

Números y hoja de cálculo XVIII

Cantidad	Monedas y billetes						
37	20	10	5	2			
56	50	5	1				
82	50	20	10	2			
107	50	50	5	2			
176	50	50	50	20	5	1	
228	50	50	50	50	20	5	2

Curso 2025-26

Colección Hojamat.es

© Antonio Roldán Martínez

<https://www.hojamat.es>

PRESENTACIÓN

Con el paso de los años, se nos agotan los temas teóricos de la Teoría de Números en su nivel medio y elemental. Por ello, en los últimos cursos predominan las curiosidades, búsquedas y números especiales. Este hecho quita variedad a los temas, pero permite continuar las publicaciones después de diecisiete años.

En este curso he publicado algunas cuestiones relacionadas con la Combinatoria, que tenía algo olvidada. Es una materia que sube de nivel de complejidad respecto a otras, lo que supone abandonar el nivel medio de esta colección de textos.

También han surgidos temas interesantes en Divisibilidad, como los antidivisores y los números polidivisibles, así como en el tema de Sucesiones. La elección de temas es ocasional, sin un plan fijo, según surgen. Así será en las siguientes publicaciones de este tipo.

CONTENIDO

Presentación	2
Contenido	3
Conceptos teóricos.....	5
Antidivisores	5
Polidivisibles	13
Divisorial	20
Sucesiones completas.....	26
Búsquedas y curiosidades.....	34
Simétricos de un esfénico.....	34
Un número como diferencia entre potencias.....	39
Pandigitales inesperados.....	53
La suma de potencias de cifras es otra potencia	61
Solución única	68
Entre curiosidad y teoría	78
En cuantas ternas pitagóricas.....	78
Primos pitagóricos	92

Por una unidad, no son de Fibonacci.....	96
Números que son promedio de dos cuadrados	107
Números primos de Pierpont	113
Unas recurrencias muy útiles.....	123
Funciones definidas para tipos de números.....	128
Temas de Combinatoria.....	148
Coeficientes trinomiales.....	148
Triángulo trinomial	155
El catering perezoso	162
Números de pastel.....	169

CONCEPTOS TEÓRICOS

ANTIDIVISORES

Todo número entero positivo N (he excluido los negativos porque no tienen interés en este estudio) posee divisores. Si es primo, serán el 1 y él mismo, y, en otro caso, presentará todo un conjunto de divisores (ver mi entrada de blog

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2011/11/el-conjunto-de-los-divisores.html>).

Siempre existirán números enteros positivos menores que N que no sean divisores de él (salvo el caso de 2). A estos números les llamamos *no divisores* de N , como sería, por ejemplo, $N-1$.

Podemos considerar un divisor de N como un número K tal que al conjunto $K, 2K, 3K, 4K, \dots$ pertenece N . Esto parece trivial, pero si aplicamos la idea a un no divisor, esa sucesión sobrepasará N , y alguno de los múltiplos de K será el más cercano a N . Unos quedarán muy “cerca” de N , como, por ejemplo, si $N=21$, su no divisor 5, acercará un múltiplo a una unidad de él, ya que $21=4*5+1$.

Un ant divisor K de N se define como el no divisor que se “acerca” a N dejando intervalos iguales entre N y dos múltiplos consecutivos de K . Por ejemplo, 10 es un

antidivisor de 55, porque no es divisor de él, pero 55 equidista de dos de sus múltiplos: $50 < 55 < 60$, con $55 - 50 = 60 - 55$. Una ligera reflexión nos indica que si K es impar, no es posible la equidistancia, y se permite una diferencia de 1.

La aproximación intuitiva anterior se puede concretar en la siguiente definición, que se aplica de forma distinta si K es par o si es impar:

Si K es par y no divisor de N , será antidivisor si $N \text{ MOD } K = K/2$

Si K es impar, diremos que es antidivisor de N si $N \text{ MOD } K = (K \pm 1)/2$

Por esta simetría en los dos intervalos, también se llama no divisores insesgados a los antidivisores.

Unos ejemplos: 14 es antidivisor de 147, porque los múltiplos de 14 140 y 154 rodean a 147 con 7 unidades a cada lado: $147 - 14 \cdot 10 = 14 \cdot 11 - 147$. Más directo, $147 \text{ MOD } 14 = 14/2$

El número impar 7 es antidivisor de 25, porque lo rodea con un intervalo de 3 y otro de 4: $25 - 7 \cdot 3 = 4$ y $7 \cdot 4 - 25 = 3$. También; $25 \text{ MOD } 7 = \text{INT}(7+1)$.

Los antidivisores como divisores

Las ideas anteriores se pueden expresar mediante otras expresiones.

En el caso par podemos considerar que $N=K(m+1/2)$, siendo m un número natural apropiado. Multiplicando por 2, obtenemos: $2N=K(2m+1)$, lo que nos lleva a que K no es divisor de N pero sí de su doble. En el ejemplo de 10 como ant divisor de 55 obtendríamos que $2*55=10*11$, con lo que 10 divide a $2*55$

En el caso impar, $N=Km+(K+1)/2$ o bien $N=Km+(K-1)/2$, lo que nos lleva a que $2N-1=K(2m+1)$ o bien $2N+1=K(2m+1)$. Por ejemplo, en el caso de 7 como ant divisor de 25, quedaría $2*25-1=7*7$, lo que confirma a 7 como divisor de $2*25-1$. Si tomáramos 17 como ant divisor de 25 (ya que 25 está comprendido entre $17*1$ y $17*2=34$ con las diferencias $25-17=8$ y $34-25=9$), este sería divisor de $2*25+1=51=17*3$.

Los párrafos anteriores nos permiten definir los ant divisores de otra forma:

Un número K es ant divisor de N cuando no es divisor del mismo, pero sí lo es de $2N$ o $2N+1$ o $2N-1$.

Es otra de definición sin acudir a la Aritmética Modular.

Vemos un ejemplo: más adelante sabremos que los ant divisores de 13 son 2, 3, 5 y 9. Es fácil encontrarlos, pues recorremos los no divisores de 13 y nos quedamos con los que dividen a 26, o 27 o 25: 2 divide a 26, 3 divide a 27, 5 a 25 y 9 a 27. Hemos desechado el 4, porque no divide a ninguno de los tres, y también al 6, al 7 y a todos los que faltan.

Un sencillo criterio

Según lo anterior, bastará comprobar que K no divide a N , pero sí a uno de los tres siguientes, $2N$, $2N+1$ o $2N-1$.

Con este criterio es fácil encontrar los ant divisores de un número.

Si usamos la función MOD, para encontrar restos, el criterio se puede expresar así:

$$n \text{ Mod } k \neq 0 \text{ And } ((2 * n) \text{ Mod } k = 0 \text{ Or } (2 * n + 1) \text{ Mod } k = 0 \text{ Or } (2 * n - 1) \text{ Mod } k = 0)$$

Si se desea integrarlo en una celda de hoja de cálculo, bastará usar la función RESIDUO.

Este criterio permite encontrar todos los ant divisores de un número mediante esta función tipo string:

Function ant divisores\$(n)

Dim i, m

Dim s\$

s\$ = " " Contenedor de ant divisores

m = 0 'Contador

For i = 2 To n - 1 'Rango de ant divisores

If n Mod i <> 0 And ((2 * n) Mod i = 0 Or (2 * n + 1) Mod i = 0 Or (2 * n - 1) Mod i = 0) Then 'Criterio

m = m + 1

s = s + Str\$(i) 'Un nuevo ant divisor

End If

Next i

$s = ajusta(m) + ": " + s$ ‘Se añade contador
 $antidivisores = s$
End Function

Podemos aplicar esta función a cualquier número entero positivo, y el primer número será el contador. Por ejemplo, aplicado al 63 nos devuelve

ANTIDIVISORES(63)= 7: 2 5 6 14 18 25 42

Indica que posee siete antidivisores y añade su listado. Puedes comprobarlo en OEIS, con la búsqueda “antidivisors”.

Con esta herramienta podemos buscar números con un número determinado de antidivisores. Bastará leer los primeros dígitos. Vemos unos ejemplos:

Con un antidivisor:

Número	Antidivisores
3	1 # 2
4	1 # 3
6	1 # 4
96	1 # 64

Resultan muy escasos, porque siempre se esperan más antidivisores. Puedes consultar <https://oeis.org/A066466> para más detalles sobre estos números. El siguiente es 393216. Se les puede llamar *antiprimos*.

Con dos

Tampoco son frecuentes. Los primeros son:

Número	Antidivisores
5	2 # 2 3
8	2 # 3 5
9	2 # 2 6
12	2 # 5 8
16	2 # 3 11
24	2 # 7 16
36	2 # 8 24
64	2 # 3 43

Puedes consultar <https://oeis.org/A066467>

El mayor antidivisor

Ya sabemos que el antidivisor no debe ser divisor de N , pero sí de uno de los tres $2N$, $2N+1$ o $2N+2$. Para que D sea el mayor antidivisor, el cociente respecto a uno de los tres deberá ser pequeño. El mejor candidato es el 3. Así, si D divide a $2N$, su valor máximo será $2N/3$. Si no divide a $2N$, lo hará a $2N+1$ o $2N+2$, con lo que podemos afirmar que

El mayor antidivisor de un número N se situará en las cercanías de $2N/3$.

Si modificamos la función ANTIDIVISORES, es sencillo encontrar el mayor antidivisor de un número. Podría ser esta:

Function max_antidivisor(n)

Dim i, m

m = 1

For i = 2 To n - 1

If n Mod i <> 0 And ((2 * n) Mod i = 0 Or (2 * n + 1) Mod i = 0 Or (2 * n - 1) Mod i = 0) Then m = i

Next i

max_antidivisor = m

End Function

Se puede comprobar formando una tabla de cocientes D/N. En la siguiente tabla se ha recorrido un rango de número elegido al azar:

Número	Mayor ant.	Cociente
120	80	0,666666667
128	85	0,6640625
136	91	0,669117647
144	96	0,666666667
152	101	0,664473684
160	107	0,66875
168	112	0,666666667
176	117	0,664772727
184	123	0,668478261
192	128	0,666666667

Todos los cocientes son cercanos a $2N/3$.

¿De qué números soy ant divisor?

Podemos plantearnos una búsqueda inversa, y es que dado un número entero positivo K , es posible construir una lista de los números de los que es ant divisor. La solución es trivial:

Si K es par, será ant divisor de aquellos números N que cumplan $N=K(m+1/2)$, y si es impar, de los que cumplan, $N=Km+(K+1)/2$ o bien $N=Km+(K-1)/2$. Esto tiene dos consecuencias sencillas:

El conjunto de números con el mismo ant divisor K será una progresión aritmética si K es par, y contendrá elementos consecutivos si es impar. En ambos casos será un conjunto infinito.

Por ejemplo:

Para $K=8$, el conjunto será $\{12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, 108, 116, 124, 132, 140, 148, 156, \dots\}$

Para $K=7$, tendremos $\{10, 11, 17, 18, 24, 25, 31, 32, 38, 39, 45, 46, 52, 53, 59, 60, 66, 67, 73, 74, 80, 81, 87, 88, 94, 95, 101, 102\}$

Funciones sobre el conjunto de ant divisores

Al igual que con divisores, se pueden definir sumas y cuentas sobre el conjunto de ant divisores, que serían A_SIGMA , A_TAU , A_SIGMA2 , ...

Por ejemplo, la suma de antedivisores se podría programar así:

Function a_sigma(n)

Dim i, m

m = 0 'sumador

For i = 2 To n - 1 'Rango de antedivisores

If n Mod i <> 0 And ((2 * n) Mod i = 0 Or (2 * n + 1) Mod i = 0 Or (2 * n - 1) Mod i = 0) Then m = m + i

Next i

a_sigma = m

End Function

Así, $a_sigma(63)=112$

A partir de esa función se pueden definir números antiperfectos, como son 5, 8, 41, 56, 946.

De igual forma se definiría a_tau y otras.

POLIDIVISIBLES

Un número se llama polidivisible (aquí se limitará el estudio a base 10) cuando al recorrer sus cifras de izquierda a derecha, las dos primeras forman un múltiplo de 2, las tres primeras, de 3, las cuatro de 4, y así sucesivamente. Por ejemplo, 126006 es polidivisible, porque $12=2*6$, $126=3*42$, $1260=4*315$, $12600=5*2520$, $126006=6*21001$. Se supone que no se han escrito

ceros a la izquierda, o lo que es lo mismo, que la primera cifra es no nula.

Puedes comprobar la afirmación de Wikipedia de que 381654729 es polidivisible.

Si se entiende bien el troceado de cifras, no es difícil crear una función que determine si un número es polidivisible. Propongo esta para VBasic de Excel, fácilmente traducible a otros lenguajes:

Function polidivisible(n) As Boolean 'Devuelve verdadero o falso

Dim m, i, t

Dim es

m = numcifras(n) Función contenida en mi blog "Números y hoja de cálculo". Es fácil de copiar.

If m < 2 Then polidivisible = False: Exit Function
'Caso de una cifra

i = 2 'Número de cifras primeras a considerar

es = True 'Suponemos que sí es polidivisible

While i <= m And es 'Recorremos las primeras cifras

t = Int(n / potencia(10, m - i)) 'Trozo de cifras

If t / i <> t \ i Then es = False 'Ha de ser múltiplo de su número de cifras

i = i + 1

Wend

polidivisible = es

End Function

Esta función te devuelve VERDADERO si el número es polidivisible. Con ella y un buscador podemos encontrar los primeros números polidivisibles. En la lista se descubren los comprendidos entre 100 y 200:

102, 105, 108, 120, 123, 126, 129, 141, 144, 147, 162, 165, 168, 180, 183, 186, 189

Los puedes comprobar en <https://oeis.org/A144688>. Allí se les llama “magic”. Su definición sugiere que si un número es polidivisible, también lo son los trozos de cifras que nos han servido para la definición. Eso ocurre con 20445, que 20, 204 y 2044 también son polidivisibles. Más adelante estudiaremos el proceso contrario, extender un polidivisible a más cifras.

Versión en PARI

Excel no es útil para números enteros de muchas cifras, ya que pasa automáticamente al formato científico. Por ello es conveniente el uso de una función en PARI. La de arriba se traduce fácilmente a esta otra:

```
k=381654729
```

```
polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&& i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
```

```
print(polidivisible(k))
```

Escribimos un valor de k en la primera línea y nos devolverá un 1 si k es polidivisible o un 0 si no lo es. Lo he probado en la web de PARI:

```
? k=381654729
polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
print(polidivisible(k))
%1 = 381654729
%2 = (n)->my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es
1
```

Nos devuelve un 1 porque 381654729 sí es polidivisible.

Añadiendo un bucle podremos buscar polidivisibles en un rango. En la imagen figuran los primeros a partir de 2000000:

```
? polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
for(k=2*10^6,3*10^6,if(polidivisible(k),print(k)))
%1 = (n)->my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es
2012045
2012521
2012528
2012584
2016000
2016007
2016063
2016546
2040003
2040066
2040542
```

Mentalmente se puede comprobar alguno de ellos.

En https://en.wikipedia.org/wiki/Polydivisible_number puedes encontrar un procedimiento sencillo para extender la definición a cualquier base b .

Extensión de un número polidivisible

Si N lo es, podemos intentar añadirle otra cifra más y probar si también es polidivisible. Si N posee k cifras, el

siguiente polidivisible estará entre $10 \cdot N$ y $10 \cdot N + 9$ y deberá ser múltiplo de $k+1$. Si k no es mayor que 10, siempre existirá un múltiplo en ese rango. En valores superiores no se puede garantizar la extensión.

Uso PARI para garantizar un buen número de cifras:

```
polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
```

```
extenpoli(n)={my(g=#digits(n),nn=0,i=0,es=0);while(i<=9&&es==0,nn=i+n*10;if(polidivisible(nn),es=1);i+=1);nn*(es==1)}
```

```
print(extenpoli(126006))
```

En primer lugar, vuelvo a definir la función polidivisible. Después, **extenpoli**, que, como vemos, recorre una cifra adicional ($i+n \cdot 10$) para encontrar un nuevo polidivisible. Si no lo encuentra, devuelve un cero.

En el caso de 126006 nos devuelve un múltiplo de 7. Lo vemos en la web de PARI:

```
? polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
extenpoli(n)={my(g=#digits(n),nn=0,i=1,es=0);while(i<=9&&es==0,nn=i+n*10;if(polidivisible(nn),es=1);i+=1);nn*(es==1)}
print(extenpoli(126006))
%3 = (n)->my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&&i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es
%4 = (n)->my(g=#digits(n),nn=0,i=1,es=0);while(i<=9&&es==0,nn=i+n*10;if(polidivisible(nn),es=1);i+=1);nn*(es==1)
1260063
```

Sería 1260063 el siguiente polidivisible, divisible entre 7. Si proseguimos, el siguiente resulta ser 12600632, divisible entre 8. Seguirían 126006327, 1260063270, 12600632704, 126006327048. Aquí se detiene la

secuencia, porque al añadir otra cifra no se logra un múltiplo de 13.

Todo esto funciona si el primer número es polidivisible con seguridad. Si no, llegaríamos a resultados erróneos. Estas secuencias de extensiones no tienen que ser únicas. Un polidivisible puede dar lugar a dos o más cuando se le añade una cifra, ya que en un rango de 10 puede haber dos o más múltiplos del número de cifras.

Secuencia de extensiones

Si usamos una lista, es posible lograr que PARI nos devuelva el conjunto de extensiones (o uno de ellos). Bastará añadir otra función nueva que descubra extensiones mientras sea posible. Todo el conjunto quedaría así:

```
polidivisible(n)={my(m=#digits(n),i=2,es=1,t);while(es==1&& i<=m,t=truncate(n/10^(m-i));if(t%i<>0,es=0);i+=1);es}
```

```
extenpoli(n)={my(g=#digits(n),nn=0,i=0,es=0);while(i<=9&&es==0,nn=i+n*10;if(polidivisible(nn),es=1);i+=1);nn*(es==1)}
```

```
secuenpoli(n)={my(m=n,s=List());while(m<>0,listput(~s,m);m=extenpoli(m));s}
```

```
print(secuenpoli(126006))
```

Nos daría el mismo resultado para 126006 en forma de lista:

```
List([126006, 1260063, 12600632, 126006327, 1260063270, 12600632704, 126006327048])
```

Otros ejemplos:

N=62765

```
List([62765, 627654, 6276543, 62765432, 627654321, 6276543210, 62765432103, 627654321036, 6276543210366, 62765432103668])
```

N=180402

```
List([180402, 1804026, 18040264, 180402642, 1804026420, 18040264209, 180402642096, 1804026420963, 18040264209632])
```

N=747

```
List([747, 7472, 74720, 747204, 7472045, 74720456, 747204561, 7472045610, 74720456107, 747204561072])
```

Ejemplo de los primeros párrafos:

N=381654729

```
List([381654729, 3816547290, 38165472906, 381654729060, 3816547290608])
```

Con esto terminamos la introducción a este tipo de números. Quedan muchas curiosidades, que puedes encontrar en las dos webs enlazadas más arriba. Aquí nos quedamos con las que son fácilmente tratables con VBasic y PARI.

DIVISORIAL

Llamaremos *divisorial* de un número al producto de sus divisores, (según OEIS WIKI, sin revisar). Su cálculo es muy sencillo, porque los divisores de N se presentan por pares cuyo producto es N. Por ejemplo, en 45 se da que $45*1=15*3=9*5=45$. El producto total, o divisorial, será $45^3=91125$.

Si $\text{TAU}(N)$ es el número de sus divisores, se tendrá que el número de pares será $\text{TAU}(N)/2$ si TAU es par y $(\text{TAU}(N)+1)/2$ si es impar, porque este último caso se dará en los cuadrados, y la RAIZ(N) se contaría repetida. Por ejemplo, el divisorial de 36 será $36*18*12*9*6*4*3*2*1=10077696$, pero si lo ordenamos por pares, la raíz cuadrada estaría repetida:

36	1
18	2
12	3
9	4
6	6
60466176	

Nos resultaría un producto seis veces mayor. Habría que suprimir el 6 sobrante, con lo que resultaría ese 6 multiplicado por los pares restantes, que forman TAU(N). Tendríamos $6 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^{9/2}$

Por tanto, en el caso par y en el caso impar la fórmula adecuada es

$$\pi(n) = n^{\tau(n)/2}$$

Hemos seguido la nomenclatura usual de $\pi(n)$ para el divisorial.

