
6045	13	[3,1][5,1][13,1][31,1]
6405	19	[3,1][5,1][7,1][61,1]
7161	13	[3,1][7,1][11,1][31,1]

Con cinco factores

33495	11	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]
41055	11	[3,1][5,1][7,1][17,1][23,1]
49335	11	[3,1][5,1][11,1][13,1][23,1]
50505	13	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]

Con seis

451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]
770385	[3,1][5,1][7,1][11,1][23,1][29,1]
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]

NÚMEROS “SUPERAROLMAR”

Con este título algo humorístico de *superarolmar* identificamos los números *arolmar* en los que la media prima de sus factores primos **es también divisor del número**. Por ejemplo, el número 20915 tiene como factores 5, 47 y 89, cuya media es precisamente el 47, primo y divisor de 20915. Aunque sin ese nombre, están contenidos en la sucesión http://oeis.org/A229094 ya publicada:

105, 231, 627, 897, 935, 1365, 1581, 1729, 2465, 2967, 4123, 4301, 4715, 5313, 5487, 6045, 7293, 7685, 7881, 7917, 9717, 10707, 10965, 11339, 12597, 14637, 14993, 16377, 16445, 17353, 18753, 20213, 20757, 20915, 21045, 23779, 25327, 26331, 26765, 26961,…

Es evidente que forman una subsucesión de nuestros *arolmar* (https://oeis.org/A187073), y como tales, han de ser todos impares, compuestos y libres de cuadrados. Podemos encontrarlos con hoja de cálculo y una rutina similar a la siguiente (la hemos simplificado un poco):

```
For i = j To l
If esarolmar(i) Then
a = sopf(i) / f_omega(i)
If esmultiplo(i, a) Then msgbox(i)
End If
End If
Next i
```

En PARI

```
prevcond(n)=issquarefree(n)&&!isprime(n)
sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }
averg(n)={my(s); s=sopf(n)/omega(n); return(s)}
esarolmar(n)={my(a=averg(n),s);s=prevcond(n)&&a==truncate(a)&&isprime(a); s}
{for(i=2,10^5,if(esarolmar(i),p=averg(i);if(i/p==truncate(i\p),print1(i,", "))))}
```

Al factorizar estos números nos hemos dado cuenta de que casi todos tienen tres factores, por lo que los destacamos aparte:

Caso de tres factores

Los primeros *superarolmar* con tres factores son estos:

105, 231, 627, 897, 935, 1581, 1729, 2465, 2967, 4123, 4301, 4715, 5487, 7685, 7881, 9717, 10707, 11339, 14993, 16377, 17353, 20213, 20915, 23779, 25327, 26331, 26765, 29341, 29607, 32021, 33335, 40587, 40807, 42911, 48635, 49321, 54739, 55581, 55637, 59563, 60297, 63017,…

Sorprendentemente, no estaban publicados en OEIS, y los hemos añadido en la sucesión

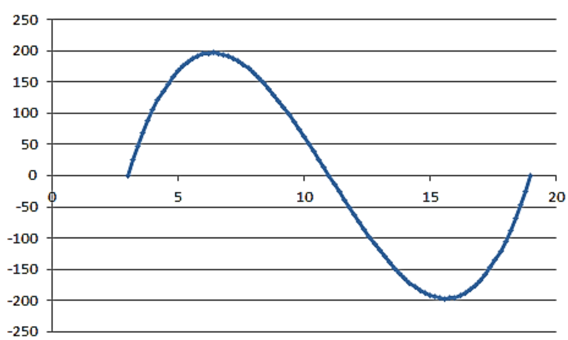
http://oeis.org/A262723

Según la definición, los tres factores primos formarán una progresión aritmética, y el del centro será la media prima de los tres (o de los otros dos). Por ejemplo, 627 tiene como factores primos 3, 11 y 19, siendo 11 la media prima de todos y también un factor primo de 627. Por tanto, en estos casos, el número dado se forma mediante la media (11 en este caso) y la descomposición de su doble (22 en el ejemplo, 22=3+19) en suma de dos factores primos. Como ves, Goldbach no nos abandona.

Otro ejemplo: 5487=3*31*59, con lo que 5487 es el producto de 31 por dos primos que suman su doble (62=3+59), y es obvio que los tres 3, 31 y 59 forman una progresión aritmética. Hemos investigado la diferencia en esa progresión y puede ser cualquier número par, múltiplo de 4 si los primos son los tres del mismo tipo (4k+1 o 4k+3).