En el caso de 45 nos daría $45^{6/2} = 45^3 = 91125$

En el caso de 36 existen 9 divisores, luego tendríamos $36^{9/2} = 10077696$.

Los resultados del divisorial no se repiten, es decir, a números distintos les corresponden divisoriales distintos (ver la demostración de T.D. Noe en

<http://www.sspectra.com/math/DivisorProduct.pdf>)

Encontrar $\pi(n)$ sin usar la función TAU es muy simple. Basta recorrer los números menores o iguales a N y multiplicar tan solo los divisores. En la práctica solo hay

que llegar a $N/2$ y después multiplicar por N . En Visual Basic puede quedar así:

Function proddivi(n)

Dim p, i

p = n 'Comenzamos el producto con n

For i = 2 To n / 2

If n / i = n \ i Then p = p * i 'Si es divisor, se multiplica

Next i

proddivi = p

End Function

Con esta función podemos crear la primera tabla de divisoriales:

N	$\pi(N)$
1	1
2	2
3	3
4	8
5	5
6	36
7	7
8	64
9	27
10	100
11	11
12	1728
13	13
14	196
15	225

Están publicados en <https://oeis.org/A007955>

En el lenguaje PARI está implementada la función TAU con el nombre de *numdiv*, luego el divisorial se puede encontrar con

$$\pi(n) = n^{(\text{numdiv}(n)/2)}$$

En la imagen se ha pedido el valor de los 50 primeros:

```
? for(n=1,50,print1(n^(numdiv(n)/2),", "))
1, 2, 3, 8, 5, 36, 7, 64, 27, 100, 11, 1728, 13, 196, 225, 1024, 17, 5832, 19, 8000,
441, 484, 23, 331776, 125, 676, 729, 21952, 29, 810000, 31, 32768, 1089, 1156, 1225,
10077696, 37, 1444, 1521, 2560000, 41, 3111696, 43, 85184, 91125, 2116, 47, 25480396
8, 343, 125000,
```

En color azul figura la instrucción en PARI usada.

Casos particulares

N es primo

En ese caso $\text{TAU}(N)=2$, luego $\pi(n) = n^{2/2} = n$

Es lógico, porque el único producto de divisores es $1 \cdot n$ y el divisorial de n coincide con el número n

Potencia de primo

Si $N = p^k$, $\text{TAU}(N) = k+1$, porque los divisores serán $(1, p, p^2, \dots, p^k)$, luego el divisorial será $p^{(k+1)/2}$.

Entre ellos, los divisoriales de cubos de primos serán cuadrados.

Semiprimo no cuadrado

Si $N=p*q$, con $p \neq q$, poseerá cuatro divisores, 1, p, q y pq, luego $\tau(N)=4$ y su producto de divisores $\pi(n)=n^{4/2}=n^2$. Lo vemos en el listado anterior con 6 y 10.

Resultado cuadrado

Si el divisorial es una potencia, encontraremos muchos de ellos que sean cuadrados. Ya hemos visto que aparecen en los cubos de primos y en semiprimos no cuadrados, pero existen más. Estos son los primeros:

Número	Divisorial	Factores primos
1	1	1
6	36	[2,2][3,2]
8	64	[2,6]
10	100	[2,2][5,2]
14	196	[2,2][7,2]
15	225	[3,2][5,2]
16	1024	[2,10]
21	441	[3,2][7,2]
22	484	[2,2][11,2]
24	331776	[2,12][3,4]
26	676	[2,2][13,2]
27	729	[3,6]
30	810000	[2,4][3,4][5,4]
33	1089	[3,2][11,2]
34	1156	[2,2][17,2]
35	1225	[5,2][7,2]
38	1444	[2,2][19,2]
39	1521	[3,2][13,2]
40	2560000	[2,12][5,4]

Entre ellos están los *esfénicos*, números del tipo $p*q*r$ con los tres primos distintos. En ellos los divisores son: 1, p, q, r, pq, pr, rq y pqr, es decir ocho divisores, luego el producto de divisores será una potencia cuarta, también cuadrada.

En <https://oeis.org/A048943> puedes consultar un razonamiento más completo.

Resultado cúbico

Es fácil razonar que las quintas potencias de un primo poseen un divisorial que será un cubo, ya que $\pi(n)=n^{(5+1)/2}=n^3$

También producen un cubo los números, como el 12, que tienen la forma pq^2 , pues $TAU(n)=(1+1)(2+1)=6$, luego $\pi(n)=n^{6/2}=n^3$

Estos son los primeros:

Número	Divisorial	Factores primos
12	1728	[2,6][3,3]
18	5832	[2,3][3,6]
20	8000	[2,6][5,3]
28	21952	[2,6][7,3]
32	32768	[2,15]
44	85184	[2,6][11,3]
45	91125	[3,6][5,3]
50	125000	[2,3][5,6]
52	140608	[2,6][13,3]
63	250047	[3,6][7,3]
68	314432	[2,6][17,3]
75	421875	[3,3][5,6]
76	438976	[2,6][19,3]
92	778688	[2,6][23,3]

Puedes buscar más casos particulares, que no serán complicados de razonar.

SUCESIONES COMPLETAS

En este capítulo, abordaré un tema interesante, y es el de la posibilidad de que los elementos de una sucesión de números naturales, finita o infinita, generen otros números, a partir de sumas, con o sin repetición.

Ya traté ese tema en algunas entradas antiguas, como

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html>

“Frobenius y los mcNuggets”, en la que trataba el problema de las monedas necesarias para alcanzar una cantidad y el número de Frobenius.

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2012/11/descomposicion-de-un-numero-segun-una.html>

En esta entrada se trataba de generar un número a partir de una lista de ellos.

En ambos casos las sucesiones eran finitas, y al sumar los elementos se podían repetir los sumandos.

También se relacionaba algo con lo que pretendo presentar ahora, la entrada sobre algoritmos voraces o codiciosos:

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/09/algoritmos-codiciosos-para-sumas.html>

Sucesión completa

Desarrollaré aquí el tipo de sucesión más eficaz para generar todos los números naturales, el de sucesión completa.

Una sucesión de números naturales se llama **completa** cuando cualquier otro número natural se puede escribir como suma de elementos de esa sucesión sin repetir ninguno.

El ejemplo básico más popular es el de las potencias de 2, que da lugar al sistema binario de representación de los números. En efecto, la sucesión 1, 2, 4, 8, 16, ... permite representar cualquier número como suma de algunos términos, sin repetición. La forma de conseguirlo es similar a la de los algoritmos codiciosos que traté en la entrada referenciada más arriba.

Vemos un ejemplo: representar el número 53:

Buscamos el término de la sucesión más cercano a 53 y menor que él, que es el 32, tomamos nota y restamos: $53-32=21$. Reiteramos: $21-16=5$, $5-4=1$, con lo que obtenemos $53=32+16+4+1$, que da lugar a la representación binaria 110101.

Este ejemplo nos abre camino para caracterizar las sucesiones completas. Podemos dar tres condiciones para que una sucesión sea de este tipo:

- El primer término ha de ser 1, $a_1=1$
- Aunque no es imprescindible, pero sí algo operativo, la sucesión debe presentar un orden creciente.
- Si llamamos s_n a la suma de los n primeros términos de la sucesión, se debe cumplir: $s_{n-1} \geq a_n - 1$ para todo $n \geq 1$

La primera condición es imprescindible para poder generar todos los números y que los algoritmos tengan parada. Por ejemplo, los números pares no son completos, pues nunca pueden generar un impar.

La segunda se incluye para que tengan sentido los algoritmos.

La tercera es fundamental, porque garantiza que se pueda avanzar en descubrir sumandos hasta llegar, si es necesario al 1.

Seguimos el proceso del 53 visto más arriba. Dado el número N , deberemos encontrar el mayor elemento de la sucesión que sea menor que N , en el ejemplo 32. La diferencia 21 se ha de poder tratar del mismo modo, con lo que s_{n-1} ha de ser suficiente para ello, es decir, $s_n \geq a_n - 1$. Piénsese en el caso 63, en el que $63-32=31$, y debe poder ser generado por los elementos anteriores, es decir por s_{n-1} , y de ahí la condición $s_n \geq a_n - 1$.

Si no se cumple esta condición, la sucesión no es completa. Por ejemplo, la sucesión de potencias de cuatro, 1, 4, 16, 64, ...no la cumple, y, por ejemplo, no

puede generar el número 70, porque $70-64=6$, y 6 no se puede formar con 1 y 4. Aquí la suma $1+4+16$ no es suficiente.

La sucesión de potencias de 2 la cumple, porque $s_n=2^n-1$, y da lugar a la representación binaria. Esto se logra porque no se admiten repeticiones en los sumandos. También es minimal, pues si eliminamos un término de ella, habrá números naturales que no se puedan representar. Por ejemplo, si elimino el 4, no podré representar el 6. Otra característica es que la representación es única, algo que no se contempla en las definiciones.

Existe una condición suficiente que puede sustituir a la tercera, y es que **$2a_k \geq a_{k+1}$ para $k \geq 1$** . El ejemplo de las potencias de 2 la cumple, pero falta ver su suficiencia. Lo razonamos con el ejemplo del $N=53$. La primera operación fue buscar el término menor que 53 más cercano a él, y fue el 32. Restamos y nos resultó 21 para proseguir. Lo vemos en general:

N estará entre a_k y a_{k+1} , pero a_{k+1} estará entre a_k y $2a_k$, luego tendremos: $a_k \leq N \leq a_{k+1} \leq 2a_k$. Restando a_k se verificará:

$$0 \leq N - a_k \leq a_k$$

Por tanto, la siguiente diferencia (en el ejemplo, el 21) será menor que a_k , y se podrá seguir el algoritmo con un término menor, hasta llegar a 1.

Ejemplo reciente

En una entrada de mi blog vimos la sucesión “cortador perezoso”, formada por los términos de fórmula

$$c(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Sus primeros términos son 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191, 211, 232, 254, 277, 301, 326, 352, 379, ...<https://oeis.org/A000124>

Es evidente que cumple $2a_k \geq a_{k+1}$.

$2a_k - a_{k+1} = 2(k(k+1)/2+1) - (k+1)(k+2)/2 - 1 = (k+1)(k - (k+2)/2) + 1 = (k+1)(k/2 - 1) + 1$, y esta diferencia es positiva o cero para $k > 1$

Podemos afirmar que esta sucesión es completa, como se afirma en la página en la que está publicada. Según esto, cualquier número natural es suma de algunos de sus términos tomados sin repetición. He efectuado sencillas comprobaciones con mi hoja de cálculo ***partlista***

(Ver

<https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#reprenum>)

He elegido el número 62 al azar, y deseo generarlo con los términos de esta sucesión 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29,

37. He concretado en la hoja que no se repitan sumandos, y me ha devuelto estos resultados:

11+ 22+ 29	
4+ 7+ 22+ 29	
2+ 7+ 16+ 37	
2+ 4+ 11+ 16+ 29	
2+ 4+ 7+ 11+ 16+ 22	
1+ 2+ 22+ 37	
1+ 2+ 4+ 7+ 11+ 37	

No es de extrañar que resulten siete soluciones, porque en estos procesos no tiene que existir solución única.

Sucesión de Fibonacci

Esta sucesión es claramente completa. Basta recordar que es creciente y en ella $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, luego $a_{k+1} < a_k + a_k = 2a_k$, que es condición suficiente para la completitud.

Existe una descomposición basada en esta propiedad, y es la de Zeckendorf, que consiste en ir restando a un número N el mayor número de Fibonacci posible. Es interesante, y acudo a ella con frecuencia. Puedes profundizar en el tema leyendo mi entrada <https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/09/representacion-de-zeckendorf.html> y descubrir en qué consiste la multiplicación de Fibonacci.

Por ejemplo, esta es la representación de Zeckendorf del número 75:

$$75 = F(10) + F(7) + F(5) + F(3) = 55 + 13 + 5 + 2$$

No es el único desarrollo. Con nuestra herramienta Cartesius

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius>) se puede conseguir otro. Estas son las condiciones:

xrango=5

xt=1..55

xt=filtro(fibonacci)

suma=75

creciente

no repite

Y este el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
2	5	13	55		
2	5	13	21	34	

Nos devuelve el ya conocido, $2+5+13+55$, que es el desarrollo minimal, pero nos ofrece otro: $75=34+21+13+5+2$

Números primos con la unidad

Si a la sucesión de números primos le adjunto $a(1) = 1$, resulta una sucesión completa. Es creciente, comienza en 1 y cumple que $2p(k) \geq p(k+1)$. Esta afirmación se basa en el Postulado de Bertrand, que afirma, entre otras formulaciones, esta desigualdad. Por ejemplo, con la

hoja *partlista*, podemos generar el número 35 con esta sucesión, y resulta:

Soluciones	18
7+ 11+ 17	
5+ 13+ 17	
5+ 11+ 19	
5+ 7+ 23	
3+ 13+ 19	
2+ 5+ 11+ 17	
2+ 3+ 13+ 17	
2+ 3+ 11+ 19	
2+ 3+ 7+ 23	
1+ 11+ 23	
1+ 5+ 29	
1+ 3+ 31	
1+ 3+ 7+ 11+ 13	
1+ 3+ 5+ 7+ 19	
1+ 2+ 13+ 19	
1+ 2+ 3+ 29	
1+ 2+ 3+ 5+ 11+ 13	
1+ 2+ 3+ 5+ 7+ 17	

Es evidente que esta descomposición da lugar a muchas soluciones distintas.

Se pueden encontrar más ejemplos de sucesiones completas, pero con estos se comprende bien el concepto. Otros que he encontrado son demasiado particulares y no son muy interesantes.

BÚSQUEDAS Y CURIOSIDADES

SIMÉTRICOS DE UN ESFÉNICO

En este capítulo estudiaremos la relación entre los factores primos de un número esfénico y los de su simétrico, el que posee cifras simétricas a las de ese número en el sistema de numeración decimal.

Números esfénicos

Los números esfénicos son los que poseen tres factores primos distintos, como se explica en mi blog.

(Ver <https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/09/blog-post.html>)

En muchos lenguajes de programación se define la función OMEGA como el total de factores primos distintos que posee un número, y BIGOMEGA, al mismo total si se cuentan los primos repetidos. Esto nos da un criterio para conocer si un número N es esfénico, y es que $OMEGA(N)=3$ y $BIGOMEGA(N)=3$. Así se “prohíbe” que se repitan primos. Lo expresamos en lenguaje PARI:
`print(omega(42)==3&&bigomega(42)==3)`

En el caso del $42=2*3*7$, no se cumple la propiedad que buscamos en el simétrico, porque $24=2*2*2*3$. Sin embargo, $165=3*5*11$ daría lugar a $561=3*11*17$, con lo que el simétrico es también esfénico.

Aquí ya se ha usado la función ESFENICO, que detecta si un número es de esta clase:

Function esfenco(n) As Boolean

Dim a, b, c, d, m

m = 0

a = 2

While a <= n / 2 And m = 0

If esprimo(a) And n Mod a = 0 Then

b = n / a

If Not esprimo(b) Then

c = a + 1

While c <> a And c <= b / 2 And m = 0

If esprimo(c) And b Mod c = 0 Then

d = b / c

If esprimo(d) And d <> c And d <> a And a <> c Then

m = 1

End If

c = c + 1

Wend

End If

End If

a = a + 1

Wend

If m = 1 Then esfenco = True Else esfenco = False

End Function

Con esta función podemos detectar qué números siguen siendo esfénicos al invertir sus cifras. No consideraremos los capicúas. Basta usar la condición $ESFENICO(N) \text{ AND } ESFENICO(CIFRAINVER(N)) \text{ AND } NOT \text{ ESCAPICUA}(N)$

Con ella descubrimos los esfénicos cuyo simétrico también lo es. Los recogemos en esta tabla:

N	FACTORES	SIMÉTRICO	FACTORES
165	[3,1][5,1][11,1]	561	[3,1][11,1][17,1]
246	[2,1][3,1][41,1]	642	[2,1][3,1][107,1]
285	[3,1][5,1][19,1]	582	[2,1][3,1][97,1]
286	[2,1][11,1][13,1]	682	[2,1][11,1][31,1]
366	[2,1][3,1][61,1]	663	[3,1][13,1][17,1]
418	[2,1][11,1][19,1]	814	[2,1][11,1][37,1]
435	[3,1][5,1][29,1]	534	[2,1][3,1][89,1]
438	[2,1][3,1][73,1]	834	[2,1][3,1][139,1]
498	[2,1][3,1][83,1]	894	[2,1][3,1][149,1]
534	[2,1][3,1][89,1]	435	[3,1][5,1][29,1]
561	[3,1][11,1][17,1]	165	[3,1][5,1][11,1]
582	[2,1][3,1][97,1]	285	[3,1][5,1][19,1]
609	[3,1][7,1][29,1]	906	[2,1][3,1][151,1]
642	[2,1][3,1][107,1]	246	[2,1][3,1][41,1]
663	[3,1][13,1][17,1]	366	[2,1][3,1][61,1]
682	[2,1][11,1][31,1]	286	[2,1][11,1][13,1]

En los corchetes, el 1 es el exponente del primo correspondiente.

Están publicados en <https://oeis.org/A270175>

En esa sucesión les llaman *Cinehps numbers*, buscando la palabra simétrica a la de *sphenic*. En español podrían llamarse *ocinefse*, pero es una palabra poco atractiva, por lo que no la usaré.

Dentro de esta sucesión podríamos extraer ejemplos múltiplos de un semiprimo determinado, como sería el 15. Observaremos que no son escasos:

MÚLTIPLO DE 15	ES ESFÉNICO	SIMÉTRICO	ES ESFÉNICO
165	[3,1][5,1][11,1]	561	[3,1][11,1][17,1]
285	[3,1][5,1][19,1]	582	[2,1][3,1][97,1]
435	[3,1][5,1][29,1]	534	[2,1][3,1][89,1]
1095	[3,1][5,1][73,1]	5901	[3,1][7,1][281,1]
1185	[3,1][5,1][79,1]	5811	[3,1][13,1][149,1]
1245	[3,1][5,1][83,1]	5421	[3,1][13,1][139,1]
1515	[3,1][5,1][101,1]	5151	[3,1][17,1][101,1]
1545	[3,1][5,1][103,1]	5451	[3,1][23,1][79,1]
1605	[3,1][5,1][107,1]	5061	[3,1][7,1][241,1]
1965	[3,1][5,1][131,1]	5691	[3,1][7,1][271,1]

Esta tabla nos sugiere que cada semiprimo posee una lista de primos, aquí 11, 19, 29, ..., que le hacen poseer la propiedad que estamos tratando. Parece que todos los semiprimos la poseerán, pero dejamos esta posibilidad para quien desee estudiarla.

En los comentarios a esa sucesión se hace notar que un múltiplo de 10 sólo pertenecería a ella si el primo $N/10$ es simétrico de un esfénico. Esto nos abre una puerta a otros casos.

Primos simétricos de esfénicos

Podemos cambiar la exigencia de que el número sea esfénico por el de que sea primo. Sería un pequeño cambio fácil de realizar, y seguiríamos sin contar con los capicúas. El resultado sería:

N	ES PRIMO	SIMÉTRICO	ES ESFÉNICO
223	[223,1]	322	[2,1][7,1][23,1]
269	[269,1]	962	[2,1][13,1][37,1]
281	[281,1]	182	[2,1][7,1][13,1]
457	[457,1]	754	[2,1][13,1][29,1]
499	[499,1]	994	[2,1][7,1][71,1]
839	[839,1]	938	[2,1][7,1][67,1]
1049	[1049,1]	9401	[7,1][17,1][79,1]
1289	[1289,1]	9821	[7,1][23,1][61,1]
1373	[1373,1]	3731	[7,1][13,1][41,1]
1459	[1459,1]	9541	[7,1][29,1][47,1]
1543	[1543,1]	3451	[7,1][17,1][29,1]
1609	[1609,1]	9061	[13,1][17,1][41,1]

Están publicados en <https://oeis.org/A271799>

Por ejemplo, si 269 lo multiplicamos por 10, lo convertiremos en esfénico, y su simétrico, $0962=962$, también lo sería.

Ya puestos a buscar casos, podríamos emparejar semiprimos con esfénicos.