Otra consecuencia de la definición es que si suprimimos en el producto de factores el que equivale a la media de los tres, el producto de los otros dos forma un *semiprimo arolmar*, que en el ejemplo sería 3*59=177. Tenemos pues la misma situación de entradas anteriores, que si multiplicamos los factores de un *semiprimo arolmar* por su media, resulta otro *arolmar*, que es *superarolmar* con tres factores.

También pertenecen a la sucesión http://oeis.org/A203614, formada por aquellos números N en los que, si se forma el polinomio $(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_k)$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ con todos los divisores primos de N, su integral definida entre el menor p_1 y el mayor p_k, es nula. Es una simple curiosidad derivada de la simetría del polinomio entre los dos primos extremos:



La gráfica se ha construido a partir del número 627 y sus factores 3, 11 y 19. Se percibe su simetría y, por tanto, la anulación de la integral.

Si uno de los divisores primos es el 3, el número dado será divisible entre la suma de los tres divisores primos, ya que ésta equivale a $3p_2$, y el cociente entre ambas será p_3. Esto ocurre en estos términos:

105, 231, 627, 897, 1581, 2967, 5487, 7881, 9717, 10707,…

Por ejemplo, 9717=3*41*79 y la suma de los tres factores, 123, siendo el cociente 9717/123 igual a 79, el mayor divisor primo. Por tener esta propiedad, estos términos pertenecen a http://oeis.org/A131647

Con más de tres factores

Con cuatro factores aparecen muchos menos:

1365, 5313, 6045, 7293, 7917, 10965, 12597, 14637, 16445, 18753, 20757, 21045, 26961, 28101, 28497, 30381, 34365, 35853, 40641, 42845, 47541, 47957,…

Un ejemplo: 7917=3*7*13*29, con suma de primos 52 y media 13, que lo es también de 3, 7 y 29, cuyo producto, como en el caso anterior, también es un número arolmar: 3*7*29=609, con media prima el ya sabido 13.

En una mayoría de casos la media se corresponde con el tercer divisor primo (en orden creciente), pero también se da el caso de que sea el segundo, como en 7293= 3*11*13*17, en el que la media es 11, el segundo factor primo.

Estos son los primeros con cinco factores que hemos encontrado:

Número	Factores	Divisor media prima
33495	[3,1][5,1][7,1][11,1][29,1]	11
49335	[3,1][5,1][11,1][13,1][23,1]	11
50505	[3,1][5,1][7,1][13,1][37,1]	13
53295	[3,1][5,1][11,1][17,1][19,1]	11
93093	[3,1][7,1][11,1][13,1][31,1]	13
94605	[3,1][5,1][7,1][17,1][53,1]	17
95095	[5,1][7,1][11,1][13,1][19,1]	11

Los que tienen como factor 5, según un razonamiento similar al caso de tres, serán divisibles entre la suma de los divisores primos. Así tenemos que 49335=3*5*7*13*37, y la suma de los cinco factores es 55, y se cumple que 49335=55*897=55*3*13*23. El cociente 897 también pertenece al tipo de números que estamos estudiando, pero no seguiremos por ahí.

Sólo a título de curiosidad, hemos encontrado, con seis, estos dos ejemplos:

Número	Factores	Divisor media prima
451605	[3,1][5,1][7,1][11,1][17,1][23,1]	11
803985	[3,1][5,1][7,1][13,1][19,1][31,1]	13

Y, por último, con siete:

Número	Factores	Divisor media prima
10015005	[3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][23,1][29,1]	13
15935205	[3,1][5,1][11,1][13,1][17,1][19,1][23,1]	13

Lo dejamos, pues no parece que se vayan a descubrir más propiedades interesantes.

Jerarquía de sucesiones respecto a los números arolmar

Los números *arolmar* pertenecen trivialmente a la sucesión http://oeis.org/A078177, que está formada por los números compuestos tales que **la media de sus divisores primos es un entero**.

4, 8, 9, 15, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 35, 39, 42, 44, 49, 50, 51, 55, 57, 60, 64, 65, 68, 69, 77, 78,…

Es la sucesión "madre" de todas las que vamos a considerar ahora, porque el que la media sea entera es la cuestión básica. Si no es entero, todo lo que hemos escrito hasta ahora sobra.

Los podemos generar en PARI mediante el código

sopfr(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]*f[i, 2]); s }

{forcomposite(i=4,200,m=sopfr(i)/bigomega(i);if(m==truncate(m),print1(i,", ")))}

Definimos SOPFR como la suma de divisores primos con repetición (por eso se multiplica por f[i, 2]) y bigomega como su cuenta. Dividimos y resulta la media, a la que exigimos que sea entera (m==truncate(m)).

El resultado es este, que coincide con el listado de A078177:

```
4, 8, 9, 15, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 35, 39, 42, 44, 49, 50, 51, 55, 57, 60,
 64, 65, 68, 69, 77, 78, 81, 85, 87, 91, 92, 93, 95, 105, 110, 111, 112, 114, 11
5, 116, 119, 121, 123, 125, 128, 129, 133, 140, 141, 143, 145, 155, 156, 159, 16
1, 164, 169, 170, 177, 180, 183, 185, 186, 187, 188, 189, 195, break>
```

Un paso más sería exigir que los números fueran libres de cuadrados. Los primeros serían estos:

15, 21, 33, 35, 39, 42, 51, 55, 57, 65, 69, 77, 78, 85, 87, 91, 93, 95, 105, 110, 111, 114, 115, 119, 123, 129, 133, 141, 143, 145, 155,…

En todos ellos SOPF(N)/OMEGA(N) es un entero. En el listado ya se encuentran fácilmente los números *arolmar*.

El código en PARI se modificaría cambiando SOPFR por SOPF y BIGOMEGA por OMEGA (se elimina la repetición) y se exige que el número sea libre de cuadrados (issquarefree):

sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{for(i=4,200,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);if(m==truncate(m)&&bigomega(i)>>1,print1(i,", "))))}

Así se generan fácilmente:

```
15, 21, 33, 35, 39, 42, 51, 55, 57, 65, 69, 77, 78, 85, 87, 91, 93, 95, 105, 110
, 111, 114, 115, 119, 123, 129, 133, 141, 143, 145, 155, 159, 161, 170, 177, 183
, 185, 186, 187, 195,
?
```

Al mismo nivel en jerarquía sería la sucesión determinada por la condición de que la media sea prima, pero sin exigir que el número sea libre de cuadrados. Está publicada en http://oeis.org/A134344 y también contiene a los *arolmar*.

4, 8, 9, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 44, 49, 57, 60, 64, 68, 69, 81, 85, 93, 105, 112, 116, 121, 125,…

En PARI volvemos a usar SOPFR y BIGOMEGA y suprimimos ISQUAREFREE:

sopfr(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]*f[i, 2]); s }

{forcomposite(i=4,500,m=sopfr(i)/bigomega(i);if(m==truncate(m)&&isprime(m),print1(i,", ")))}

Aquí tienes la comprobación:

```
4, 8, 9, 16, 20, 21, 25, 27, 32, 33, 44, 49, 57, 60, 64, 68, 69, 81, 85, 93, 105
, 112, 116, 121, 125, 128, 129, 133, 145, 156, 169, 177, 180, 188, 195, 205, 212
, 213, 217, 220, 231, 237, 243, 249, 253, 256, 265, 272, 275, 289, 297, 309, 332
, 336, 343, 356, 361, 380, 393, 400, 417, 428, 441, 444, 445, 465, 469, 476, 483
, 489, 493,
?
```

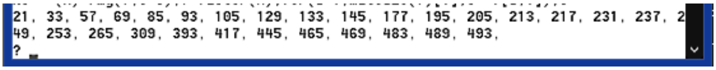
Debajo de estos en la jerarquía estarían nuestros *arolmar*. A la condición de media entera le añadimos la de que esa media sea prima. Sería la tercera exigencia.

En PARI:

sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{forcomposite(i=4,500,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);if(m==truncate(m)&&isprime(m),print1(i,", ")))))}

Aquí añadimos isprime(m), para exigir media prima. Se reproduce así nuestra sucesión con otro código más:

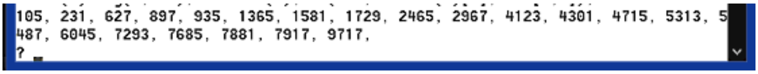


Si exigimos a los números arolmar que la media prima de factores primos sea también divisor del número, aparecerían los números "superarolmar" ya presentados:

sopf(n)= { my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

{forcomposite(i=4,10000,if(issquarefree(i),m=sopf(i)/omega(i);c=i/m;if(m==truncate(m)&&isprime(m)&&c==truncate(c),print1(i,", ")))))}

Aquí exigimos que m sea divisor de i, mediante ***c==truncate(c)***



Dentro de la jerarquía también entrarían los ***primos arolmar*** introducidos por Rafael Parra y otras variantes introducidas en la anterior entrada, pero los elementos principales ya están presentados.