Semiprimos simétricos de esfénicos

Como ejemplo de las búsquedas que se pueden desarrollar buscamos los números semiprimos que se convierten en esfénicos al invertir sus cifras. Un sencillo cambio de definición los consigue. El resultado es

Semiprimos	Factores	Esfénicos	Factores
87	[3, 1][29, 1]	78	[2, 1][3, 1][13, 1]
201	[3, 1][67, 1]	102	[2, 1][3, 1][17, 1]
206	[2, 1][103, 1]	602	[2, 1][7, 1][43, 1]
209	[11, 1][19, 1]	902	[2, 1][11, 1][41, 1]
249	[3, 1][83, 1]	942	[2, 1][3, 1][157, 1]
267	[3, 1][89, 1]	762	[2, 1][3, 1][127, 1]
309	[3, 1][103, 1]	903	[3, 1][7, 1][43, 1]
411	[3, 1][137, 1]	114	[2, 1][3, 1][19, 1]
451	[11, 1][41, 1]	154	[2, 1][7, 1][11, 1]
453	[3, 1][151, 1]	354	[2, 1][3, 1][59, 1]
458	[2, 1][229, 1]	854	[2, 1][7, 1][61, 1]
471	[3, 1][157, 1]	174	[2, 1][3, 1][29, 1]
473	[11, 1][43, 1]	374	[2, 1][11, 1][17, 1]
478	[2, 1][239, 1]	874	[2, 1][19, 1][23, 1]
501	[3, 1][167, 1]	105	[3, 1][5, 1][7, 1]

No parecen estar publicadas las dos sucesiones.

UN NÚMERO COMO DIFERENCIA ENTRE POTENCIAS

Antecedentes

En mi blog se han estudiado Diferencia entre potencias varios tipos de diferencias de potencias. Por ejemplo, ya hemos visto aquí las diferencias de cuadrados, como puedes buscar en

<https://hojaynumeros.blogspot.com/>

También se han tratado las de cubos:

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/09/diferencias-de-cubos-enteros-positivos.html>

O bien de cubos menos cuadrados y también el caso en el que los dos exponentes son iguales:

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/01/regresos-13-diferencia-de-potencias.html>

Por último, algunas curiosidades sobre diferencias de potencias, como, por ejemplo. Acercamientos entre potencias

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/10/acercamiento-entre-potencias.html>

En mi reciente publicación “Números y potencias” están contenidas varias cuestiones interesantes (descargable desde

<https://www.hojamat.es/publicaciones/numpot.pdf>)

Diferencias entre potencias de distinto exponente

No he abordado nunca (creo que es así, porque a mi edad la memoria falla), la diferencia entre dos potencias de distinto exponente. Aprovecharé el tema para presentar varias alternativas.

Función ESPOTENCIA

Hay varias formas de identificar una potencia perfecta. La más directa es la de descomponer el número en factores primos y encontrar el MCD de sus exponentes.

Si este es mayor que 1, estaremos ante una potencia. Por ejemplo, $576=2^6*3^2$. EL MCD de 6 y 2 es 2, luego 576 es un cuadrado. Esta técnica nos da el mayor exponente si el número es multipotencia, como el 64, que lo catalogará como sexta potencia. Para la cuestión actual lo que nos interesa es que sea verdaderamente una potencia.

Para sacar los factores primos disponemos de nuestra función SACAPRIMOS, que la puedes encontrar en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/06/numeros-con-cifras-crecientes-o_02105820646.html

Esta función te devuelve los factores primos en el vector **primo()** y sus exponentes en **expo()**, además de indicar el número de esos factores en **NUMOMEGA**.

Esas variables se han de declarar de forma global en VBasic:

Global primo(50), expo(50)
Global numomega

Esta es la función ESPOTENCIA:

Function espotencia(n)
Dim i, j, s, p

If n = 1 Or n = 0 Then espotencia = 1: Exit Function
p = n

$j = \text{sacaprimos}(p)$ 'Explicado en el párrafo anterior
 $s = \text{expo}(1)$ 'El vector expo está también explicado
If $j > 1$ Then
For $i = 2$ To j
 $s = \text{mcd}(s, \text{expo}(i))$ 'Calcula el MCD
Next i
End If
If $s = 1$ Then $s = 0$ 'Si MCD es 1, no es potencia
 $\text{espotencia} = s$ 'Devuelve el exponente o un cero
End Function

Búsqueda de diferencias con la función ESPOTENCIA

Haré uso de mi función ESPOTENCIA y de la correspondiente ISPOWER del lenguaje PARI. Esta última me permitirá llegar a números grandes con más facilidad.

La idea para buscar diferencias de potencias que coincidan con N será la de recorrer todos los números K hasta un tope prefijado, y estudiar si K y K+N son potencias. En caso afirmativo, habremos dado con una solución. Se les halla la raíz exacta y se incorporan al resultado.

La función quedaría así:

Function difepote\$(n, tope)

Dim b, m, p, q, r, t

Dim s\$

s = "" 'Contenedor de soluciones

m = 0 'Contador de soluciones

For b = 1 To tope - n 'El tope es parámetro prefijado

q = espotencia(b) 'Daría cero o un exponente

p = espotencia(b + n) 'Daría cero o un exponente

If p > 0 And q > 0 Then 'Si no dan cero, es que son potencias

r = raiz_exacta(b + n, p)

t = raiz_exacta(b, q)

m = m + 1 'Nueva solución

s = s + "=" + ajusta(r) + "^" + ajusta(p) + "-" + ajusta(t) + "^" + ajusta(q)

End If

Next b

If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + ": " + s

difepote = s

End Function

La función RAIZ_EXACTA también se basa en los vectores PRIMO y EXPO. Para quien tenga interés, adjunto su código sin comentarios:

Function raiz_exacta(n, k)

Dim p, r, i

If n = 1 Or n = 0 Then raiz_exacta = n: Exit Function

```

p = espotencia(n)
If p Mod k = 0 Then
r = 1
For i = 1 To numomega
r = r * primo(i) ^ (expo(i) / k)
Next i
End If
If r = 1 Then r = 0
raiz_exacta = r
End Function

```

Un ejemplo del uso de esta función DIFEPOTE lo vemos con el número 28 y tope 200000:

$$\text{Difepote}(28;200000)=7:=2^5-2^2=6^2-2^3=2^6-6^2=2^7-10^2=2^9-22^2=37^3-15^4=2^{17}-362^2$$

Nos indica que ha encontrado siete soluciones y escribe sus desarrollos.

No es un algoritmo rápido. En el caso del 28 sí devuelve el resultado en pocos segundos, pero con un tope mayor puede tardar.

Elijo ahora el número 120 para destacar dos resultados que pueden resultar:

$$120=11^2-1^1=2^7-2^3=13^2-7^2=17^2-13^2=31^2-29^2$$

Una de las bases puede ser 1 (en ese caso tendrá exponente 1) y las dos bases pueden ser iguales, como en 2^7-2^3 . Es normal que esto ocurra.

Versión en PARI

Para lograr más rapidez y llegar a números más grandes, he traducido la función DIFEPOTE al lenguaje PARI. No necesita explicación, salvo que en él es preferible presentar los resultados como lista y no como cadena de texto.

Una novedad en este lenguaje es que ISPOWER, además de devolver el exponente, guarda la base en una variable. Así, `ispower(343,,&k)` devolverá 3, porque es un cubo, y guardará la base 7 en la variable k. Tiene el inconveniente de que no maneja bien al caso del 1, pues lo considera siempre potencia de exponente cero. Esto se puede ignorar o intentar corregirlo en el código. He elegido esta última posibilidad, aunque el código se alarga demasiado. Es este:

```
difepote(n,tope)={my(b,b1,s=List(),r1,r2);p=ispower(
n+1,,&r1);if(p>0,listput(~s,r1);listput(~s,p);listput(~s,
1);listput(~s,1);listput(~s,"#"));for(b=2,tope-
n,q=ispower(b,,&r2);b1=b+n;p=ispower(b1,,&r1);if(p
<>0&&q<>0,listput(~s,r1);listput(~s,p);listput(~s,r2);l
istput(~s,q);listput(~s,"#")));s}
print(difepote(132608,200000))
```

Aquí se trocea en líneas, pero hay que escribirlo sin saltos de línea. Este es el resultado en la web de PARI:

```
%3 = (n,tope)->my(b,b1,s=List(),r1,r2);p=ispower(n+1,,&r1);if(p>0,listput(~s,r1);listput(~s,p);listput(~s,1);listput(~s,1);listput(~s,"#"));for(b=2,tope-n,q=ispower(b,,&r2);b1=b+n;p=ispower(b1,,&r1);if(p<>0&&q<>0,listput(~s,r1);listput(~s,p);listput(~s,r2);listput(~s,q);listput(~s,"#"));s
List([372, 2, 76, 2, "#", 52, 3, 20, 3, "#", 387, 2, 131, 2, "#", 408, 2, 184, 2, "#", 522, 2, 374, 2, "#", 582, 2, 454, 2, "#", 648, 2, 536, 2, "#", 933, 2, 859, 2, "#", 1068, 2, 1004, 2, "#", 1212, 2, 34, 4, "#"])
```

He elegido este ejemplo porque en él se destaca la mayor potencia de cálculo de PARI, ya que Excel tardaría más. Una solución más restringida, con un tope menor, es

$$4: =372^2-76^2=52^3-20^3=387^2-131^2=408^2-184^2$$

Si llegamos a un tope de 2000000, tarda sus buenos minutos en Excel, y al final devuelve:

$$10:=372^2-76^2=52^3-20^3=387^2-131^2=408^2-184^2=522^2-374^2=582^2-454^2=648^2-536^2=933^2-859^2=1068^2-1004^2=1212^2-34^4$$

El mismo resultado, pero con más lentitud.

Es una preferencia personal el pasar o no a PARI en esta cuestión.

En los anteriores párrafos se usó la descomposición en factores primos de un número. Esto supone declarar los vectores **primo()** y **expo()** de forma global y puede resultar un poco técnico. Ahora consideraré otras alternativas.

Si no te quieres complicar con factores primos, puedes usar esta función, que te da las primeras soluciones y resulta rápida:

Function dospoten\$(n)

Dim i, p, q, a, b, c, x

Dim s\$

s\$ = ""

x = n

For p = 2 To 12 ‘Se buscan potencias de exponentes **del 2 al 12**. ‘Esto se puede cambiar

a = Int(x ^ (1 / p)) + 1 ‘Posible raíz p-ésima

For i = a To 10 * a

b = i ^ p - n ‘Se halla la diferencia con N

For q = 2 To 20

c = Int(b ^ (1 / q) + 0.000001) ‘Se identifica como potencia

If c ^ q = b Then ‘Si todo va bien, se publica

s\$ = s\$ + "# " + ajusta(i) + "^" + ajusta(p) + "-" + ajusta(c) + "^" + ajusta(q) ‘Si no se cuenta con la función AJUSTA, se puede usar Str\$

End If

Next q

Next i

Next p

If s = "" Then s = "NO"

dospoten = s\$ ‘Publica la lista de diferencias de potencias

End Function

Con alguna limitación, es útil, y yo la uso en mis cálculos diarios. Puede que no llegue a alguna solución, pero suele funcionar bien.

Unos ejemplos:

$60 = 8^2 - 2^2 \# 16^2 - 14^2 \# 4^3 - 2^2 \# 4^4 - 14^2 \# 2^6 - 2^2 \# 2^8 - 14^2$

$112 = \# 11^2 - 3^2 \# 12^2 - 2^5 \# 16^2 - 12^2 \# 29^2 - 27^2 \# 29^2 - 9^3 \# 29^2 - 3^6 \# 8^3 - 20^2 \# 4^4 - 12^2 \# 2^7 - 4^2 \# 2^7 - 2^4 \# 2^8 - 12^2 \# 2^9 - 20^2 \# 2^{11} - 44^2$

$13 \# 7^2 - 6^2 \# 16^2 - 3^5 \# 17^3 - 70^2 \# 4^4 - 3^5 \# 2^8 - 3^5$

Uso de la herramienta CARTESIUS

Mi máquina de construir productos cartesianos condicionados también nos puede ayudar a encontrar diferencias de potencias dentro de un nivel elemental. En ella se puede exigir que las columnas a combinar sean potencias, lo que facilita su uso en esta cuestión. La puedes descargar desde

<https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius>

El problema es que la actualizo a veces, pero no la versión publicada, pero aquí valdrá.

La programación de esta búsqueda sería esta, concretada para el número 28:

$x_{total}=2$

$x_t=1..100$

$x_t=eti q(potencia)$

$ES x_1-x_2=28$

Declara que se combinarán dos columnas (X1 y X2)

En ellas se escribirán 100 datos (pueden ser más a costa del tiempo de proceso)

Cada columna contendrá las primeras potencias.

Se deberá cumplir que X1 menos X2 sea 28 (esto es un ejemplo)

Al pulsar sobre el botón **Iniciar** se construirán las columnas de potencias:

En la siguiente página **Producto** obtendremos las primeras diferencias de potencias que equivalen a 28.

X1	X2
1	1
4	4
8	8
9	9
16	16
25	25
27	27
32	32
36	36
49	49
64	64
81	81
100	100
121	121
125	125

X1	X2	X3
32		4
36		8
64		36
128		100
512		484

Esto es un simple complemento, para comprobar otros resultados y para conocer una posibilidad alternativa. No tiene más importancia.

Esta sería la solución para 28 con las anteriores herramientas:

6^2-2^3 # 8^2-6^2 # 4^3-6^2 # 8^3-22^2 # 37^3-225^2 #
 37^3-15^4 # 2^5-2^2 # 2^6-6^2 # 2^7-10^2 # 2^9-22^2

Las soluciones de Cartesius están contenidas en esta lista.

Uso del Buscador de Naturales

Mi herramienta Buscador de Naturales posee la función POTENCIA, tanto de forma booleana, como True o False como actuando sobre un parámetro. Esto nos permite plantear una búsqueda de diferencia de potencias de forma sencilla. Basta condicionar N a que sea potencia y después volverla a usar pero con parámetro N+K.

Lo vemos más claramente con el número 24 como ejemplo:

Resultado de la búsqueda			Fin
Núm.	Solución	Detalles	
1	1	1, 25	Buscamos desde el número 1
2	8	8, 32	Hasta el número 5000
3	25	25, 49	
4	1000	1000, 1024	Con estas propiedades:
5			POTENCIA
6			ES POTENCIA(N+24)
7			EVALUAR N \$, N+24
8			

Las condiciones han sido:

POTENCIA: Busca los números que son potencias

ES POTENCIA(N+24): La partícula ES anuncia que se exigirá una condición complementaria mediante

expresiones o funciones. Aquí es que $N+24$ sea también potencia.

EVALUAR: Indica qué se escribirá en la segunda columna. Aquí hemos pedido que sea N , una coma, y $N+24$

Puedes descargar esta herramienta desde

<https://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador>

No resulta muy lento. Le hemos exigido tratar el 28 hasta un tope de 20000 y no ha tardado demasiado:

Núm.	Solución	Detalles
1	4	32
2	8	36
3	36	64
4	100	128
5	484	512
6		
7		

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	20000
Con estas propiedades:	
POTENCIA	
ES POTENCIA(N+28)	
EVALUAR N+28	

Coincide con anteriores planteamientos:

$$28 = 2^5 - 2^2 = 6^2 - 2^3 = 2^6 - 6^2 = 2^7 - 10^2 = 2^9 - 22^2$$

Se han creado dos columnas que después se pueden copiar en otra parte de Excel y añadirles detalles:

N	N+28	Factores N	Factores N+28
4	32	[2,2]	[2,5]
8	36	[2,3]	[2,2][3,2]
36	64	[2,2][3,2]	[2,6]
100	128	[2,2][5,2]	[2,7]
484	512	[2,2][11,2]	[2,9]

Despedida simplista

¿No queremos seguir con algoritmos? Pues podemos construir una tabla de doble entrada en la que figuren las potencias ordenadas tanto en filas como en columnas, y usar las búsquedas de Excel para localizar el número deseado. Se podía comenzar el tema por aquí, y el trabajo pesado que da puede justificar el pensar en algoritmos.

Aquí se pueden localizar algunos de los ejemplos que se han usado. Los he destacado en rojo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1		1	4	8	9	16	25	27	32	36	49	64	81	100	121	125	128	144	169
2	1	0	3	7	8	15	24	26	31	35	48	63	80	99	120	124	127	143	168
3	4		0	4	5	12	21	23	28	32	45	60	77	96	117	121	124	140	165
4	8			0	1	8	17	19	24	28	41	56	73	92	113	117	120	136	161
5	9				0	7	16	18	23	27	40	55	72	91	112	116	119	135	160
6	16					0	9	11	16	20	33	48	65	84	105	109	112	128	153
7	25						0	2	7	11	24	39	56	75	96	100	103	119	144
8	27							0	5	9	22	37	54	73	94	98	101	117	142
9	32								0	4	17	32	49	68	89	93	96	112	137
10	36									0	13	28	45	64	85	89	92	108	133
11	49										0	15	32	51	72	76	79	95	120
12	64											0	17	36	57	61	64	80	105
13	81												0	19	40	44	47	63	88
14	100													0	21	25	28	44	69
15	121																		

PANDIGITALES INESPERADOS

Hay varias acepciones de la palabra *pandigital*. Aquí nos referiremos a los pandigitales completos sin repetición, es decir, que consideraremos pandigitales a aquellos números de 10 cifras en las que figuren todas del 0 al 9 en cualquier orden y sin repetir ninguna. No se admite cero inicial. Excel lo suele suprimir, pero habrá que tener cuidado en otros lenguajes de programación.

Con esta definición es sencillo calcular por Combinatoria cuantos pandigitales de este tipo puede haber. Inténtalo.

Función para detectar pandigitales

Para esta detección se crea un vector de 10 elementos, $ci(10)$, y en cada uno se cuentan las apariciones de una cifra determinada del número. Para que sea pandigital, **todos los elementos han de ser iguales a 1**. En cualquier otro caso, no lo será.

Función pandigital

Function pandigital(a) As Boolean

'han de estar todas las cifras sin repetición y sin cero inicial

Dim ci(10)' Contenedor de cifras

Dim i

Dim t As Boolean

t = True ‘En principio suponemos que es pandigital
n = numcifras(a) ‘Se puede conseguir también sumando
 1 a su logaritmo decimal
If n <> 10 Then pandigital = False: Exit Function ‘No
 tiene diez cifras
For i = 0 To 9: ci(i) = 0: Next i ‘Contadores a cero
For i = 1 To n
ci(cifra(a, i)) = ci(cifra(a, i)) + 1 ‘Se cargan las cifras
 encontradas
If ci(cifra(a, i)) > 1 Then pandigital = False: Exit
Function ‘Si hay repetidas, no es pandigital
Next i
s = 0
For i = 0 To 9
If ci(i) = 0 Then t = False ‘Si falta una cifra, no es
pandigital
Next i
pandigital = t ‘Devuelve VERDADERO o FALSO
End Function

Resultados inesperados

La idea de hoy es buscar pandigitales en distintas
 circunstancias u operaciones. Predominarán productos y
 potencias, como ejemplos favorables a encontrar
 pandigitales, pero sólo serán ejemplos de uso para
 facilitar a los lectores la búsqueda en otros casos
 similares. Se pueden abordar muchos.

Vemos algunos ejemplos con nuestro buscador:

Multiplicar un número por otro relacionado

A partir de este ejemplo hay que tener en cuenta que los pandigitales están comprendidos entre $10^9=1000000000$ y $10^{10}=10000000000$. Sería inútil buscar fuera de este intervalo.

Multiplicamos N por N+1

En este primer ejemplo, podemos comenzar la búsqueda por $RAIZ(10^9)-1$, para que $N(N+1)$ entre en ese intervalo. La salida puede ser $RAIZ(10^{10})+1$. Esto no es demasiado importante. Se puede ampliar algo el rango. Nuestro buscador nos da 52 soluciones. Estas son las primeras:

N	N+1	Producto pandigital
38627	38628	1492083756
40508	40509	1640938572
43065	43066	1854637290
44027	44028	1938420756
44576	44577	1987064352
46565	46566	2168345790
48735	48736	2375148960
51714	51715	2674389510
54269	54270	2945178630

No esperaba tantos resultados. Se ve que el producto de consecutivos tiene características favorables. He probado con $N(N+2)$ y resultan 34. Con $N(N+3)$, 99.

Como era de esperar, es algo que resulta aleatorio en la práctica. Con otras diferencias se obtienen números similares.

Un número multiplicado por su doble produce resultados parecidos.

Uso de potencias

Cuadrado de N

Si lo reducimos a su cuadrado, es decir un número por sí mismo, está publicado en <https://oeis.org/A054038> con otros planteamientos, pero coincide mi buscador para pandigitales sin repetición, que resultan ser 87.