NÚMEROS AROLMAR CUADRÁTICOS

Terminamos la serie dedicada a los números *arolmar* y similares con los *arolmar cuadráticos*, que son aquellos compuestos libres de cuadrados en los que la media cuadrática de sus factores primos es otro primo.

De forma similar al desarrollo de la anterior entrada, comenzaremos por aquellos números cuya media cuadrática de factores primos con repetición **sea al menos entera**. Después pasaremos a otras exigencias hasta llegar a los *arolmar cuadráticos*. Estos números con media entera ya están publicados en http://oeis.org/A134600

4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 119, 121, 125, 128, 161, 169, 243, 256, 289, 343, 351, 361, 378, 455, 512, 527, 529, 595, 625, 721, 729, 841, 845, 918, 959, 961, 1024, 1045, 1081,…

Es fácil ver que entre ellos están las potencias de primos. Es trivial la razón. Otros son de comportamiento más complejo, como el 351, cuyos factores son 3*3*3*13, con media cuadrática RAIZ((3^2+3^2+3^2+13^2)/4)=7, número entero tal como se pedía.

Con PARI se encuentran así:

mean2(n)= my(f, s=0,t=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, for(j=1,f[i,2],s+=f[i, 1]^2;t+=1)); sqrt(s/t)

{forcomposite (n=2, 2*10^3, m=mean2(n);if(m==truncate(m), print1(n, ", ")))}

En primer lugar se define ***mean2*** como media cuadrática y en la segunda línea se exige que sea entera ***m==truncate(m)***, con el resultado esperado:

```
4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 119, 121, 125, 128, 161, 169, 243, 256, 289
, 343, 351, 361, 378, 455, 512, 527, 529, 595, 625, 721, 729, 841, 845, 918, 959
, 961, 1024, 1045, 1081, 1241, 1265, 1323, 1331, 1369, 1375, 1547, 1615, 1681, 1
792, 1849, 1855,
?
```

El siguiente paso sería la exigencia de que los números sean libres de cuadrados, para evitar la repetición de factores. Nos resultaría esta subsucesión de la anterior:

119, 161, 455, 527, 595, 721, 959, 1045, 1081, 1241, 1265, 1547, 1615, 1855, 2047, 2145, 2345, 2665, 2737, 3281, 3367, 3713, 3835, 3995, 4207, 4305, 4633, 4681, 5117, 5795, 6061, 6545, 6643, 6887, 6965, 7055, 7327, 7505, 7685, 7705, 8785, 9641,

La hemos obtenido con el código PARI siguiente:

mean2(n)= my(f, s=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, s+=f[i, 1]^2); sqrt(s/m)

{forcomposite (n=2, 10^4, if(issquarefree(n),m=mean2(n);if(m==truncate(m), print1(n, ", "))))}

Para generarlos con hoja de cálculo hemos introducido la función SOPF_k en lugar de SOPF. Esta suma de factores primos sin repetición, mientras que SOPF_K los suma elevados a un exponente K. Bastaría entonces dividir esa suma entre el número de factores y exigir que el resultado sea entero y cuadrado.

Por ejemplo, en el caso de 119 los cálculos serían =RAIZ(sopf_k(119;2)/f_omega(119))=RAIZ((7^2+17^2)/2), con el resultado de 13, número entero.

Si has llegado hasta aquí en la lectura entenderás que los números *arolmar cuadráticos* se extraerán de estos exigiendo que la raíz sea prima además de entera. Con estas condiciones aparecen estos números:

119, 161, 595, 721, 959, 1045, 1081, 1241, 1547, 1855, 2737, 3281, 3367, 3995, 4681, 5795, 6545, 6643, 7505, 7705, 11845, 11935, 12319, 12455, 13585, 14147, 16999, 19199, 19873, 20735, 22591, 23345, 26605, 27265, 29555, 32219, 32239, 32795, 33787, 34255, 34505, 35105, 35929, 37241, 38213, 38335, 38645, 39923, 39997,…

Podíamos llamarles números ***2_arolmar o arolmar de segundo orden***. Repasamos la definición con un ejemplo: 1045 pertenece a la sucesión porque su descomposición factorial es 5*11*19, compuesto libre de cuadrados y la media cuadrática de sus factores es RAIZ((5^2+11^2+19^2)/3) = 13, entero y primo, tal como se exige en la definición.