Estos son los primeros:

N	N ²
32043	1026753849
32286	1042385796
33144	1098524736
35172	1237069584
35337	1248703569
35757	1278563049
35853	1285437609
37176	1382054976
37905	1436789025
38772	1503267984
39147	1532487609
39336	1547320896
40545	1643897025
42744	1827049536

Podíamos operar N con N², a ver qué ocurre.

Con suma aparecen bastantes resultados. Uno es:

$$40508+40508^2=1640938572$$

Con cubos no he obtenido ningún pandigital.

Otras potencias

Para las potencias es preferible usar el lenguaje PARI, porque maneja las cifras con más soltura que Excel.

El criterio para saber si un número es pandigital puede ser este:

$$\mathbf{vecsort(digits(n))=[0..9] \ \&\&n \geq 10^9}$$

Se interpreta fácilmente: se ordenan los dígitos de n en un vector y ha de coincidir con $[0..9]$. Además, no puede tener cero inicial, ha de ser mayor o igual que 10^9 .

Con estas líneas de PARI podemos investigar potencias. Están adaptadas a cuadrados para probar, escribiendo $k=2$. Cambiando k se pueden investigar otras potencias.

$$\mathbf{pandigital(n)=vecsort(digits(n))=[0..9]\ \&\&n \geq 10^9}$$

$$\mathbf{k=2}$$

$$\mathbf{a=truncate(10^{(9/k)})}$$

$$\mathbf{b=truncate(10^{(10/k)})}$$

$$\mathbf{for(i=a,b,m=i^k;if(pandigital(m),print(i," ",m)))}$$

Este es un recorte de pantalla para $k=2$ en la web de PARI:

```
32043 , 1026753849
32286 , 1042385796
33144 , 1098524736
35172 , 1237069584
35337 , 1248703569
35757 , 1278563049
35853 , 1285437609
37176 , 1382054976
37905 , 1436789025
38772 , 1503267984
39147 , 1532487609
39336 , 1547320896
40545 , 1643897025
```

Observamos que coincide con el resultado de Excel.

No he encontrado pandigitales en los exponentes del 3 al 10, pero nos ha servido para iniciar el uso de PARI.

Otras búsquedas

Número por su simétrico en cifras

Aquí sí tendremos éxito. En Excel uso mi función CIFRAINVER y en PARI mi función REVERSE. Elijo este porque lo tengo desarrollado más brevemente. Podríamos usar lo siguiente:

```
pandigital(n)=vecsort(digits(n))==[0..9]&& n>=10^9  
reverse(n)=eval(concat(Vecrev(Str(n))))
```

a=2

b=1000

58

```
for(i=a,b,m=i*reverse(i);if(pandigital(m),print(i," ,  
",m)))
```

Definimos *pandigital* y *reverse* y después multiplicamos el número por su reverso:

```
14979 , 1467058239  
19167 , 1460352897  
19497 , 1549836027  
19839 , 1862703549  
20247 , 1502367894  
20499 , 2037641598  
21657 , 1637529084  
21864 , 1023497568  
22185 , 1289436570  
22227 , 1605278394  
22329 , 2061457938  
25299 , 2510976348  
25755 , 1435892760  
26325 , 1378429650  
28344 , 1257963408  
28665 , 1624789530
```

Si multiplicas cualquier número de la primera columna por su simétrico, obtendrás el pandigital de la segunda.

Otros ejemplos sin desarrollar

Un número multiplicado por su doble:

22887	,	1047629538
23124	,	1069438752
24957	,	1245703698
25941	,	1345870962
26409	,	1394870562
26733	,	1429306578
27276	,	1487960352
29685	,	1762398450
31389	,	1970538642
35367	,	2501649378
39036	,	3047618592

Por ejemplo. $22887 \cdot 45774 = 1047629538$

Cuadrado de N menos N

38628	,	1492083756
40509	,	1640938572
43066	,	1854637290
44028	,	1938420756
44577	,	1987064352
46566	,	2168345790
48736	,	2375148960
51715	,	2674389510
54270	,	2945178630
54460	,	2965837140
55152	,	3041687952

Así, $44028^2 - 44028 = 1938420756$

Todos terminarán en 0, 2 o 6.

Y hasta aquí llega el tema. Quedan muchas posibilidades, e incluso eligiendo las primeras cifras de un número real, pero aquí sólo se estudian los enteros.

LA SUMA DE POTENCIAS DE CIFRAS ES OTRA POTENCIA

En mi blog se han desarrollado muchas curiosidades similares, y ahora deseo estudiar en qué números se cumple que una suma de potencias de sus cifras se convierte en otra potencia. Por ejemplo, en el 34, $3^2+4^2=5^2$, porque es una terna pitagórica, o en 123 se cumple que $1^3+2^3+3^3=6^2$

Para jugar un poco con esta cuestión necesitamos dos funciones, que son SUMACIFRAS, que nos suma potencias de cifras, y ESPOTENCIA, que determine si un número es potencia entera o no. La primera, en su versión completa con exponentes, la puedes encontrar desarrollada en mi blog, por ejemplo, en

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/01/un-numero-y-sus-cifras-1-niven.html>.

Posee dos parámetros, el número a descomponer en cifras y el exponente.

La función ESPOTENCIA admite variantes, pero su última versión es algo complicada de desarrollar. Está presentada en la entrada

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/11/un-numero-como-diferencia-entre.html>

Si no te apetece entrar en esas explicaciones en VBASIC, con el lenguaje PARI quedan muy simples:

sumacifras(n,k)=sum(i=1, #n=digits(n), n[i]^k)

espotencia(n)=ispower(n)

Función *espotsumcifraspot\$(n,tope)*

Uniremos las dos funciones en una sola, para determinar qué números cumplen la propiedad pedida. Le indicaremos el número y el tope máximo de búsqueda con exponentes, porque los resultados pueden tener una magnitud tan grande que no sean exactos en VBASIC. Por cada solución que se obtenga aparecerán también los números anagramáticos con ella. Por ejemplo, si 115 es solución ($1^2+1^2+5^2=3^3$), también lo serán 151 y 511.

Public Function espotsumcifraspot\$(n,tope)

Dim s, l,e

Dim ss\$

ss = ""

For i = 2 To tope ‘Se prueba con varios exponentes de cifras

s = sumacifras(n, i)‘Sumacifras con un exponente

e= espotencia(s)

If e > 1 Then ss = ss + " E1: " + Str\$(i)+ " E2: "+str\$(e)

‘Si la suma es potencia, tenemos solución nueva, E1 exponente de las cifras y E2 el de la suma

```
Next i  
If ss = "" Then ss = "NO"  
espotsumcifraspot = ss  
End Function
```

Hay que advertir que el valor de E2 no es único, porque, por ejemplo, el número 64 es cuadrado, cubo y sexta potencia. La función te da un valor, para afirmar que es potencia, pero no tiene que coincidir con el esperado.

Otra advertencia es que la existencia de cifras nulas puede también producir resultados no esperados. Si se quiere matizar más se puede añadir la condición de que no existan ceros en su representación en base 10. Esta sencilla función devuelve VERDADERO si no existen cifras nulas:

```
Function sinceros(n) As Boolean  
Dim h, i, m  
Dim sin As Boolean  
h = n  
sin = True  
While h > 9 And sin  
i = Int(h / 10)  
m = h - i * 10  
If m = 0 Then sin = False  
h = i  
Wend
```

***If h = 0 Then sinceros = False Else sinceros = sin
End Function***

Es optativo añadirle esa condición al principio de la función. Con la función PRODUCIFRAS basta con exigir que el producto no sea nulo.

La puedes encontrar en

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/permutacion-de-cifras-al-sumar-su.html>

Así lo haremos en PARI:

sinceros(n)=vecprod(digits(n))<>0

Números con la propiedad esperada

Con la advertencia de que puede faltar alguno por la existencia de un tope, la siguiente tabla contiene los primeros números sin cifras nulas que cumplen la propiedad. Llamen la atención los resultados de 22, 44 y 88, que no caben en la imagen (algo fácil de razonar con potencias de 2), y el hecho ya explicado, de que aparecerán como solución todos los números anagramáticos con la primera, como 21 con 12 o 132 con 123.

Número	Exponentes
12	E1: 3 E2: 2
21	E1: 3 E2: 2
22	E1: 2 E2: 3 E1: 3 E2: 4 E1: 4 E2:
34	E1: 2 E2: 2
36	E1: 3 E2: 5
43	E1: 2 E2: 2
44	E1: 2 E2: 5 E1: 3 E2: 7 E1: 4 E2:
48	E1: 3 E2: 2
63	E1: 3 E2: 5
68	E1: 2 E2: 2
84	E1: 3 E2: 2
86	E1: 2 E2: 2
88	E1: 2 E2: 7 E1: 3 E2: 10 E1: 4 E2:
115	E1: 2 E2: 3
122	E1: 2 E2: 2
123	E1: 3 E2: 2
126	E1: 3 E2: 2
132	E1: 3 E2: 2
148	E1: 2 E2: 4
151	E1: 2 E2: 3

La tabla está confeccionada con tope 10 para los exponentes, pero si uso el 20 aparecen resultados falsos. Ya se sabe lo que se debe hacer: pasar a PARI. Se puede usar este código:

```
sumacifras(n,k)=sum(i=1, #n=digits(n), n[i]^k)
producifras(n)=vecprod(digits(n))
espotsumcifraspot(n,tope)=my(ss=List(),i,e,s,p=producifras(n));for(i=2,tope,s=sumacifras(n,i);e=ispower(s);if(e>1&&p>0,listput(ss,"E1:");listput(ss,i);listput(ss,"E2: ");listput(ss,e));ss
for(i=11,135,s=espotsumcifraspot(i,30);if(#s<>0,print(1(i," "))))
```

Si aumento el tope a 30 coinciden los resultados, luego puedo confiar en que estos sean válidos:

12, 21, 22, 34, 36, 43, 44, 48, 63, 68, 84, 86, 88, 115,
122, 123, 126, 132,

Aumentando el rango:

12, 21, 22, 34, 36, 43, 44, 48, 63, 68, 84, 86, 88, 115,
122, 123, 126, 132, 148, 151, 162, 168, 184, 186, 212,
213, 216, 221, 231, 236, 244, 261, 263, 269, 296, 312,
321, 326, 333, 345, 354, 355, 362, 366, 418, 424, 435,
442, 447, 453, 474, 481, 488, 511, 534, 535, 543, 553,
568, 586, 612, 618, 621, 623, 629, 632, 636, 658, 663,
667, 676, 681, 685, 692, 744, 766, 814, 816, 841, 848,
856, 861, 865, 884, 926, 962, 999, ...

Observamos que presentan una frecuencia alta de aparición, en parte por la existencia de anagramáticos. Por eso se puede plantear un filtro según el exponente usado en las cifras. Cambiando la variable que devuelve la función es posible realizar ese filtro. Para eso he modificado ligeramente el código. Por ejemplo, con resultado cubo aparecen:

115, 151, 345, 354, 355, 435, 453, 511, 534, 535, 543,
553, 568, 586, 658, 685, 856, 865, 1134, 1143, 1156,
1165, 1314, 1341, 1413, 1431, 1516, 1561, 1615, 1651,
2234, 2243, 2324, 2342, 2423, 2432, 2667, 2676, 2766,
3114, 3141, 3224, 3242, 3411, 3422, 3468, 3486, 3648,
...

Por ejemplo, 3648 es solución porque $3^2+6^2+4^2+8^2=5^3$

Los he comprobado con dos procedimientos.

También podemos buscar exponentes de las cifras. Por ejemplo, buscamos los que sean mayores o iguales que 5, y conseguimos el listado:

22, 44, 88, 333, 999, 1111, 1224, 1242, 1339, 1393, 1422, 1933, 2124, 2142, 2214, 2222, 2241, 2412, 2421, 2448, 2484, 2844, 3139, 3193, 3319, 3333, 3391, 3913, 3931, 4122, 4212, 4221, 4248, 4284, 4428, 4444, 4482, 4669, 4696, 4824, 4842, 4966, 5555, 6469, 6496, 6649, 6666, 6694, 6946, 6964, 7777, 8244, 8424, 8442, 8888, 9133, 9313, 9331, 9466, 9646, 9664, 9999, ...

Nos encontramos con soluciones especiales por la repetición de cifras. Por ejemplo, 3913: $3^5+9^5+1^5+3^5=244^2$

También podemos fijar qué exponentes deseamos, siempre que adaptemos el código. Por ejemplo, con exponentes 3 y 3 y con cifras crecientes tenemos estos dos casos:

345: Es un resultado clásico: $3^3+4^3+5^3=6^3$

1156: $1^3+1^3+5^3+6^3=7^3$

Con exponentes con bastante diferencia:

Con cifras elevadas a 7, el número 57888 y sus anagramáticos cumple:

$$5^7+7^7+8^7+8^7+8^7=2682^2$$

Tenemos las herramientas para seguir investigando, pero vendrían bien unos equipos más potentes para llegar a siete u ocho cifras.

SOLUCIÓN ÚNICA

En mis cálculos diarios y búsquedas en mi blog no ha sido frecuente encontrar solución única a algunas de las cuestiones. En general, aparecen varias o ninguna, pero pocas veces una sola solución. Un ejemplo que busco a diario es el de descomponer un número como suma de un primo y un cuadrado distinto de cero. Normalmente aparecen tantas soluciones que no caben en pantalla, y sólo en contados casos, obtengo tres o cuatro nada más. Son números de cuatro a seis cifras, y era esperable esa cantidad. Sin embargo, con números menores se obtienen frecuentemente soluciones únicas.

Suma de cuadrado y primo

Estos son algunos ejemplos de solución única con cuadrados y primos:

$$19=4^2+3, \quad 22=3^2+13, \quad 24=1^2+23, \quad 26=3^2+17, \\ 29=4^2+13, \quad 36=5^2+11$$

¿Hasta dónde llegará esa posibilidad? Lo iré viendo en algunos casos. Normalmente van escaseando las soluciones de una búsqueda, y, a veces, los autores terminan con una conjetura: “Para números mayores que 10^{17} no se observan soluciones...”. Se queda ahí la cuestión hasta que alguien pueda demostrarlo. Eso haré aquí si es necesario.

He comenzado con hoja de cálculo, y hasta el 70000 aparecen soluciones únicas con una frecuencia mínima, pero apreciable. Estos son los casos entre 50000 y 70000:

	Buscador	
Número	Exponentes	
50625	$1 = 224^2 + 449$	
52441	$1 = 228^2 + 457$	
53361	$1 = 230^2 + 461$	
53824	$1 = 231^2 + 463$	
54756	$1 = 233^2 + 467$	
57600	$1 = 239^2 + 479$	
59536	$1 = 243^2 + 487$	
60516	$1 = 245^2 + 491$	
62500	$1 = 249^2 + 499$	
63504	$1 = 251^2 + 503$	
65025	$1 = 254^2 + 509$	
68121	$1 = 260^2 + 521$	
68644	$1 = 261^2 + 523$	

A partir de aquí, deberé ensayar con PARI, que, como ya es sabido, maneja mejor los números grandes. He construido este código:

```
primomascuad(n)=my(s=List(),m=0,r=sqrt(n),p);for(i  
=1,r,p=n-  
i^2;if(isprime(p),m+=1;listput(s,i);listput(s,p)));s  
for(i=50000,70000,s=primomascuad(i);if(#s==2,print(  
i," ",s)))
```

La primera parte imita una función antigua que poseo para hoja de cálculo. Recorre todos los cuadrados menores que el número y busca aquellas diferencias que sean número primo. Las que lo son se incorporan a una lista, formada por cada base de cuadrado y cada primo. En la última línea, la igualdad **#s==2**, admite sólo aquellas listas con una sola solución (dos números). En el rango 50000 a 70000 coincide con VBASIC, en otro formato de presentación:

```
50625, List([224, 449])  
52441, List([228, 457])  
53361, List([230, 461])  
53824, List([231, 463])  
54756, List([233, 467])  
57600, List([239, 479])  
59536, List([243, 487])  
60516, List([245, 491])  
62500, List([249, 499])  
63504, List([251, 503])  
65025, List([254, 509])  
68121, List([260, 521])  
68644, List([261, 523])
```

Es de esperar que en rangos mayores vayan escaseando las soluciones, pero me ha sorprendido que no parecen desaparecer.

Del 10000 al 20000 aparecen 28, y llama la atención $10000=99^2+199$.

En los siguientes rangos del mismo tamaño van disminuyendo las frecuencias a 9, 12, 9, 7, 6, 5, 6, 7, 6, 4, 3, 3, 5, 2, 4, 3, 4, 4, ... hasta llegar al 200000-210000 en el que aparecen 2.

Estoy acostumbrado a estos resultados, similares a los de los “sucesos raros” en Estadística, y puede ocurrir que llegemos a intervalos con ningún resultado. Por ejemplo, en el rango 2000000-2100000, que es diez veces más amplio, obtenemos 9.

Si alguien tiene más paciencia que yo, es posible que llegue a una potencia de 10 en la que ya no aparezcan casos. Siempre será una conjetura lo que descubra.

Suma de cuadrado y capicúa

También esta búsqueda la emprendo casi a diario. Suele proporcionarme de dos a cuatro soluciones, y sería interesante encontrar números con solución única. Basta leer mi entrada

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/10/suma-de-cuadrado-y-capicua.html> para entender que deberemos fijar en 1 el número de soluciones. En la tabla que he

elaborado he suprimido los capicúas de una sola cifra, porque restan interés a la búsqueda, por su abundancia. Contiene los primeros números con esta propiedad a partir del 2000:

Suma de cuadrado y capicúa de al menos dos cifras	
Número	Solución única
2008	1: $=33^2+919$
2009	1: $=38^2+565$
2010	1: $=43^2+161$
2012	1: $=35^2+787$
2017	1: $=24^2+1441$
2019	1: $=38^2+575$
2020	1: $=43^2+171$
2028	1: $=33^2+939$
2029	1: $=38^2+585$
2030	1: $=43^2+181$
2037	1: $=44^2+101$
2039	1: $=38^2+595$
2045	1: $=37^2+676$

Suma de dos simétricos

Este es un ejemplo similar a los anteriores, en el que no hay una teoría que nos respalde, y es inevitable acudir a la búsqueda. En mi blog hemos usado la función CIFRAINVER, que devuelve el simétrico de un número (ver, por ejemplo,

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2022/04/relaciones-entre-numeros-con-cifras.html>)

Para que la búsqueda no esté contaminada por ejemplos triviales, se exigirá que el número no sea múltiplo de 10, para evitar que el simétrico pierda una cifra. También deberá ser el primer sumando mayor que el segundo, y

así evitar que una suma aparezca dos veces. Son condiciones que no son necesarias, pero pulen un poco los resultados.

Usaré esta función:

Function dossimetricos\$(n)

Dim i, m

Dim s\$

s = ""

m = 0 'Contenedor s y contador m

For i = 1 To n

p = cifrainver(i)

If i + p = n And i > p And i Mod 10 <> 0 Then m = m +

1: s = s + " = " + ajusta(i) + "+" + ajusta(cifrainver(i))

'Hay solución

Next i

If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + ": " + s

dossimetricos = s

End Function

Al comenzar la salida de la función con el número de soluciones, es fácil identificar los números que poseen una. Para mi uso diario basta con este código, pero en esta búsqueda, para que sea interesante, desecharé las soluciones en las que ambos sumandos simétricos sean iguales.

Los primeros que aparecen con estas condiciones son:

Número	Suma única
33	1: = 21+12
44	1: = 31+13
176	1: = 97+79
187	1: = 98+89
303	1: = 201+102
323	1: = 211+112
343	1: = 221+122
363	1: = 231+132
383	1: = 241+142
403	1: = 251+152
404	1: = 301+103
423	1: = 261+162
424	1: = 311+113
443	1: = 271+172
444	1: = 321+123
463	1: = 281+182
464	1: = 331+133

Observamos que presentan una frecuencia apreciable.

Resultados ciertos

En los anteriores ejemplos, la aparición de números con una sola descomposición se dejó en simple posibilidad para rangos de un número grande en adelante. En otros ejemplos se tiene la certeza de los números que presentan un solo resultado. Repaso brevemente algunos estudiados ya.