Con hoja de cálculo hemos organizado la búsqueda en filas y columnas. Si deseas un listado más amplio puedes usar este código PARI

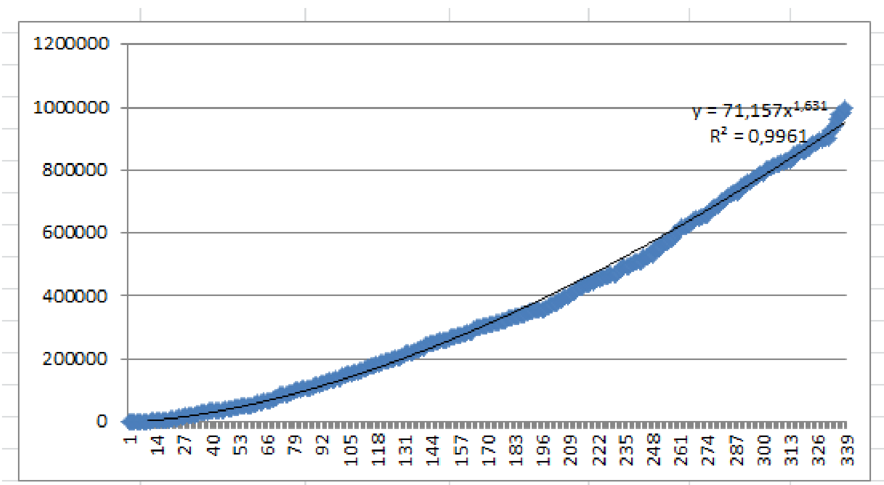
mean2(n)= my(f, s=0); f=factor(n);m= matsize(f)[1]; for(i=1, m, s+=f[i, 1]^2); sqrt(s/m)

{forcomposite (n=2, 4*10^4, if(issquarefree(n),m=mean2(n);if(m==truncate(m),if(isprime(truncate(m)), print1(n, ", ")))))}

Llama la atención que estos números, además de ser impares, por la misma razón que los *arolmar* normales, ninguno de ellos es múltiplo de 3. La razón tiene que ver con las congruencias módulo 3. En efecto, todo primo mayor que 3 es de la forma 3k+1 o 3k+2. En ambos casos su cuadrado es del tipo 3m+1, congruente con 1 módulo 3. Si el número N se descompone en factores primos como $3*p_1*p_2*\ldots p_{k-1}$, la suma de los cuadrados será congruente con k-1, pues cada sumando es congruente con 1. Si esa suma produce una media cuadrática prima, deberá ser igual a kp_0, con p_0 primo, por lo que kp_0 será congruente con k y no con k-1. No pueden ser expresiones iguales.

Todos los números 2_arolmar son impares y no múltiplos de 3.

Su tendencia no es lineal como la de los arolmar de grado 1. Si representamos el conjunto de los primeros, obtenemos una gráfica que se parece más a una parábola



Después de probar varias alternativas, el mejor ajuste que hemos conseguido es el de la función potencial $y=71{,}157x^{1{,}631}$.

Función esarolmar(n;k)

Para estudiar mejor los números arolmar de orden superior basta añadir un parámetro a la función esarolmar primitiva y elevar los factores primos a k en la condición. Puede ser esta:

Public Function esarolmar(n, k)
Dim es As Boolean
Dim b
es = False
If Not esprimo(n) And partecuad(n) = 1 Then
b = sopf_k(n, k) / f_omega(n) ‘calcula la media de las potencias
If esentero(b) And esprimpot(b) = k Then es = True ‘comprueba que resulta primo^k
End If
esarolmar = es
End Function

Con ella y un bucle generamos fácilmente los *arolmar* de cualquier orden. Capturamos la hoja que genera *2_arolmar*:

Generador de sucesiones			
		2000	2
	119		
	161		
	595		
	721		
	959		
	1045		
	1081		
	1241		
	1547		
	1855		

Caso particular, el de los semiprimos

Como en el caso de los de primer orden, los 2_arolmar semiprimos presentan bastante interés. Los primeros son estos:

119, 161, 721, 959, 1081, 1241, 3281, 4681, 12319, 16999, 19199, 32239, 37241, 44801, 50279, 52319, 60119, 89239, 135001, 136441, 152401, 156479, 157601, 173639, 227959, 305959, 315439, 330881, 335239, 350479, 356921, 368519, 373319, 393119, 418801, 497681, 526921, 650879, 775799, 789559, 887321, 926999,…

Por ejemplo, 721=7*103, y se cumple que RAIZ($(7^2+103^2)/2$)=73, que es un número primo.