Primos del tipo $4k+1$

Son los llamados también primos pitagóricos. Se estudiaron aquí

(ver

[https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/11/primos-](https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/11/primos-pitagoricos.html)

[pitagoricos.html](https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/11/primos-pitagoricos.html)) y se explicó que sólo admiten una descomposición en una suma de cuadrados. Por ejemplo, 12037 es primo de este tipo, y sólo admite la descomposición $12037=74^2+81^2$

Una sola ocasión de ser hipotenusa

Estudiamos este tema en la entrada

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/10/en-cuantas-ternas-pitagoricas-1.html>

Según lo visto en ella, los números que contengan un solo factor primo del tipo $4k+1$ y el resto (salvo el 2, que no influye) elevados a una potencia par, son los únicos que podrán ser hipotenusas en una terna pitagórica. Como en la terna figura al cuadrado, la condición de exponente par no influye. Así nos queda como condición que exista solo un factor del tipo $4k+1$.

En la tabla siguiente figuran soluciones a partir de 1200 y se puede comprobar que solo presentan un factor del tipo $4k+1$ elevado a 1:

Número	Única terna	Factores primos
1201	$1:: =49^2+1200^2$	[1201, 1]
1202	$1:: =480^2+1102^2$	[2, 1][601, 1]
1203	$1:: =120^2+1197^2$	[3, 1][401, 1]
1207	$1:: =568^2+1065^2$	[17, 1][71, 1]
1209	$1:: =465^2+1116^2$	[3, 1][13, 1][31, 1]
1210	$1:: =726^2+968^2$	[2, 1][5, 1][11, 2]
1211	$1:: =364^2+1155^2$	[7, 1][173, 1]
1212	$1:: =240^2+1188^2$	[2, 2][3, 1][101, 1]
1213	$1:: =245^2+1188^2$	[1213, 1]
1215	$1:: =729^2+972^2$	[3, 5][5, 1]
1217	$1:: =705^2+992^2$	[1217, 1]
1218	$1:: =840^2+882^2$	[2, 1][3, 1][7, 1][29, 1]
1219	$1:: =644^2+1035^2$	[23, 1][53, 1]
1221	$1:: =396^2+1155^2$	[3, 1][11, 1][37, 1]
1222	$1:: =470^2+1128^2$	[2, 1][13, 1][47, 1]
1224	$1:: =576^2+1080^2$	[2, 3][3, 2][17, 1]
1226	$1:: =70^2+1224^2$	[2, 1][613, 1]
1227	$1:: =360^2+1173^2$	[3, 1][409, 1]

Una sola ocasión de ser cateto

Esta cuestión también puede producir resultados seguros, sin conjeturas para números grandes. Puedes leer mis entradas

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2025/10/en-cuantas-ternas-pitagoricas-2.html>

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/01/numero-de-descomposiciones-en.html>

En ellas se explica que todo depende de las formas de descomponer N^2 en productos de la misma paridad. Remito a ellas. Un caso particular es el de los primos impares. En la tabla siguiente observamos las soluciones en el mismo rango del párrafo anterior:

Número	Única terna	Factores primos
1201	1:: =721201 ² -721200 ²	[1201,1]
1202	1:: =361202 ² -361200 ²	[2,1][601,1]
1213	1:: =735685 ² -735684 ²	[1213,1]
1214	1:: =368450 ² -368448 ²	[2,1][607,1]
1217	1:: =740545 ² -740544 ²	[1217,1]
1223	1:: =747865 ² -747864 ²	[1223,1]
1226	1:: =375770 ² -375768 ²	[2,1][613,1]
1229	1:: =755221 ² -755220 ²	[1229,1]
1231	1:: =757681 ² -757680 ²	[1231,1]
1234	1:: =380690 ² -380688 ²	[2,1][617,1]
1237	1:: =765085 ² -765084 ²	[1237,1]
1238	1:: =383162 ² -383160 ²	[2,1][619,1]
1249	1:: =780001 ² -780000 ²	[1249,1]
1259	1:: =792541 ² -792540 ²	[1259,1]
1262	1:: =398162 ² -398160 ²	[2,1][631,1]
1277	1:: =815365 ² -815364 ²	[1277,1]
1279	1:: =817921 ² -817920 ²	[1279,1]

Resultan primos y semiprimos con el factor 2, pero lo que nos interesa es que existe un procedimiento seguro. Siempre es preferible a la necesidad de acudir a una búsqueda.

ENTRE CURIOSIDAD Y TEORÍA

EN CUANTAS TERNAS PITAGÓRICAS

No todos los números naturales pueden ser hipotenusas o catetos en una terna pitagórica. Por ejemplo, el 23 no es ni uno ni otro. Otros números pertenecen a varias ternas distintas, como ocurre, por ejemplo, con el número 27925, que es hipotenusa en siete ternas y cateto en una:

Como hipotenusa:

$$27925^2 = 2004^2 + 27853^2 = 5875^2 + 27300^2 = 7819^2 + 26808^2 = 11680^2 + 25365^2 = 13284^2 + 24563^2 = 16755^2 + 22340^2 = 18315^2 + 21080^2$$

Como cateto: $27925^2 = 72605^2 - 67020^2$

¿De qué depende esto?

Lo veremos por separado, ya que necesitamos teorías distintas.

Un número como hipotenusa

Estudio teórico

En entradas publicadas en mi blog se ha estudiado bien la descomposición de un número en suma de cuadrados. Recientemente he encontrado un documento que lo explica claramente:

<https://www.math.purdue.edu/~jlipman/MA598/sums-of-two-squares.pdf>

En nuestro caso, el número a descomponer es el cuadrado de la hipotenusa, por lo que se le puede aplicar tres criterios contenidos en el mismo. Si descomponemos N en sus factores primos resultará:

El factor 2 no influye en el número de cuadrados y se puede ignorar. La razón, según se explica en el documento, es la igualdad

$$(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$$

La primera suma es par, luego los dos cuadrados tienen la misma paridad, lo que justifica que se puedan expresar como suma y diferencia de dos números naturales. Según el segundo miembro, su mitad también será una suma de cuadrados. Así que podemos dividir el número a estudiar entre 2 todas las veces que deseemos, porque el número de sumas de cuadrados no cambiará.

Los factores primos del tipo $4k+3$, que suelen impedir la descomposición en dos cuadrados, figurarán todos con exponentes pares, por ser un cuadrado, por lo que, según la teoría, tampoco impiden la descomposición, y tampoco aportan nuevas soluciones. Se pueden ignorar.

Los factores del tipo $4K+1$ son los que facilitan la descomposición en suma de dos cuadrados, y según el documento citado (siguiendo a Gauss) producirán un número de resultados dado por la fórmula

$$S(n) = \begin{cases} 1/2(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1) & \text{if } n \text{ is not a square,} \\ 1/2[(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1) - 1] & \text{if } n \text{ is a square.} \end{cases}$$

(La imagen es un recorte del documento)

Nos interesa el caso inferior, aplicable a cuadrados. En la fórmula, e_r es el exponente de un factor primo del tipo $4K+1$, únicos que nos interesan.

Sólo serán hipotenusas de ternas pitagóricas los números que contengan factores del tipo $4k+1$.

El número de ternas de las que puede ser hipotenusa un número dado sólo depende de la signatura prima (conjunto de exponentes) y no de los números primos presentes (si son del tipo $4K+1$)

Lo aplicamos al ejemplo 27925. Su descomposición factorial es $5^2 \cdot 11 \cdot 17$. Ambos primos son del tipo $4K+1$, luego nos interesan los exponentes de su cuadrado, que serían 4 y 2 respectivamente. Luego, por la fórmula de la imagen de más arriba:

$$S(n) = ((4+1)(2+1)-1)/2 = 14/2 = 7$$

Ese fue el número de sumas de dos cuadrados (y por tanto ternas pitagóricas) que figuran al principio de este estudio.

Probaremos con otro ejemplo: $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

En su cuadrado no influirán los factores 2, 3 ni 11 (el 2 y los del tipo $4K+3$), luego sólo usaremos los exponentes del cuadrado de 5, es decir:

$$S(1980) = ((2+1)-1)/2 = 1$$

En efecto, usando una función que se presentará más adelante se obtiene el resultado

$$1:: = 1188^2 + 1584^2$$

Obtención de las sumas de cuadrados

La siguiente función en VBasic resuelve la búsqueda de esas sumas. En ella se va formando un cuadrado como suma de impares, la variable **k**.

Function espitag(n) As String

Dim k, p, d, m

Dim s\$

s = "" 'Contenedor de soluciones

m = 0 'Contador de sumas

k = 1: p = 3 'Inicio de los cuadrados mediante suma de impares

While k < n * n / 2 'Probamos el primer cuadrado de la suma

d = n * n - k 'Posible segundo cuadrado

If escuad(d) Then 'Nueva solución para la suma de cuadrados

m = m + 1

s = s + "=" + ajusta(Sqr(k)) + "^2+" + ajusta(Sqr(d)) + "^2"

End If

$k = k + p$; $p = p + 2$ 'Siguiente cuadrado

Wend

espitag = ajusta(m) + " :: " + s

End Function

Esta función te devuelve el listado de soluciones. Lo vemos con un ejemplo:

$$1950 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$$

Si le aplicamos la función nos devuelve

$$\begin{aligned} S(1950) &= 7 :: 216^2 + 1938^2 = 480^2 + 1890^2 = 546^2 + 1872^2 \\ &= 750^2 + 1800^2 = 990^2 + 1680^2 = 1170^2 + 1560^2 = 1224^2 + 1518^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \end{aligned}$$

Son siete sumas de cuadrados. Según la teoría, la justificación es el cálculo $S(1950) = ((4+1)(2+1)-1)/2 = 14/2 = 7$

Hemos ignorado el 2 y el 3, y usado los exponentes del cuadrado de 5^2 y 13.

La ventaja de la función es que nos da el número de sumas y el listado de las mismas.

¿Qué números pueden resultar al contar ternas?

Según lo visto, cualquier número natural puede ser el resultado de contar ternas. Esto es así por la forma de calcularlo.

$$1/2[(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1) - 1]$$

Sea un número cualquiera K. Si lo multiplicamos por 2 y añadimos 1, nos resultará un número impar, que se podrá igualar al producto de paréntesis de la fórmula empleada. Como trabajamos con exponentes, bastará usar bases del tipo $4K+1$. Lo vemos con un ejemplo:

¿Qué números producirán trece ternas distintas?

Multiplicamos 13 por 2 y añadimos 1, con lo que obtenemos 27, que se puede descomponer en $3*3*3$. Esos factores provienen de exponentes del cuadrado (que serían 2), por lo que basta multiplicar tres números primos del tipo $4K+1$, por ejemplo, $5*13*17=1105$. Le aplicamos la función y queda:

$S(1105) 13::$

$$\begin{aligned} &=47^2+1104^2=105^2+1100^2=169^2+1092^2=264^2+ \\ &1073^2=272^2+1071^2=425^2+1020^2=468^2+1001^2 \\ &=520^2+975^2=561^2+952^2=576^2+943^2=663^2+88 \\ &4^2=700^2+855^2=744^2+817^2 \end{aligned}$$

Otro ejemplo: ¿Cuándo resultarán ocho ternas?:

$8*2+1=17$, que es primo, luego la única posibilidad es que se trate de la potencia octava de un primo del tipo $4K+1$. Usamos la más pequeña, $5^8=390625$, con el resultado de ocho ternas:

$S(390625) 8::$

$$\begin{aligned} &=29625^2+389500^2=80620^2+382215^2=109375^2+3 \\ &75000^2=137500^2+365625^2=164833^2+354144^2=2 \\ &10000^2+329375^2=234375^2+312500^2=257400^2+2 \\ &93825^2 \end{aligned}$$

Primos del tipo $4K+1$

Un caso especial lo constituyen los números que son primos del tipo $4K+1$, también llamados primos pitagóricos. Como son muy interesantes, les dedicaré un estudio especial cuando se termine el tema actual.

Catetos de una terna

En el apartado anterior se discutió la posibilidad de que un número fuera hipotenusa de varias ternas pitagóricas. Continuará aquí el tema calculando de cuantas ternas puede ser cateto un número dado N .

Se tratará de buscar soluciones a la ecuación

$$N^2 = a^2 - b^2$$

Estamos suponiendo implícitamente que a es mayor que b , luego podemos descomponer la diferencia de cuadrados de esta forma, llamando $a = b + k$

$$N^2 = (a+b)(a-b) = (b+k+b)(b+k-b) = k(2b+k)$$

Esto nos lleva a que la diferencia k entre a y b ha de ser divisor de N^2 , al igual que $2b+k$. Es claro que

$$N^2 = k(2b+k) > k^2, \text{ luego } k < N$$

Estas consideraciones nos llevan a un protocolo para encontrar ternas con un cateto dado N .

Recorremos todos los divisores de N , sean K .

Para cada K estudiamos $N^2/K-K$, que ha de ser un número par positivo. Su mitad será el número b, el otro cateto. La hipotenusa se calculará como $b+K$.

Este procedimiento lo plasma la siguiente función para VBasic:

Function escateto\$(n)

Dim s\$

Dim k, b, m, a, nn

s = "" 'Contenedor de soluciones

m = 0 'Número de soluciones

nn = n * n' Cuadrado de n

For k = 1 To n

If nn / k = nn \ k Then 'Es un divisor del cuadrado

b = (nn / k - k) / 2 'Posible valor del otro cateto

If b > 0 And b = Int(b + 0.000001) Then 'Solución válida

m = m + 1'Aumenta el contador

a = b + k 'Hipotenusa

s = s + "+" + ajusta(a) + "^2-" + ajusta(b) + "^2" + " "
'Se incorpora la solución

End If

End If

Next k

s = ajusta(m) + ":: " + s 'Toma nota del número de soluciones

escateto = s

End Function

Esta función es razonablemente rápida, y eso que pueden aparecer más de 20 soluciones frecuentemente.

Un ejemplo: ¿De cuántas ternas pitagóricas es cateto el número 812?

Resultan trece ternas con cateto 812:

$$\begin{aligned} &13:: +164837^2-164835^2 +82420^2-82416^2 \\ &+41213^2-41205^2 +23555^2-23541^2 +11788^2- \\ &11760^2 +5915^2-5859^2 +5713^2-5655^2 +3413^2- \\ &3315^2 +2900^2-2784^2 +1780^2-1584^2 +1537^2- \\ &1305^2 +1037^2-645^2 +1015^2-609^2 \end{aligned}$$

Se puede comprobar alguna, y la diferencia de cuadrados deberá ser 659344, el cuadrado de 812.

Es evidente que el posible cateto deberá ser un número tal que su cuadrado sea compuesto y que sea producto de un par de divisores de la misma paridad, como veremos más adelante. Esta condición la cumplen todos los números enteros positivos. Por esa razón todos pueden ser catetos.

En esta captura de pantalla de un rango elegido al azar se observa que todos los números naturales pueden ser catetos, pero que los números primos sólo lo son una vez:

2198	4::	+1207802^2-1207800^2 +:
2199	4::	+2417801^2-2417800^2 +:
2200	37::	+1210001^2-1209999^2 ·
2201	4::	+2422201^2-2422200^2 +:
2202	4::	+1212202^2-1212200^2 +:
2203	1::	+2426605^2-2426604^2
2204	13::	+1214405^2-1214403^2 ·
2205	37::	+2431013^2-2431012^2 ·
2206	1::	+1216610^2-1216608^2
2207	1::	+2435425^2-2435424^2
2208	40::	+1218817^2-1218815^2 ·

Llaman la atención las 40 soluciones de 2208.

Otro procedimiento

El protocolo elegido es el más rápido, pero se puede usar un argumento sencillo y popular para encontrar las soluciones.

La idea es muy simple:

Si $N^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, los paréntesis han de ser de la misma paridad, llamémosles **m** y **n** respectivamente, ya que $a = (m+n)/2$ y $b = (m-n)/2$, y ambos han de ser enteros. Entonces la búsqueda de soluciones se reduce a encontrar productos de dos factores, ambos pares o ambos impares, con resultado N^2 .

Esta idea daría lugar a otra función parecida a la anterior:

Function escateto2\$(n)

Dim s\$

Dim k, b, m, a, nn, kk

s = ""

m = 0

nn = n * n

For k = 1 To nn

If nn / k = nn \ k Then

kk = nn / k

**If k > kk And (k - kk) Mod 2 = 0 Then 'Aquí se exige
misma paridad**

a = (k + kk) / 2: b = (k - kk) / 2

m = m + 1

s = s + "+" + ajusta(a) + "^2-" + ajusta(b) + "^2" + " "

End If

End If

Next k

s = ajusta(m) + ":: " + s

escateto2 = s

End Function

Probamos la función con el anterior ejemplo, 812:

13:: +1015²-609² +1037²-645² +1537²-1305²
+1780²-1584² +2900²-2784² +3413²-3315²
+5713²-5655² +5915²-5859² +11788²-11760²
+23555²-23541² +41213²-41205² +82420²-
82416² +164837²-164835²

Obtenemos los mismos trece resultados.

Casos particulares

Primos impares

Los números primos impares presentarán siempre un resultado, pues, si llamamos p al primo, su cuadrado p^2 tendrá tres divisores, 1 , p y p^2 , con lo que el único par a , b con $a > b$ y de la misma paridad será 1 y p^2 . Las soluciones serán, pues, $a = (p^2 + 1)/2$ y $b = (p^2 - 1)/2$. En la siguiente imagen se observa esto en un pequeño rango de primos:

13	1::	+85 ² -84 ²
17	1::	+145 ² -144 ²
19	1::	+181 ² -180 ²
23	1::	+265 ² -264 ²
29	1::	+421 ² -420 ²
31	1::	+481 ² -480 ²

Semiprimos impares no cuadrados

Los números de este tipo son producto de dos primos impares distintos, p_1 y p_2 . Sus divisores serán 1 , p_1 , p_2 y p_1p_2 . Los divisores de su cuadrado serán 1 , p_1 , p_2 , p_1p_2 , p_1^2 , p_2^2 , $p_1p_2^2$, $p_2p_1^2$, $p_1^2p_2^2$, nueve divisores, que dan lugar a cuatro pares de productos con factores distintos de igual paridad. Por ejemplo, 15 y 35 se descomponen así:

$$15 \ 4:: \ +113^2-112^2 \ +39^2-36^2 \ +25^2-20^2 \ +17^2-8^2$$

$$35 \ 4:: +613^2-612^2 +125^2-120^2 +91^2-84^2 +37^2-12^2$$

Dejo como ejercicio sencillo razonar que los semiprimos no cuadrados pares presentan una descomposición:

$$14 \ 1:: +50^2-48^2$$

$$26 \ 1:: +170^2-168^2$$

Los semiprimos cuadrados se descomponen de una forma el 4 y de dos los impares.

$$4 \ 1:: +5^2-3^2$$

$$49 \ 2:: +1201^2-1200^2 +175^2-168^2$$

$$169 \ 2:: +14281^2-14280^2 +1105^2-1092^2$$

Las potencias de un primo tienen tantas descomposiciones como indique su exponente:

$$3 \ 1:: +5^2-4^2$$

$$9 \ 2:: +41^2-40^2 +15^2-12^2$$

$$27 \ 3:: +365^2-364^2 +123^2-120^2 +45^2-36^2$$

$$81 \ 4:: +3281^2-3280^2 +1095^2-1092^2 +369^2-360^2 +135^2-108^2$$

$$2435:: +29525^2-29524^2 +9843^2-9840^2 +3285^2-3276^2 +1107^2-1080^2 +405^2-324^2$$

Hay que recordar que se debe razonar sobre el cuadrado del número propuesto.

Esta función de número de descomposiciones no es multiplicativa, por lo que no es útil descomponer N en factores y contar uno por uno para luego multiplicar.

Un ejemplo:

$$4 \ 1:: +5^2-3^2$$

$$9 \ 2:: +41^2-40^2 +15^2-12^2$$

$$36 \ 7:: +325^2-323^2 +164^2-160^2 +111^2-105^2 \\ +85^2-77^2 +60^2-48^2 +45^2-27^2 +39^2-15^2$$

Dejo aquí los casos particulares

Fórmula general

Lo que sigue es una adaptación de mi estudio contenido en <https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/01/numero-de-descomposiciones-en.html>

En él se explican todos los casos de descomposición en diferencia de cuadrados, pero al no ser hipotenusa y cateto, se admite el caso en el que $b=0$. Bastará restar una unidad a la fórmula general para cuadrados, o, preferiblemente, corregir la función que se propone, restando 1 al final. Se copia a continuación:

Public Function numcatetos(n)

Dim p, q, r, s, t, nm

q = n * n: p = 0

While q Mod 2 = 0: q = q / 2: p = p + 1: Wend
'Extraemos la potencia de 2

***If p = 1 Then nm = 0: Exit Function 'Caso imposible
 'q es la parte impar
 If q = 1 And p > 1 Then nm = Int((p - 1) / 2) + (p - 1)
 Mod 2
 'Es potencia de 2 pura
 If p = 0 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): nm = Int(t / 2)
 + t Mod 2
 'Es un número impar
 If p > 1 And q > 1 Then t = fsigma(q, 0): nm = t * Int((p
 - 1) / 2) + ((p - 1) Mod 2) * (Int(t / 2) + t Mod 2)
 numcatetos = nm - 1
 'Tiene parte par y parte impar
 End Function***

Con esta función doy por terminado el tema del número de ternas pitagóricas que produce un número dado, tanto como hipotenusa como siendo un cateto.

PRIMOS PITAGÓRICOS

Después de dos estudios publicados sobre ternas pitagóricas, es útil completarlas con las hipotenusas más simples, que son los primos pitagóricos, es decir, los del tipo $4K+1$. Estos primos se caracterizan por poder ser expresados mediante una suma de dos cuadrados de forma única. Este tema ha aparecido tanto en mis publicaciones que lo doy por sabido.

Por ejemplo, $13=4*3+1=2^2+3^2$

Relacionando estos números con el estudio reciente sobre el número de ternas pitagóricas de las que un número es hipotenusa, podemos afirmar que estos primos sólo pueden ser hipotenusa de una sola terna. Así, el ejemplo del 13 se traduce en la terna única $13^2=12^2+5^2$.

Los primeros primos pitagóricos están publicados en <https://oeis.org/A002144>, y son sencillos de identificar. La terna que producen es siempre primitiva, pues su carácter de primos impide su simplificación.

Según lo aprendido anteriormente, sus potencias serán hipotenusas de tantas ternas como indique su exponente. Por ejemplo, $13^5=371293$ lo es de las cinco siguientes:

$$371293=3107^2+371280^2=139932^2+343915^2=142805^2+342732^2=145668^2+341525^2=261443^2+263640^2$$

Propiedades

Una propiedad interesante de estos primos es que poseen un resto cuadrático igual a -1. Su justificación requiere teoría de nivel algo superior al que se mantiene en mi blog, pero podemos efectuar comprobaciones. Por ejemplo, el primo $29=7*4+1$ presenta el resto 28, que equivale a -1. En la siguiente captura de pantalla se observa su presencia:

25	625	625	16	25	RESTO
26	676	676	9	26	NO RESTO
27	729	729	4	27	NO RESTO
28	784	784	1	28	RESTO
29	841			29	

El cuadrado de estos primos será promedio de otros cuadrados:

Tomamos $N=2(4K+1)^2$, que según Gauss se podrá descomponer en suma de cuadrados dos veces. Una de ellas es trivial, pues sería $(4K+1)^2+(4K+1)^2$, pero la otra convertirá a N^2 en promedio de dos cuadrados.

(Ver

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/03/potencias-equidistantes-de-cuadrados.html>)

Por ejemplo, 73 es primo del tipo $4K+1$, luego su cuadrado deberá ser promedio de dos cuadrados.

Descomponemos $2 \cdot 73^2$ en cuadrados:

$$2 \cdot 73^2 = 7^2 + 103^2 = 73^2 + 73^2$$

De ahí se deduce la propiedad:

$$73^2 = (7^2 + 103^2) / 2$$

Estos valores se pueden lograr también con la función ENTREDOS contenida en el enlace de más arriba.

También estos primos, sin elevar al cuadrado, son promedios de dos cuadrados. Basta recordar que si p es

del tipo $4K+1$, $2p$ sólo se descompone en una suma de cuadrados, como ocurre con el número 41:

$$41^2=82=1^2+9^2, \text{ luego } 41=(1^2+9^2)/2$$

$$41^2=3362=31^2+49^2, \text{ luego } 41^2=(31^2+49^2)/2$$

Tanto los primos pitagóricos como sus cuadrados son promedios de otros cuadrados.

Pasamos a la posibilidad de estos números de actuar como catetos.

Los primos pitagóricos como catetos de una terna

Este tema ya está resuelto anteriormente, pues si p es primo impar, su cuadrado se puede descomponer en dos factores de la misma paridad impar, aparte del trivial $p \cdot p$, como serían p^2 y 1. Por tanto, se cumple:

$$p^2 = \left(\frac{p^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2$$

Por ejemplo:

$$73^2 = 2665^2 - 2664^2$$

Es fácil ver que el primo pitagórico es la raíz cuadrada de la suma de los catetos, que siempre es un cuadrado perfecto.

También, todo número del tipo $(p^2+1)/2$ es posible hipotenusa que sea una unidad mayor que un cateto, aunque p no sea primo.

POR UNA UNIDAD, NO SON DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci, definida como $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$, da lugar a otras muchas sucesiones que mantienen básicamente la misma fórmula de recurrencia o bien cambian las condiciones iniciales. Aquí nos vamos a dedicar a estudiar aquellas sucesiones definidas mediante $a(n) = a(n-1) + a(n-2) \pm 1$. Respecto a las condiciones iniciales, elegiré aquellas que estén publicadas o alguna otra que sea afín, porque el objetivo no es descubrir nada nuevo, sino practicar con las herramientas que suelo usar y explicar lo que se descubra.

Una unidad más

En primer lugar, estudiaré $a(n) = a(n-1) + a(n-2) + 1$, con $a(1) = 0$ y $a(2) = 2$. (Ver <https://oeis.org/A001610>)

Con una hoja de cálculo se construyen perfectamente las sucesiones definidas por recurrencia. Escribimos $a(1)$, en la celda de abajo $a(2)$, y en las siguientes la fórmula de recurrencia. No hay más dificultad. Es conveniente situar a su izquierda una columna de índices. Por ejemplo, en este caso obtendríamos:

N	A(N)
1	0
2	2
3	3
4	6
5	10
6	17
7	28
8	46
9	75
10	122

Coinciden los términos con los publicados en <https://oeis.org/A001610>

0, 2, 3, 6, 10, 17, 28, 46, 75, 122, 198, 321, 520, 842, 1363, 2206, 3570, 5777, 9348, 15126, 24475, 39602, 64078, 103681, 167760, ...

Recurrencia lineal no homogénea

Si deseamos profundizar algo más sobre esta sucesión es conveniente tratarla como recurrencia no homogénea. En estos casos se suele resolver la homogénea y después tratar aparte el sumando no lineal, que aquí sería el 1.

La parte homogénea se resuelve mediante la ecuación característica. La base teórica la tienes en cualquier texto o página web, como

[https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n de recurr encia](https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_de_recurr%C3%A9ncia)

Poseo una herramienta descargable para resolver estas ecuaciones con las limitaciones propias de una hoja de cálculo

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurr2>)

Le suministro los datos de la parte homogénea del problema, que aquí sería la de números de Fibonacci con las condiciones iniciales 0 y 2.

Coeficientes			
A	1	B	1
Valores iniciales			
x0	0	x1	2

Pulso el botón **Resolver** para ver la ecuación característica:

Ecuación característica

Discriminante 5

Dos raíces reales

Z1= 1,61803 Z2= -0,61803

Solución general
0,89443 -0,89443

Expresión $X(n) = .89443 * (1.61803)^n + -.89443 * (-.61803)^n$

La hoja de cálculo no es simbólica, por lo que hay que saber interpretar estos coeficientes en función del número áureo o de la raíz cuadrada de 5:

Aparecen dos soluciones reales, que dan lugar a la expresión de más abajo:

Sería:

$$a(n) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Esta fórmula daría lugar a la parte homogénea, que nos da la sucesión que presenta la herramienta usada:

0
2
2
4
6
10
16
26
42
68
110
178
288
466
754
1220

La parte no homogénea es un 1, y según la teoría, habría que someterla a las mismas condiciones que la homogénea, y después encontrar el coeficiente adecuado.

En nuestro caso esta es la situación:

Valores de la homogénea: 0 2 2 4 6 10 16 26 42

Valores encontrados: 0 2 3 6 10 17 28 46 75

Diferencias: 0 0 1 2 4 7 12 20 33

Las diferencias equivalen a los números de Fibonacci clásicos menos una unidad, y las soluciones de la homogénea son el doble de los mismos de Fibonacci con un índice una unidad menor. Con esta consideración nos liberamos de cálculos algebraicos.

Así, la solución buscada por recurrencia se puede expresar de esta forma, que da el valor directamente:

$$A(n)=2*F(n-1)+F(n)-1=F(n+1)+F(n-1)-1$$

Podríamos expresarlo en función de la raíz de 5 en una fórmula demasiado larga. Es preferible expresarla usando la función FIBONACCI(N). Así se puede encontrar con PARI:

```
for(i=1,40,a=2*fibonacci(i-1)+fibonacci(i)-1;print1(a,", "))
```

La web de PARI nos ofrece las mismas soluciones que las publicadas en OEIS, que en las fórmulas incluyen $F(n+2)+F(n)-1$, porque suelen usar el 0 como primer índice. En la programación en PARI, G. C. Greubel usa una expresión similar a la obtenida aquí.

0, 2, 3, 6, 10, 17, 28, 46, 75, 122, 198, 321, 520, 842, 1363, 2206, 3570, 5777, 9348, 15126, 24475, 39602, 64078, 103681, 167760, 271442, 439203, 710646, 100

1149850, 1860497, 3010348, 4870846, 7881195,
12752042, 20633238, 33385281, 54018520, 87403802,
141422323, 228826126, ...

Se descubren varios números primos en el listado.
Podemos modificar nuestra búsqueda para encontrarlos:

```
for(i=1,100,a=2*fibonacci(i-1)+fibonacci(i)-  
1;if(isprime(a),print1(a," ")))
```

Estos serían los primeros números primos:

2, 3, 17, 103681, 10749957121,
115561578124838522881

No he encontrado cuadrados, pero si se encuentran
números que son una potencia más una unidad:

10, 17, 28, 122, 842, 5777, 39602, 271442, 1860497,
12752042, 87403802, ...

Una unidad menos

En los párrafos anteriores repasamos las recurrencias
lineales no homogéneas, alterando la definición de la
sucesión de Fibonacci, ya sea sumando o restando una
unidad y cambiando las condiciones iniciales.

En esta segunda parte restaremos una unidad a la
definición clásica, y fijaremos $a(1)=1$ y $a(2)=k$, número
que variaremos para ver qué ocurre. La recurrencia será
 $a(n)=a(n-1)+a(n-2)-1$. Tomaremos $k=4$ para comenzar.

Como en la anterior situación, generaremos la sucesión directamente en columnas de hoja de cálculo:

N	A(N)
1	1
2	4
3	4
4	7
5	10
6	16
7	25
8	40
9	64
10	103
11	166
12	268

Procedemos a encontrar la solución homogénea, y vemos la diferencia entre ambas. Se puede consultar lo anterior para seguir este proceso.

Pantalla de la hoja *recurre_lineal*:

Coefficientes			
A	1	B	1
Valores iniciales			
x0	1	x1	4

Sucesión	1
	4
	5
	9
	14
	23
	37
	60
	97

Copio la sucesión de la recurrencia homogénea junto a la obtenida para la no homogénea. Creo una tabla en la que al leer de izquierda a derecha desembocaremos en la expresión definitiva:

						$3F(-1)+1$
N	A(N) NO HOMOG.	A(N) HOMOG.	1-F(0)	F(0)	2*F(-1)+F(+1)	2*F(-1)+F(+1)+1-F(0)
1	1	1	0	1	1	1
2	4	4	0	1	4	4
3	4	5	-1	2	5	4
4	7	9	-2	3	9	7
5	10	14	-4	5	14	10
6	16	23	-7	8	23	16
7	25	37	-12	13	37	25
8	40	60	-20	21	60	40
9	64	97	-33	34	97	64
10	103	157	-54	55	157	103
11	166	254	-88	89	254	166
12	268	411	-143	144	411	268

En primer lugar figuran los índices de las sucesiones. Aquí comenzamos con 1. Después emparejamos las soluciones homogéneas con las que no lo son, y se puede descubrir que su diferencia es $1-F(0)$, con lo que quiero expresar que es el número de Fibonacci correspondiente al índice de su fila. En la siguiente columna situamos la solución para la homogénea, deducida de mi hoja *recurre_lineal*, y, por último, sumo

$1-F(0)$. Al final (ver celda naranja) quedamos con $3F(-1)+1$. Por cuestiones de índices, en OEIS usan $FIBONACCI(N)+1$. Al final da igual donde comencemos.

Se puede comprobar con PARI:

```
.  
for(n=0,20,print1(3*fibonacci(n)+1,", "))  
1, 4, 4, 7, 10, 16, 25, 40, 64, 103, 166, 268, 433, 700, 1132, 1831, 2962, 47  
3, 12544, 20296,
```

Observa el código tan simple que figura arriba.

Estos resultados coinciden con los publicados en <https://oeis.org/A187893>

Lo interesante del proceso que hemos seguido es que es válido para cualquier otro valor de K , y la sucesión vendría dada por $(k-1)*FIBONACCI(N)+1$

Por ejemplo, para $k=3$ obtenemos 1, 3, 3, 5, 7, 11, 17, 27, 43, 69, 111, 179, 289, 467, 755, 1221, ... que sigue la expresión $2*FIBONACCI(N)+1$.

Para $k=6$ obtenemos 1, 6, 6, 11, 16, 26, 41, 66, 106, 171, 276, 446, ... definida por $5*FIBONACCI(N)+1$:

```
for(n=0,20,print1(5*fibonacci(n)+1,", "))  
1, 6, 6, 11, 16, 26, 41, 66, 106, 171, 276, 446, 721, 1166,  
1886, 3051, 4936, 7986, 12921, 20906, 33826, ...
```

La mayoría de casos para k están sin publicar, como era esperable.

Casos más simples

Si las complicaciones de la recurrencia, otra forma de añadir una unidad a la sucesión de Fibonacci es realizarlo una vez esta formada. Nos resultan dos sucesiones sencillas:

Fibonacci más una unidad

Usaré PARI, que nos está viniendo muy bien en este tema:

```
for(n=0,20,print1(fibonacci(n)+1,", "))
```

1, 2, 2, 3, 4, 6, 9, 14, 22, 35, 56, 90, 145, 234, 378, 611, 988, 1598, 2585, 4182, 6766, ...

Está publicada en <https://oeis.org/A001611>

En esa página destacan que tres elementos pueden formar triángulo, porque cada uno es menor que la suma de los dos anteriores y mayor que su diferencia. También se afirma que los únicos números primos presentes son el 2 y el 3. Podemos añadir algo más:

Entre los primeros términos sólo hay tres cuadrados: 1, 4 y 9.

```
for(n=0,2000,a=fibonacci(n)+1;if(issquare(a),print1(a,", ")))
```

1, 4, 9, ...

Aparecen cuatro triangulares (observa el código, que se basa en que $8T+1$ es cuadrado):

?

```
for(n=0,2000,a=fibonacci(n)+1;if(issquare(8*a+1),print1(a," "))
```

1, 3, 6, 378, ...

También contamos con oblongos (tipo $N(N+1)$):

```
for(n=0,2000,a=fibonacci(n)+1;if(issquare(4*a+1),print1(a," "))
```

2, 2, 6, 56, 90, ...

Fibonacci menos una unidad

Con la experiencia adquirida todo es más fácil, y me limitaré a resultados:

```
? for(n=1,30,a=fibonacci(n)-1;print1(a," "))
```

0, 0, 1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, 232, 376, 609, 986, 1596, 2583, 4180, 6764, 10945, 17710, 28656, 46367, 75024, 121392, 196417, 317810, 514228, 832039, ...

Publicada en <https://oeis.org/A000071>, donde se desarrollan múltiples propiedades.

Los únicos primos presentes entre los primeros son 2 y 7:

```
? for(n=1,3000,a=fibonacci(n)-1;if(isprime(a),print1(a," "))
```

2, 7, ...

Cuadrados sólo aparecen 0, 1 y 4

Triangulares 0, 1 y 1596

Oblongos 0, 2, 12 y 20.

Hasta aquí llega el recorrido de este tema.

NÚMEROS QUE SON PROMEDIO DE DOS CUADRADOS

Hace años que vengo publicando estudios y búsquedas en las que es necesario descomponer un número en dos cuadrados. Desde Fermat conocemos la condición de que un número primo deba ser para ello del tipo $4k+1$, ya que los contrarios, de forma $4k+3$ no admiten esta descomposición.

Gauss estudió el tema y aportó una fórmula para conocer en cuántas sumas de cuadrados se descompondría un número concreto, y que resultó depender del número de factores primos de un tipo y otro que figuraran en la descomposición.

Puedes consultar esa fórmula, por ejemplo, en

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/03/potencias-equidistantes-de-cuadrados.html>.

En ella el factor 2 en un número no influye en el número de descomposiciones esperadas, sino de los tipos $4k+1$ y $4k+3$ presentes.

Lo que explico en el párrafo anterior nos hace ver que si N se descompone en dos cuadrados, también lo hará $2N$, ya que la presencia del 2 no influye en el resultado. Por ejemplo:

$$850=2*5^2*17=3^2+29^2=11^2+27^2=15^2+25^2$$

Si lo multiplicamos por 2, deberían aparecer también tres sumas de cuadrados, y así es:

$$1700=2^2*5^2*17=10^2+40^2=16^2+38^2=26^2+32^2$$

Si ahora divido las igualdades correspondientes a $2N$ entre 2, resultarán las formas de expresar N en promedios de dos cuadrados:

$$850=(10^2+40^2)/2=(16^2+38^2)/2=(26^2+32^2)/2$$

En realidad, estamos ante una situación algebraica, ya que si $N=a^2+b^2$, se tendrá que $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)=2N$

En efecto: $13+25=40$, $25-15=10$, que son las primeras soluciones para el promedio, $27-11=16$ y $27+11=38$, las segundas, y, por último, $29-3=26$, $29+3=32$.

Estos razonamientos sugieren que basta descomponer $2N$ en dos cuadrados para que aparezca una solución de promedios para N y que el número de soluciones será el mismo. No es difícil encontrar una función que realice este trabajo. Otra orientación es la de buscar todos los

cuadrados C menores que N y ver si N+C es cuadrado. No se tienen en cuenta los promedios en los que los dos sumandos son iguales, lo que se considera solución trivial.

Como aquí se trata de comprender y practicar, copio las dos posibilidades:

Buscar si N+C es cuadrado:

Function entredos\$(n)

Dim i, r, a, b, m

Dim s\$

s = "" 'La solución se expresa como texto

m = 0 'Contador de soluciones

r = Int(Sqr(n)) 'Primer valor a ensayar

i = r - 1

While i > 0 'Descendemos valores de cuadrados

b = n - i ^ 2 'Diferencia entre potencia y cuadrado

a = n + b 'A la potencia le sumamos la diferencia

If escuad(a) Then m = m + 1: b = Sqr(a): s = s + " = (" + ajusta(i) + "^2+" + ajusta(b) + "^2)/2" 'Si es cuadrado, hay una solución nueva

i = i - 1

Wend

If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " : " + s
entredos = s 'Si no hay solución, la respuesta es "NO"

End Function

Descomponer 2N en suma de dos cuadrados

Function entredos2(n) As String

Dim x, p, m, c

Dim s\$

s\$ = "": m = 0' Contenedor y contador

For x = 1 To Sqr(2 * n - 1)

c = x * x 'Primer cuadrado para 2N

p = 2 * n - c 'Posible segundo cuadrado

If escuad(p) And p <= c Then

**s\$ = s\$ + "(" + ajusta\$(x) + "^2+" + ajusta\$(Sqr(p)) +
"^2)/2"**: m = m + 1 'Hay solución y avanza el contador

End If

Next x

**If s\$ = "" Then s\$ = "NO" Else s\$ = ajusta(m) + "::" +
s\$**

entredos2 = s\$ 'Presentación de resultados

End Function

En la siguiente tabla se puede observar la concordancia entre los dos métodos, en un rango elegido al azar:

Número	Búsqueda con ENTREDOS	Ídem con ENTREDOS2
130	2 : = (8 ² +14 ²)/2 = (2 ² +16 ²)/2	2::=(14 ² +8 ²)/2=(16 ² +2 ²)/2
136	1 : = (4 ² +16 ²)/2	1::=(16 ² +4 ²)/2
137	1 : = (7 ² +15 ²)/2	1::=(15 ² +7 ²)/2
145	2 : = (11 ² +13 ²)/2 = (1 ² +17 ²)/2	2::=(13 ² +11 ²)/2=(17 ² +1 ²)/2
146	1 : = (6 ² +16 ²)/2	1::=(16 ² +6 ²)/2
148	1 : = (10 ² +14 ²)/2	1::=(14 ² +10 ²)/2
149	1 : = (3 ² +17 ²)/2	1::=(17 ² +3 ²)/2
153	1 : = (9 ² +15 ²)/2	1::=(15 ² +9 ²)/2
157	1 : = (5 ² +17 ²)/2	1::=(17 ² +5 ²)/2
160	1 : = (8 ² +16 ²)/2	1::=(16 ² +8 ²)/2

Evidentemente, faltan aquellos números que no admiten descomposición, por contener factores primos del tipo $4k+3$ elevado a exponente impar. Son ejemplos $135=3^3 \cdot 5$, 151, primo tipo $4k+3$, o $144=2^4 \cdot 3^2$, en el que, al ser cuadrado presentaría la solución trivial $(12^2+12^2)/2$.