Todos ellos tienen la forma N=pq con p<q, ambos primos e impares y $p^2+q^2=2r^2$, siendo r un número primo. Si llamamos X=(p-q)/2, e Y=(p+q)/2, ambos X e Y serán enteros, y se cumplirá: $X^2+Y^2=(2p^2+2q^2)=4r^2=(2r)^2$, luego X e Y son catetos de

una terna pitagórica. Si restamos sus cuadrados en lugar de sumarlos, obtenemos: $Y^2-X^2=pq=N$, luego N es diferencia de cuadrados de los catetos de una terna pitagórica. Como p,q y r son primos (por tanto también entre sí), la terna será primitiva.

Los números 2_arolmar equivalen a la diferencia de los cuadrados de dos catetos de una terna pitagórica.

Vemos esta propiedad con el 161: 161=7*23, su media cuadrática es $RAIZ((7^2+23^2)/2)=17$, que es primo. En este caso, X=8, Y=15, catetos de la terna (8,15,17), y se cumple que $161=15^2-8^2= 225-64=161$

Por tener esta propiedad, los 2_arolmar semiprimos pertenecen también a la sucesión

7, 41, 119, 161, 239, 527, 721, 959, 1081, 1241, 1393, 1519, 2047, 3281, 3479, 3713, 4207, 4633, 4681, 4879, 5593, 6647, 6887, 7327, 8119, 9401, 9641, 10199, 11753, 12121, 12319, 12593, 16999, 19159, 19199, 19873, 20447, 22393, 23359, 24521, 24521,…, publicada en http://oeis.org/A127923

La descomposición factorial de los primeros es esta:

2_esarolmar semiprimo	Factores	Media cuadrática prima
119	[7,1][17,1]	13
161	[7,1][23,1]	17
721	[7,1][103,1]	73
959	[7,1][137,1]	97
1081	[23,1][47,1]	37
1241	[17,1][73,1]	53
3281	[17,1][193,1]	137
4681	[31,1][151,1]	109
12319	[97,1][127,1]	113
16999	[89,1][191,1]	149
19199	[73,1][263,1]	193
32239	[103,1][313,1]	233
37241	[167,1][223,1]	197
44801	[71,1][631,1]	449
50279	[137,1][367,1]	277
52319	[113,1][463,1]	337
60119	[79,1][761,1]	541
89239	[233,1][383,1]	317
135001	[127,1][1063,1]	757
136441	[47,1][2903,1]	2053

Ninguno es múltiplo de 2, 3 o 5. Las dos primeras condiciones ya están estudiadas. Veremos más adelante por qué no puede ser múltiplo de 5 ni de otros primos.

En los 2_arolmar semiprimos N=P*Q se cumplirá P^2+Q^2=2R^2 (P<Q) con R primo, lo que equivale a que R^2-P^2=Q^2-R^2; (R+P)(R-P)=(Q+R)(Q-R). Por ejemplo, en el número 4681=31*151, con media cuadrática 109 se cumple que

(151+109)(151-109)=(109-31)(109+31)=260*42=78*140=10920

Esta misma igualdad P^2+Q^2=2R^2 hace que P(o Q) deba ser un número primo en el que 2 sea un resto cuadrático módulo P, ya que Q^2 debería ser congruente con 2R^2 módulo P, y esto no es posible si el 2 es no resto cuadrático. Esto restringe los números primos que pueden ser factores de un *2_arolmar semiprimo*. Si recorres las descomposiciones factoriales de los mismos en la tabla de más arriba habrás echado de menos los factores 5, 11 o 13. Su ausencia se debe a que en ellos el 2 no es resto cuadrático. Sí lo es en el 7, en el 17 o el 23, por ejemplo, y estos sí figuran en las descomposiciones factoriales.

Según la teoría de restos cuadráticos el 2 es resto cuadrático respecto a los primos del tipo 8k+1 y 8k+7. Así que sólo pueden ser esos primos los factores de un ***semiprimo arolmar*** de segundo orden. Los tienes en rojo en la tabla:

Número primo	Resto módulo 8
3	3
5	5
7	7
11	3
13	5
17	1
19	3
23	7
29	5
31	7
37	5
41	1
43	3
47	7

Múltiplos de 2_arolmar

El semiprimo 2_arolmar 119=7*17, si se multiplica por 5 da lugar al arolmar de tres factores 595=5*7*17, e igual ocurre con 161=7*23, que se convierte en 2737 al multiplicarlo por 17. Podemos buscar todos los casos similares, en los que un 2_arolmar se convierta en otro del mismo tipo al multiplicarlo por un primo adecuado. Eliminamos la condición de que sea semiprimo y nos resulta esta tabla