Los primeros números que admiten ser iguales a un promedio de cuadrados son:

5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 122, 125, 130, 136, 137, 145, 146, 148, 149, 153, 157, 160, 164, 169, 170, 173, 178, 180, 181, 185, 193, 194, 197, 200, ...

Con otra definición equivalente están publicados en <https://oeis.org/A004431>, y en un comentario aparece el promedio de dos cuadrados. Son interesantes los comentarios y alguna programación en PARI.

Diferencias prefijadas

Las diferencias entre las bases de los cuadrados que sean solución, han de ser pares, para que su suma sea par, ya que su resultado es $2N$.

Podemos seleccionar entre las soluciones aquellas que posean una diferencia determinada, a la que llamaremos $2D$ por ser par. Conociendo ese dato, es fácil dar un criterio para saber si N admite ser promedio de dos

cuadrados cuyas bases se diferencien en 2d. Comenzaríamos así:

$$\text{Sería } k^2+(k+2d)^2=2N$$

$$2k^2+4dk+4d^2=2N$$

$k^2+2dk+2d^2=N$, es decir, la ecuación de segundo grado en k: $k^2+2dk+(2d^2-N)=0$

En la página enlazada se sirven de esta fórmula para definir estos números.

Para que exista solución entera, el discriminante $d^2-2d^2+N=N-d^2$ deberá ser cuadrado. Ese sería el criterio.

Un número N admitirá ser promedio de dos cuadrados diferenciados en 2d si $N-d^2$ es cuadrado

Por ejemplo, en la tabla se observa que 130 admite las diferencias 6 y 14, y esto es porque $130-3^2=121$, cuadrado de 11, y $130-7^2=81$, cuadrado de 9. Implemento en un buscador, con un rango similar y obtengo: 113, 130, 149, 170, 193, ... Los números 130 y 149 son los que presentan diferencia 14 en la tabla.

La expresión $N=k^2+2dk+2d^2$ nos permite encontrar las mismas soluciones para números que sean promedio de dos cuadrados. Basta plantear un doble bucle con k y d. Esta es la versión en PARI:

```
for(n=1,10,for(m=1,10,p=n^2+2*m*n+2*m^2;print1(p,  
", ")))
```

Si la ejecuto en la página oficial de PARI/GP obtengo la solución

5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 10, 20, 34, 52, 74, 100, 130, 164, 202, 244, 17, 29, 45, 65, 89, 117, 149, 185, 225, 269, 26, 40, 58, 80, 106, 136, 170, 208, 250, 296, 37, 53, 73, 97, 125, 157, 193, 233, 277, 325, 50, 68, 90, 116, 146, 180, 218, 260, 306, ...

Como era de esperar, aparecen las soluciones desordenadas. Si las ordeno en una hoja de cálculo, coinciden con las obtenidas por otros procedimientos.

5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 65, 68, 73, 74, 80, 82, 85, 85, 89, 90, 97, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, 117, 122, 125, 125, 130, 130, 136, 137, 145, 146, 148, 149, ...

Se observan dos hechos, como son la existencia de repetidos, (65 y 85), y también la falta de alguno en el listado, simplemente porque “tarda más en aparecer”. Por eso, prefiero siempre algoritmos que devuelvan las soluciones ordenadas.

NÚMEROS PRIMOS DE PIERPONT

Hay ya bastantes publicaciones e ideas sobre los **primos de Pierpont**. A pesar de ello, aún se puede volver a estudiarlos desde la forma de trabajar acostumbrada y las herramientas disponibles. Además, son interesantes los números directamente relacionados con ellos, como los de Mersenne, Fermat o Proth

Definición y primeras consecuencias

Un **número primo de Pierpont** es un número primo de la forma $2^u 3^v + 1$, donde u y v han de ser enteros no negativos. Esto nos lleva a consideraciones muy sencillas:

El exponente u no puede ser cero, pues la expresión sería par y, por tanto, no representaría a un número primo. De hecho, si $v=0$, deberá ser potencia de 2. La razón está en que una suma de potencias impares es divisible entre la suma de sus bases. Por ejemplo, $(X^5+Y^5)/(X+Y)=X^4-X^3Y+X^2Y^2-XY^3+Y^4$. Si el exponente poseyera un factor primo distinto de 2, podríamos descomponer la potencia como “potencia de potencia”, y aislar el número impar. Por ejemplo 2^{12} se podría expresar como 2^2 y luego elevado a 3, con lo que construiríamos una suma de potencias impares, y no podría ser primo. Todo este razonamiento nos lleva a que si $v=0$, **los primos de Pierpoint serían también de Fermat**. Más adelante regresaremos a esta idea.

El exponente v , si no es nulo, como también lo es u , convertiría al primo de Pierpoint en uno del tipo $6k+1$, y posible elemento mayor de un par de primos gemelos. Otra vía para desarrollar más adelante.

Obtención de estos primos

Con las herramientas que suelo usar es relativamente fácil encontrar los primeros primos de Pierpont. La

primera idea es construir una tabla de doble entrada, una para 2^u y otra para 3^v , y combinarlas:

	0	1	2	3	4	5
0	2	3	5		17	
1		7	13			97
2		19	37	73		
3			109		433	
4		163			1297	2593
5		487			3889	
6		1459	2917			
7				17497		
8				52489		209953

Por motivos como este sigo usando las hojas de cálculo, porque toda la tabla se genera con la fórmula siguiente y sus extensiones a derecha y abajo:

=SI(ESPRIMO(2^D\$3*3^\$C4+1);2^D\$3*3^\$C4+1;"")

Esta concurrencia entre dos potencias también se puede lograr con mi herramienta CARTESIUS

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius>)

Su gestión no es fácil a veces, por lo que no acudo mucho a ella en lo que publico, pero en este caso demuestra su versatilidad. Basta darle las condiciones siguientes:

XTOTAL=2

XT=0..10

VALOR(2^X1*3^X2+1):PRIMO

Nota: Es posible que cuando se publique este texto aún no se haya implementado la condición VALOR, que es una mejora del año 2026.

Vienen a significar que combinaremos dos variables de 0 a 10, y que exigiremos que la expresión del paréntesis abajo (definición de primo de Pierpoint) debe ser un número primo. Su respuesta es (solo los primeros casos):

X1	X2	X3	X4	X5
	0	0		2
	1	0		3
	1	1		7
	1	2		19
	1	4		163
	1	5		487
	1	6		1459
	1	9		39367
	2	0		5
	2	1		13
	2	2		37
	2	3		109
	2	6		2917
	3	2		73
	3	7		17497
	3	8		52489

Aparecen los primos pedidos, pero desordenados. Por eso es preferible el procedimiento que elegiré en el siguiente apartado.

Caracterización de estos números

La segunda idea que se nos puede ocurrir es la de anidar dos bucles, uno con potencias de 2 y otro con las de 3, y filtrar los resultados con la condición ESPRIMO. Tendría el inconveniente de resultar un proceso largo y poco eficiente si deseamos manejar rangos de números

grandes. Es preferible pensar en una función que nos determine si un número concreto es o no primo de Pierpont.

Para abordar esta función es bueno recordar el concepto de **valuación** de un número respecto a otro (ver <https://hojaynumeros.blogspot.com/2012/12/volvemos-visitar-al-mayor-divisor-impar.html>), y es el número de veces consecutivas que un número puede ser dividido por otro. Por ejemplo, VALUACIÓN(162,3)=4, porque 162 es divisible entre 3^4 .

En este caso, si P es de Pierpont, la valuación de P-1 para el 2 es el exponente **u** y la del 3 el **v**. Así, el criterio para saber si un número primo es de este tipo se podría expresar como

$$P-1=2^{\text{valuacion}(P,2)}*3^{\text{valuación}(P,3)}$$

En el lenguaje PARI ya viene implementada como **valuation**, y el criterio total sería:

$$p-1==(2^{\text{valuation}(p-1,2)})*(3^{\text{valuation}(p-1,3)})\&\&\text{isprime}(p)$$

Lo escribimos como un bucle con inicio y final y así logramos identificar los primos deseados dentro de un rango (inicio, final)

```
inicio=1;final=10000;for(p=inicio,final,if(p-1==(2^valuation(p-1,2))*(3^valuation(p-1,3))&&isprime(p),print1(i," ")))
```

Con él se consiguen fácilmente los primeros primos de Pierpont:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97, 109, 163, 193, 257, 433, 487, 577, 769, 1153, 1297, 1459, 2593, 2917, 3457, 3889, ...

Están publicados en <https://oeis.org/A005109>, y en esa página se pueden consultar variantes de esta idea.

Se conjetura que existen infinitos números de este tipo, pero no se ha demostrado.

Búsqueda con hoja de cálculo

En una hoja se pueden desarrollar varios aspectos, y quedan muy claros los detalles. Poseo una sencilla versión en VBASIC de la valuación:

Function valuacion(n, x) 'Halla el exponente de la máxima potencia de x que divide a n

Dim s, v

s = n

v = 0

While esmultiplo(s, x): s = s / x: v = v + 1: Wend
valuacion = v

End Function

La función ESMULTIPLA se puede sustituir por **s/x=s**x, que es equivalente

Con ella se puede construir una tabla más extensa de resultados, introduciendo líneas similares a las siguientes en un buscador:

$$a = \text{valuacion}(i - 1, 2)$$

$$b = \text{valuacion}(i - 1, 3)$$

**If $i - 1 = \text{potencia}(2, a) * \text{potencia}(3, b)$ And $\text{esprimo}(i)$
Then**

Añadiendo detalles, el resultado sería:

Número	Exponente U	Exponente V	Tipo
2	0	0	FERMAT
3	1	0	FERMAT
5	2	0	FERMAT
7	1	1	6k+1
13	2	1	6k+1
17	4	0	FERMAT
19	1	2	6k+1
37	2	2	6k+1
73	3	2	6k+1
97	5	1	6k+1

Algunos del tipo 6k+1 son primos gemelos con sus anteriores, como 5, 7, 13 o 19.

La ventaja de este método es que podemos ir a un rango más alto. Estos son los primeros primos de Pierpont a partir de 1000:

Número	Exponente U	Exponente V	Tipo
1153	7	2	6k+1
1297	4	4	6k+1
1459	1	6	6k+1
2593	5	4	6k+1
2917	2	6	6k+1
3457	7	3	6k+1
3889	4	5	6k+1

La aparición de los números de Fermat da lugar a un curioso paralelismo, que no desarrollaré porque ya ha sido bien explicado en otros lugares. Los de Fermat influyen en la construcción de un polígono con regla y compás, mientras los de Pierpoint lo hacen si se usan dobleces de un papel. En Wikipedia se explica de forma clara y breve.

(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo_de_Pierpont)

Como anuncié en los primeros párrafos, sólo desarrollaré aspectos en los que sean útiles mis herramientas usuales. El resto de cuestiones es muy accesible con una buena búsqueda.

Números afines a los primos de Pierpoint

Ya se ha visto su relación con los números de Fermat. También tienen una definición parecida los siguientes:

Primos de Proth

Tienen como definición el ser números primos de la forma $k2^n+1$, con k impar y menor que 2^n . Se deduce que

algunos de este tipo también serán de Pierpoint, como $3^{1*2^2}+1=13$. Cambiando las instrucciones en un buscador de hoja de cálculo tendríamos:

$$a = \text{valuacion}(i - 1, 2)$$

$$c = \text{potencia}(2, a)$$

$$b = (i - 1) / c$$

If $b = \text{Int}(b + 0.00001)$ And $b < c$ And $i = b * c + 1$ And $\text{esprimo}(i)$ Then

Resultado:

Número de Proth	Exponente U	Coficiente k
3	1	1
5	2	1
13	2	3
17	4	1
41	3	5
97	5	3
113	4	7
193	6	3
241	4	15
257	8	1
353	5	11
449	6	7

Serán también primos de Pierpoint aquellos en los que K sea potencia de 3 (incluido el 1).

Están publicados en <https://oeis.org/A080076>

Es muy fácil encontrar sus propiedades.

Primos de Pierpoint de segunda clase

Podemos cambiar la definición de los primos de Pierpoint caracterizándolos como $2^u 3^v - 1$.

La caracterización de estos números pasaría por usar la valuación respecto a 2 o a 3 del número **p+1** en lugar de **p-1**.

Como ya están publicados en <https://oeis.org/A005105>, es trabajo inútil volver a repetir cálculos ya conocidos. Los primeros son:

2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 31, 47, 53, 71, 107, 127, 191, 383, 431, 647, 863, 971, 1151, 2591, 4373, 6143, 6911, ...

En este listado, los elementos con v distinto de cero, serán del tipo $6k-1$. Si $v=0$, no es aquí necesario que u sea potencia de 2, y así, podemos encontrar entre ellos **primos de Mersenne**, del tipo 2^k-1 con k primo. En el listado podemos identificar 3, 7, 31 y 127.

Se podría pensar aquí también en los números del tipo 6^n-1 , pero son todos múltiplos de 5, lo que nos lleva a que u ha de ser distinto de v .

UNAS RECURRENCIAS MUY ÚTILES

Quienes usamos a menudo los números poligonales nos encontramos con esta relación de recurrencia de tercer orden:

$$x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}$$

El origen de esta presencia es que se pueden generar con ella los números naturales, sus cuadrados y .evidentemente, las constantes:

Números naturales

Se pueden generar mediante

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}$$

En efecto, aquí x_n es n , x_{n-1} , $n-1$, luego

$$3(n-1) - 3(n-2) + n - 3 = 3n - 3 - 3n + 6 + n - 3 = n$$

Esto demuestra que la recurrencia con estos coeficientes es verdadera.

Números cuadrados

En ellos también es válida esta recurrencia. Lo vemos:

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = x_n + 2n + 1$$

$$x_{n+2} = (n+2)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = x_{n+1} + 2n + 3$$

Luego, despejando:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + 2$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2$$

De igual forma

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2$$

Restamos las dos igualdades y agrupamos:

$$x_{n+3} - x_{n+2} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2 - 2x_{n+1} + x_n - 2$$

Despejando:

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n$$

Con esto se demuestra la validez de la recurrencia. Por ejemplo:

$$11^2 = 121 = 3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 9^2 + 8^2 = 300 - 243 + 64 = 364 - 243 = 121$$

También nos vale un desarrollo directo:

$$(n+3)^2 = 3(n+2)^2 - 3(n+1)^2 + n^2 = 3n^2 + 12n + 12 - 3n^2 - 6n - 3 + n^2$$

$$n^2 + 6n + 9 = n^2 + 6n + 9$$

Identidad que demuestra la recurrencia.

Constantes

Una constante K sometida a esa recurrencia sigue teniendo el valor de K: $3 \cdot K - 3 \cdot K + K = K$

Números oblongos

Siguen la fórmula $n(n+1) = n^2 + n$, y al ser la recurrencia propuesta de tipo lineal, también será válida en esa suma de un cuadrado con un natural.

Lo podemos comprobar con los primeros oblongos: 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... Por ejemplo, $30 = 3 \cdot 20 - 3 \cdot 12 + 6 = 60 - 36 + 6 = 24 + 6 = 30$

Números triangulares

Al tener un número triangular la fórmula $n(n+1)/2=(n^2+n)/2$, es la mitad de un oblongo, luego admitirá la misma recurrencia. Lo vemos con un ejemplo tomado de la sucesión de números triangulares:

1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , 28 , 36 , 45 , 55 , ...

$$45=3*36-3*28+21=108-84+21=129-84=45$$

Polinomios de segundo grado

También se generarán de la misma forma, porque cuadrados, números naturales y constantes lo siguen. Lo vemos con $P(x)=2x^2-3x+2$:

$$P(1)=1, P(2)=4, P(3)=11, P(4)=22, P(5)=37, P(6)=56 \text{ y } P(7)=79$$

$$\text{Observamos que } P(7)=3*56-3*37+22=168-111+22=190-111=79$$

Números poligonales

Todo número poligonal es suma de triangulares. Basta ver la imagen:



Esta descomposición hace válida la recurrencia en ellos. En mi publicación sobre estos números se incluye una demostración con la fórmula general, que es un polinomio de segundo grado: $P(n,k)=((k-2)n^2-(k-4)n)/2$

<https://www.hojamat.es/publicaciones/poligonales.pdf>

En esa publicación figuran otras recurrencias que a veces son más rápidas que la propuesta.

También siguen esta recurrencia los *poligonales centrados*, de fórmula $POLC(n,k)=(kn^2-kn+2)/2$, por ser también polinomio de segundo grado.

Números piramidales

Las sucesiones recurrentes de orden h se pueden sumar mediante la siguiente fórmula, también recurrente, que procede de la publicación *Sucesiones recurrentes* de A.I.Markushevich – Editorial Mir. La demostración de ella no es difícil, pero resulta larga para este estudio:

$$s_{n+h+1}=(1+a_1)s_{n+h}+(a_2-a_1) s_{n+h-1}+ \dots +(a_h-a_{h-1}) s_{n+1}-a_h s_n$$

Si a esta recurrencia que estamos estudiando le aplicamos la fórmula de la suma, nos permitirá encontrar

una recurrencia para números piramidales, que son sumas de poligonales consecutivos.

Tomamos $a_1=3$, $a_2=-3$ y $a_3=1$ para aplicarlo a la fórmula de la suma

$$s_{n+h+1}=(1+a_1)s_{n+h}+(a_2-a_1) s_{n+h-1}+ \dots +(a_h-a_{h-1}) s_{n+1}-a_h s_n$$

$$s_{n+4}=4s_{n+3}-6s_{n+2}+4s_{n+1}-s_n$$

Lo aplicamos a los números piramidales pentagonales, 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550,

$$550=4*405-6*288+4*196-126=550$$

Tal como se advirtió en los poligonales, en este caso existen recurrencias que pueden ser más simples según el tipo de piramidal.

Piramidales de más dimensiones

Al igual que se pueden estudiar los piramidales como suma de poligonales consecutivos, se extiende este proceso a piramidales de más dimensiones, que son suma de piramidales consecutivos del orden inferior. Se deja como propuesta de estudio.

FUNCIONES DEFINIDAS PARA TIPOS DE NÚMEROS

En algunos cálculos se desea poder usar funciones definidas del tipo $\text{PRIMO}(N)$, $\text{PELL}(N)$, que se puedan integrar en expresiones, como $2 \cdot \text{PRIMO}(6)$ o $(\text{FIBONACCI}(7))^2$. En ellas llamaremos **orden** al contenido del paréntesis. Así, $\text{PRIMO}(7)$ poseería orden 7, que correspondería con el número de primos menores o iguales al dado.

El objetivo de este capítulo es la construcción de estas funciones en los casos más populares, así como las complementarias para encontrar el orden, según ellas, de un número dado. Así, por ejemplo, $\text{PRIMO}(6)=13$ y $\text{ORDENPRIMO}(13)=6$. Algunas de ellas se han usado en mi blog, por lo que sólo se enlazarán cuando llegue su turno.

Veremos tres clases de situaciones:

- El tipo de número posee fórmula (se comprende que debe ser sencilla). Es el caso de $\text{TRIANGULAR}(N)=N(N+1)/2$. Entonces existirá un procedimiento algebraico no muy difícil.

- No existe fórmula alguna. Los números primos y los libres de cuadrados, por ejemplo, se encuentran por búsqueda. En ese caso será imprescindible un bucle respecto a una variable para encontrarlos. Se necesita un lenguaje de programación.
- Son elementos de una sucesión recurrente. Aunque suelen existir fórmulas para todos ellos, su complicación no los aconseja, y es más sencilla la programación en un lenguaje. Como caso particular se verán las sucesiones del tipo Horadam.

Existe otra posibilidad, y es que posean una función generatriz. Este procedimiento se ha usado mucho en mis cálculos, pero no entra en el objetivo actual.