2_arolmar	Factor primo	2_arolmar producto
119	5	595
161	17	2737
595	11	6545
721	53	38213
959	43	41237
1045	13	13585
1081	37	39997
1241	53	65773
1547	83	128401
1855	31	57505
3281	137	449497
3367	23	77441
3995	29	115855
4681	109	510229
5795	37	214415
6545	19	124355
6643	43	285649
7505	47	352735
7705	41	315905

En algún caso se da una cadena de múltiplos: 119 por 5 da 595, y éste por 11, 6545, que a su vez se puede convertir en 124355. Si seguimos resulta esta cadena:

2_arolmar	119	595	6545	124355	1616615
Factor primo nuevo	5	11	19	13	
Media cuadrática	13	11	11	13	13

Números arolmar de orden superior

No hemos encontrado 3_arolmar menores que 10^7, por lo que si existen serán rarezas aisladas. Igual nos ha ocurrido con órdenes superiores.

UNA CURIOSIDAD SIN IMPORTANCIA

El día 11-2-16, publiqué en Twitter, según acostumbro, y como una curiosidad, el siguiente desarrollo para esa fecha, escrita como 11216:

$$11216 = Int(7!\,e^{4/5})$$

Una vez publicado me di cuenta de que cualquier número entero se puede expresar de forma parecida, eligiendo bien el factorial y el exponente racional de **e**. Es una mera curiosidad, sin valor teórico, pero que nos permitirá repasar algunas técnicas matemáticas.

Buscamos, pues, una expresión del tipo

$$N = Int(a!\,e^{p/q})$$

Obtención del factorial

El cálculo del factorial lo puedes resolver mentalmente, como por ejemplo, en el caso de 6000, el factorial más cercano inferiormente es 7!, pero si deseas automatizarlo, deberás tener en cuenta el crecimiento tan rápido de los factoriales, que pueden sobrepasar la capacidad de una hoja de cálculo. Para obviar esto, podríamos averiguar el valor de **a!** por divisiones sucesivas. Lo Intentaremos, como muchas veces organizamos en este blog, mediante técnicas cada vez más automatizadas. Prescindiremos por ahora de la función **Int**.

Con cálculo de celdas

Basta con que observes esta imagen para darte cuenta de los sencillo de esta técnica de obtención del factorial más cercano a N:

	239881
1	239881
2	119940,5
3	39980,1667
4	9995,04167
5	1999,00833
6	333,168056
7	47,5954365
8	5,94942956
9	0,66104773
10	
11	#¡VALOR!
12	#¡VALOR!

Este ejemplo está diseñado para el número 239881. En cada celda de la columna de la derecha hemos escrito una fórmula similar a esta:

=SI(celda de arriba>=celda de la izquierda;celda de arriba/celda de la izquierda; " ")

Es una condicional, en la que, si la celda de arriba es mayor o igual que la de la izquierda, se intenta seguir dividiendo entre 1, 2, 3,…**a**, y, en caso contrario, se deja la celda en blanco. Ese blanco es el causante de que abajo aparezca el error #¡VALOR! En la imagen queda claro que el factorial correspondiente a 239881 es el 8. El cociente marcado en color, 5,94942956, es importante, porque coincide con el factor exponencial.

Mediante una función

Este proceso de divisiones sucesivas se puede automatizar con dos funciones, una que nos devuelva el factorial y otra que calcule el factor exponencial. En el Basic de las hojas de cálculo podría ser esta, en la que hemos reunido las dos funciones mediante el parámetro ***tipo***, que si le damos el valor 0 nos devolverá el factorial, y con otro valor, el factor exponencial:

Public Function sacafactorial(n, tipo)
Dim p, v
p = 1: v = n
While v >= p ‘divisiones sucesivas para obtener el factorial
v = v / p: p = p + 1
Wend
If tipo = 0 Then sacafactorial = p - 1 Else sacafactorial = v
End Function

Es sencilla y rápida, y nos permite calcular estas dos cantidades para cualquier entero. En el siguiente esquema hemos añadido el exponente de **e**, que será objeto de la segunda parte de nuestros cálculos.

Número	11216
Factorial	7
Exponencial	2,22539683
Exponente	0,79993525

Si retrocedemos al cálculo con el que iniciamos esta entrada, comprobaremos que el exponente 0,79993525 está muy cercano a 4/5, que era la fracción propuesta. Volvamos al segundo ejemplo:

Número	239881
Factorial	8
Exponencial	5,94942956
Exponente	1,78329534

Aquí el exponente es 1,78329534. El problema ahora es aproximarlo con el número racional más sencillo posible. Para ello disponemos de una herramienta muy poderosa, las fracciones continuas. Puedes descargarte esta hoja antes de seguir leyendo:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#fraccont

Las fracciones continuas permiten una aproximación racional a cualquier número real, con la ventaja de darte diversas aproximaciones con exactitud creciente. Abre la hoja y comprobarás que está diseñada para aproximar racionales con racionales, pero “la engañaremos”.

Escribe aquí la fracción deseada	
Numerador	2009
Denominador	2001
Equivalente decimal	
1,00399800	

Basta con que en el numerador escribamos el exponente que obtuvimos más arriba, 1,78329534, y como denominador un 1.

Escribe aquí la fracción deseada	
Numerador	1,78329534
Denominador	1
Equivalente decimal	
1,78329534	

De esa forma obtendremos aproximaciones racionales cada vez mejores de ese exponente:

	1	1	3	1	1	1	1	2	6	1	12	1
1,783295343	1	0,783295343	0,216704657	0,133181373	0,083523284	0,04965809	0,033865194	0,015792895	0,002279403	0,002116476	0,000162927	0,00016135
0,783295343	0,216704657	0,133181373	0,083523284	0,04965809	0,033865194	0,015792895	0,002279403	0,002116476	0,000162927	0,00016135	1,577E-06	4,9574E-07
1	1	2	7	9	16	25	41	107	683	790	10163	10953
0	1	1	4	5	9	14	23	60	383	443	5699	6142
	1,00000000	2,00000000	1,75000000	1,80000000	1,77777778	1,78571429	1,78260870	1,78333333	1,78328982	1,78329571	1,78329531	1,78329534

Ahora interviene la parte entera. Debajo de cada aproximación escribimos la expresión del principio

$$N = 8!\, e^{p/q}$$

En lenguaje de hoja de cálculo sería

=FACT(8)*EXP(celda de arriba)

Quedaría así (destacamos los más aproximados):

6	1	12	1	102	3	5
0,002279403	0,002116476	0,000162927	0,00016135	1,577E-06	4,9574E-07	8,97851E-08
0,000162927	0,00016135	1,577E-06	4,9574E-07	8,97851E-08	4,6814E-08	4,29711E-08
683	790	10163	10953	1127369	3393060	18092669
383	443	5699	6142	632183	1902691	10145638
1,78328982	1,78329571	1,78329531	1,78329534	1,78329534	1,78329534	1,78329534
239879,6744	239881,0882	239880,9932	239881,0001	239881	239881	239881

Vemos que el producto más sencillo que al aplicarle la parte entera se convierte en el resultado deseado es 239881,0882, que corresponde al exponente 790/443, siendo los siguientes más exactos, pero también más complejos. Así que nos quedamos con ese:

$$239881 = Int(8!\,e^{790/443})$$

Lo comprobamos con la misma hoja de cálculo y la fórmula

=ENTERO(FACT(8)*EXP(790/443)),

obteniendo el resultado deseado de 239881.

Ya afirmamos que el trabajo de hoy no era trascendental, pero es atractivo poder expresar cualquier número entero mediante un factorial, un numerador y un denominador, y además con infinitas soluciones, aunque nos quedemos sólo con la más simple.

Por ejemplo, un millón se puede expresar como

Número	1000000
Factorial	9
Exponencial	2,75573192
Exponente	1,01368308

Y aproximando a un racional el exponente:

12	19	6
0,001135315	5,93032E-05	8,55339E-06
8,55339E-06	7,9829E-06	5,70489E-07
889	16965	102679
877	16736	101293
1,01368301	1,01368308	1,01368308
999999,9324	1000000,001	999999,9999

$$1000000 = Int(9!\, e^{16965/16736})$$

O en lenguaje de celdas:

=ENTERO(FACT(9)*EXP(16965/16736))

Para terminar, aquí tienes los números con desarrollos más simples, exponentes 1, 2, 1/2 y 2/3

	Exponente			
Factorial	1	2	0,50	0,66666667
1	2	7	1	1
2	5	14	3	3
3	16	44	9	11
4	65	177	39	46
5	326	886	197	233
6	1957	5320	1187	1402
7	13700	37240	8309	9816

Lo dicho, una entretenida curiosidad sin importancia.