Funciones con fórmula

Muchas de ellas se han utilizado aquí ya. Las más importantes son las de números figurados, como TRIANGULAR(N), HEXAGONAL(N) o PIRAMIDAL(N,K). Elijo algunos ejemplos con cierto interés:

TRIANGULAR(N)

La fórmula directa, $\text{TRIANGULAR}(N) = N(N+1)/2$, no necesita explicación, pero para hallar la de su orden hay que recordar que, dado un triangular cualquiera, $T(N)$, la expresión $8T(N)+1$ es un cuadrado. De ahí podemos sacar su orden. Una versión podría ser el siguiente:

Function ordentriang(n)

Dim a

a = Int((Sqr(8 * n + 1) - 1) / 2)

If a * (a + 1) = 2 * n Then ordentriang = a else ordentriang = 0

End Function

Una situación similar es la de la función $\text{OBLONGO}(N) = N(N+1)$, sólo que aquí la propiedad básica es que cuatro veces un oblongo más la unidad es un cuadrado, así que sustituyendo en la función anterior un 8 por un 4 obtenemos la expresión de $\text{ORDENOBLONGO}(N)$.

En la práctica, es mucho más útil

$\text{ORDENOBLONGO}(N) = \text{ENTERO}(\text{RAIZ}(n))$

No es difícil razonarlo.

Por ejemplo, resolvemos la cuestión de si existen oblongos que sean consecutivos a un triangular. Para ello se inserta en un buscador la condición

If escuad(8 * i + 1) And escuad(4 * (i + 1) + 1) Then

El escaso resultado era previsible, ya que se exige una condición difícil de cumplir, pero se encuentran tres soluciones entre los primeros cincuenta mil números, 1 con 2, 55 y 56, y el par 1891, 1892:

Buscador			
Triangular	Orden	Oblongo	Orden
1	1	2	1
55	10	56	7
1891	61	1892	43

El resto de soluciones está publicado en <https://oeis.org/A217758>

Un atajo:

Si usamos el álgebra, obtenemos:

$$\text{Es } n(n+1)/2+1=k(k+1), \quad n^2+n+2=2k^2+2k,$$

$$4n^2+4n+8=8k^2+8k,$$

$$(2n+1)^2+7=2(2k+1)^2-2 \text{ y hago } X=2n+1 \text{ } Y=2k+1$$

$$X^2-2Y^2=-9, \text{ luego } (X^2+9)/2 \text{ es cuadrado}$$

Le inserto esta condición al buscador y obtengo los triangulares publicados:

X	2n+1	Orden	Triangular
3	3	1	1
21	15	10	55
123	87	61	1891
717	507	358	64261
4179	2955	2089	2183005
24357	17223	12178	74157931

Siempre hay que acudir al Álgebra cuando se pueda.

POLIGONAL(N;K)

Fórmula directa

Los números poligonales poseen una fórmula general, que he desarrollado en mi publicación Números poligonales:

$$P_{n,k} = \frac{k(k(n-2) - (n-4))}{2}$$

Su traducción es inmediata:

En VBASIC:

Function poligonal(n, k)

poligonal = n * (n * (k - 2) - (k - 4)) / 2

End Function

Fórmula del orden

El problema inverso es algo complicado. Lo puedes consultar en el apartado de *Caracterización de los poligonales*, en la publicación enlazada más arriba.

Su desarrollo en VBASIC es
Function ordenpoligonal(n, k)
Dim d, e, m
m = 0
d = (k - 4) ^ 2 + 8 * n * (k - 2)
If escuad(d) Then
m = (k - 4 + Sqr(d)) / 2 / (k - 2)
If esentero(m) Then e = m Else e = 0
End If
espoligonal = e
End Function

Esta función devuelve un cero si el número no es poligonal, y su orden si lo es. Las funciones ESCUAD Y EENTERO se pueden buscar en mi blog, o sustituirlas por cálculos más directos.

Estas dos funciones poseen una traducción sencilla a PARI, por lo que no se incluye.

Con ellas podemos buscar relaciones entre poligonales. Por ejemplo ¿Para qué órdenes la suma de un cuadrado con un triangular del mismo orden da una suma hexagonal?

Se buscaría que

poligonal(i,3)+poligonal(i,4)=poligonal(k,6)

Con un buscador he encontrado estas dos primeras soluciones, con comprobación de la relación de suma entre ellas:

	Orden de sumandos	Suma Cuadrado más triangular	Orden suma hexagonal
	3	15	3
	615	567645	533
	C(615) 378225		
	T(615) 189420		
	H(533) 567645		
	Es suma		

Otros poligonales

En mi calculadora de números figurados CALCUPOL, en su código VBASIC, puedes consultar todas las funciones disponibles para poligonales centrados, piramidales 3D y piramidales 4D. Es un tema tan extenso, que es preferible dejarlo como complemento para las personas interesadas.

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#figurados>)

Funciones basadas en búsqueda

Es el caso de la función PRIMO(N). Se necesita otra función, llamemos ESPRIMO, que indique si un número es del tipo dado o no, y después habrá que contar los casos que indique su orden N para llegar a a su valor. Lo

vemos según el tipo, tomando los números primos como ejemplo para los siguientes:

Función PRIMO(N)

Necesitaremos la función ESPRIMO, descargable desde mi blog, por ejemplo, en

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2009/03/primos-reversibles-primo-omirp.html>

El siguiente código, adaptable a cualquier lenguaje de programación, encuentra el primo de orden n . Servirá de modelo para otros ejemplos, cambiando la línea que se señala.

Function primo(n)

Dim p, c, i

'encuentra el primo cuyo número de orden es n

c = 0: i = 1

While c < n

If esprimo(i) Then c = c + 1: p = i 'Esta línea se cambiará en otros ejemplos

i = i + 1

Wend

primo = p

End Function

Por ejemplo, ¿cuál es el número primo de orden 1000?

La respuesta sería 7919. Lo comprobamos con PARI, que ya tiene implementada la función PRIME:

? ***print(prime(1000))***

7919

Volveremos a esta estructura de función.

Función inversa, ORDENPRIMO

También aquí nos servirá de modelo para otros casos.

Function ordenprimo(a) As Long

Dim p, c As Long

If not esprimo(a) Then ordenprimo = 0: Exit Function

c = 0

For p = 1 To a

If esprimo(p) Then c = c + 1

Next p

ordenprimo = c

End Function

Se entiende bien. Se van recorriendo los números del mismo tipo hasta llegar al que nos interesa. Por experiencia se sabe que es útil que, si el número no es primo, la función devuelva un cero. De ahí la inclusión de la primera línea.

Así, $\text{ordenprimo}(100)=0$ y $\text{ordenprimo}(101)=27$, ya que $\text{primo}(27)=103$

En PARI no están implementados órdenes, pero esta sencilla línea lo resuelve:

`ordenprimo(a)=my(c=0,p);for(p=1,a,if(isprime(p),c+=1));c*isprime(a)`

Aquí, la solución para que dé un cero si no es primo se encuentra al final. Al multiplicar por *isprime(a)*, anula el resultado si no es primo, porque vale cero. En este recorte se observa la aplicación de esta función al 100 y al 103:

```
? ordenprimo(a)=my(c=0,p);for(p=1,a,if(isprime(p),c+=1));c*isprime(a)
print(ordenprimo(100))
print(ordenprimo(103))
%19 = (a)->my(c=0,p);for(p=1,a,if(isprime(p),c+=1));c*isprime(a)
0
27
```

Este modelo se usará más adelante si se ve conveniente.

Una función similar es PRIMOSOPHIE(N), que devuelve el enésimo primo de **Sophie Germain**. Basta añadir a *esprimo(n)* la función *esprimo(2*n+1)*

Así, cambiaríamos la línea a `If esprimo(p) and esprimo(2*n+1) Then c = c + 1`

Lo dejo como ejercicio. Debe dar, por ejemplo:

`primosophie(7)= 41`, y `ordenprimosophie(233)=16`

Función SEMIPRIMO(N)

Los semiprimos son aquellos números compuestos que equivalen al producto de dos primos. Como $4=2*2$ y $62=2*31$. La función SEMIPRIMO es sencilla si se posee la BIGOMEGA, que es el número de factores primos de

un número. En PARI sí existe, con lo que los semiprimos son aquellos en los que bigomega vale 2.

Sería ***essemiprimo(n)=bigomega(n)==2***

En la imagen observamos dos resultados.

```
? essemiprimo(n)=bigomega(n)==2
print(essemiprimo(62))
print(essemiprimo(12))
%22 = (n)->bigomega(n)==2
1
0
```

En el caso de VBASIC es preferible dedicarle un código especial. Consiste en buscar dos primos tales que su producto sea el número dado. Puede ser este:

Function essemiprimo(n) As Boolean

Dim a, r

Dim es As Boolean

es = False 'Al principio suponemos que no es semiprimo

a = 2 'La variable a recorrerá los números primos

r = Sqr(n) 'Tope de búsqueda

While a <= r And Not es

If n / a = n \ a And esprimo(a) And esprimo(n / a) Then

es = True

'La variable a debe ser divisor, primo, y su cociente con N también primo

If a = 2 Then a = a + 1 Else a = a + 2 'Se busca el próximo primo

Wend

essemiprimo = es
End Function

Ahora basta sustituir, en la función PRIMO(N), la línea

If esprimo(i) Then c = c + 1: p = i por

If essemiprimo(i) Then c = c + 1: p = i

Tendremos así formada la función **SEMIPRIMO(N)**

Como comprobación se dan algunos valores:
SEMIPRIMO(13)=35, SEMIPRIMO(100)=314 y
SEMIPRIMO(1000)=3595

Igualmente podemos adaptar la función ORDENPRIMO a ORDENSEMIPRIMO. Se deja como ejercicio. Esta es la comprobación de los semiprimos del párrafo anterior:

Ordensemiprimo	
35	13
314	100
3595	1000

Función CAPICUA(N)

Los números capicúas (o palindrómicos) son los que presentan simetría en sus cifras (nos limitaremos a base 10), y tienen un orden predecible, pero es más cómodo considerar que aparecen de forma aleatoria. Por eso se incluyen aquí. Como en anteriores tipos, necesitamos

una función ESCAPICUA. En VBASIC de Excel y Calc ya está resuelta en mi blog

(ver <https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/10/suma-de-cuadrado-y-capicua.html>)

No tiene en cuenta los números de una cifra.

En PARI es sencilla:

ispal(n)=n==eval(concat(Vecrev(Str(n))))

Ya se ha explicado en en otra ocasión que significa “convertir en texto, invertir sus cifras como vector, reunir las y calcular su valor”. Es bastante ingenioso.

Como en los otros casos, se cambia la línea adecuada en el código y resulta la función.

Un ejemplo de búsqueda sería, por ejemplo: Encontrar dos capicúas consecutivos cuya suma sea un número primo. Introduciremos en un Buscador esta condición:

If ESPRIMO(CAPICUA(N)+CAPICUA(N+1))

Las primeras soluciones son:

Capicúa 1	Capicúa 2	Suma prima
393	404	797
595	606	1201
39993	40004	79997

Dos de las sumas son “palprimos”, primo y capicúa, pero la central es número primo, pero no palindrómico. Si les adjuntamos sus órdenes, observamos tres situaciones distintas:

39	40	79
59	60	0
489	490	889

En la primera, al sumar capicúas se suman también sus órdenes, porque no hay arrastre de cifras. En la segunda hay un cero porque no es capicúa, y en la tercera no se suman los órdenes.

Este tipo de funciones nos proporciona más posibilidades en las búsquedas.

Otras funciones

Podíamos seguir con el tema de funciones que necesitan una búsqueda previa. Algunas posibles serían:

INTERPRIMO(N): buscaría números que son promedio entre dos primos consecutivos.

ESFENICO(N): para números que son producto de tres primos distintos.

LIBREDECUADRADOS(N): cuando ningún factor primo posee un exponente mayor que uno.

CUADPRIMO(N): cuadrado de un primo.

Con los estudiados ya se puede tener una idea.

Funciones sobre recurrencias

Son aquellas que se definen mediante los términos iniciales, y además, expresan $a(n+1)$ en función de los anteriores términos. Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci se define como $a(1)=1$, $a(2)=1$, y para el resto, $a(n+1)=a(n)+a(n-1)$. Si esta última relación sólo usa el término $a(n)$ se llama de primer orden, y así, se pueden plantear de segundo, tercero o más órdenes.

Recurrencias de primer orden

Cada función de este tipo deberá estar definida por dos parámetros, $a(1)$ y otro según la definición, que puede ser DIFERENCIA en las progresiones aritméticas, RAZÓN en las geométricas, o bien cualquier otra relación entre $a(n+1)$ y $a(n)$. No existen ejemplos populares concretos para definir funciones.

Recurrencias de segundo orden

Existen muchas recurrencias de segundo orden, como la ya citada de Fibonacci. Las más simples son las llamadas Horadam, y se caracterizan porque la relación de recurrencia es lineal. Vemos las más importantes.

Caso particular: sucesiones Horadam

Son aquellas que están definidas por cuatro parámetros, a_1 , a_2 , c_1 y c_2 , de la forma $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, $a(n) = a(n-2)*c_1+a(n-1)*c_2$. Así, tenemos muchos ejemplos concretos de este tipo de sucesiones recurrentes de segundo grado:

Horadam(1,1,1,1): Números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5

Horadam(2,1,1,1): Números de Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...

Horadam(1,2,1,2): Potencias de 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Horadam(0,1,2,1): Números de Pell: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, ...

Horadam(1,1,2,1): Números de Pell-Lucas: 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, ...

Horadam(2,3,3,-2): Sucesión de Pisot (2^n+1): 2, 3, 5, 9, 17, 33, ...

Horadam(0,1,1,2): Sucesión de Jacobsthal: 2, 3, 5, 9, 17, 33, ...

Son muy sencillas de programar, y su búsqueda suele ser rápida. Para encontrar un término general hay que usar los cuatro parámetros citados más el número de orden n .

En lenguaje PARI

```
horadam(n,a1, a2, c1, c2) = {my(i,f,t,v,u);  
if(n==1,f=a1);  
if(n==2,f=a2);if(n>2,v=a1;t=a2;for(i=3,n,u=c1*t+c2*v;  
v=t;t=u);f=u);f}
```

En Vbasic

```
Function horadam(n, a1, a2, c1, c2)  
Dim i, f, v, u  
If n = 1 Then horadam = a1: Exit Function  
If n = 2 Then horadam = a2: Exit Function  
v = a1: t = a2  
For i = 3 To n  
u = c1 * t + c2 * v: v = t: t = u  
Next i  
horadam = u  
End Function
```

Si se dispone de estas dos funciones, podemos definir las funciones FIBONACCI(N), PELL(N), LUCAS(N) y demás, igualando su definición a la de Horadam. Por ejemplo, LUCAS(N) se definirá así:

Lucas(n)=horadam(n, 2,1,1,1)

Así tendremos que $lucas(10)=horadam(10,2,1,1,1)=76$, como puedes ver en cualquier descripción de estos números. Imagina que puedes definir así todas estas sucesiones.

El autor lleva años usando FIBONACCI(N) en sus cálculos.

La función ORDEN se puede construir de similar a la que usamos para Primos o capicúas. Puede ser esta:

Function eshoradam(n, a1, a2, c1, c2) As Long

Dim v, u, k, t As Long

Dim es As Long

If n = a1 Then eshoradam = 1: Exit Function

If n = a2 Then eshoradam = 2: Exit Function

v = a1: t = a2: k = 2

While t <= n

If t = n Then

es = k

Elseif t > n Then

es = 0

End If

u = c1 * t + c2 * v: v = t: t = u: k = k + 1

Wend

eshoradam = es

End Function

Nos devuelve el orden k si es un término de la sucesión, o un cero si no lo es.

El autor usa en su hoja de cálculos diarios esta versión, que le permite averiguar si un número dado es de uno de los tipos populares de esta sección:

Function estipohoradam\$(n)

Dim s\$

Dim es As Long

s = ""

es = eshoradam(n, 1, 1, 1, 1): If es <> 0 Then s = s + " Fibonacci " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 2, 1, 1, 1): If es <> 0 Then s = s + " Lucas " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 0, 1, 2, 1): If es <> 0 Then s = s + " Pell " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 1, 1, 2, 1): If es <> 0 Then s = s + " Pell-Lucas " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 2, 3, 3, -2): If es <> 0 Then s = s + " Pisot " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 0, 1, 1, 2): If es <> 0 Then s = s + " Jacobsthal " + " & " + ajusta(es)

es = eshoradam(n, 2, 1, 1, 2): If es <> 0 Then s = s + " Jacobsthal-Lucas " + " & " + ajusta(es)

If s = "" Then s = "No es de ningún tipo"

estipohoradam = s

End Function

Así, por ejemplo, `estipohoradam(76)` nos devuelve *Lucas & 10*, y `estipohoradam(81)`, *No es de ningún tipo*.

Podemos seguir recorriendo tipos de sucesiones recurrentes, como las de Perrin y otras, pero no suelen demandar nuestros trabajos unas funciones directas como las que aquí se han presentado.

Otras recurrencias

El contenido de este texto nos ayuda si necesitamos definir una función para sucesiones que no sean de Horadam, pero el procedimiento para encontrar funciones de este tipo es el mismo, salvo la fórmula de recurrencia.

TEMAS DE COMBINATORIA

COEFICIENTES TRINOMIALES

Los coeficientes trinomiales son una extensión de los binomiales, definidos estos como

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Y que son los coeficientes del binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

De forma análoga se pueden definir los coeficientes trinomiales, propios de un trinomio similar al anterior.

En realidad, los binomiales se podrían expresar de otra forma:

$$\binom{m}{n_1, n_2} = \frac{m!}{n_1! n_2!}, \text{ con } n_1 + n_2 = m$$

A partir de aquí podemos explicar mejor la definición de coeficientes trinomiales:

$$\binom{m}{n_1, n_2, n_3} = \frac{m!}{n_1! n_2! n_3!}, \text{ con } n_1 + n_2 + n_3 = m$$

También, al igual que con los binomiales, los podemos identificar con los coeficientes de la potencia de un trinomio:

$$(a + b + c)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i, j, k} a^i b^j c^k$$

Las demostraciones son similares a las del caso binomial.

Esta fórmula produce siempre resultados enteros positivos, debido al teorema de que un producto de k números consecutivos decrecientes es siempre múltiplo de los k primeros números enteros positivos. Es fácil recordar que coincide con el número de permutaciones con repetición en las que se fija el número de cada una.

Para entender esto mejor podemos descomponer la definición en tres bloques. Lo vemos con un ejemplo:

$$\begin{aligned} \binom{8}{3,2,3} &= \frac{8!}{3!2!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 8 \times 7 \times 10 \times 1 = 560 \end{aligned}$$

A la vista de este esquema de tres cocientes, observamos que el tercer número de la definición no influye en el resultado, luego podemos usar sólo n_1 y n_2 . Incluso estos son intercambiables, los que nos lleva a que el coeficiente trinomial se puede expresar como

$$\binom{m}{n_1, n_2, n_3} = \binom{m}{n_1} \binom{m - n_1}{n_2} = \binom{m}{n_2} \binom{m - n_2}{n_1}$$

En nuestro ejemplo, usando la función COMBINAT de Excel y Calc, nos quedaría:

$$\text{COMBINAT}(8;2)*\text{COMBINAT}(6;3)=560$$

$$\text{COMBINAT}(8;3)*\text{COMBINAT}(5;2)=560$$

Cálculo de un coeficiente trinomial en la práctica

Si no se desea depender de la función COMBINAT, se puede calcular directamente. El problema con el cálculo práctico de un coeficiente de este tipo es que los factoriales alcanzan números muy grandes. Si usamos calculadora o bien hoja de cálculo, los resultados pasan a coma flotante y se pierde el carácter entero de estos coeficientes. Por ello, es conveniente usar el desarrollo del párrafo anterior: dividir los números consecutivos a partir de m entre el primer factorial, los siguientes entre el segundo, y parar el cálculo, porque el tercer factorial produce un uno. En VBasic y otros lenguajes se puede construir una función similar a la siguiente:

Function trinomial(m, x, y, z)

Dim t, k, v

If x + y + z <> m Then trinomial = 0: Exit Function'

Datos no válidos

t = m: k = x: v = 1

While k > 0

v = v * t / k: t = t - 1: k = k - 1 'Divide factores consecutivos entre el primer coeficiente. Es el primer combinatorio de la fórmula.

Wend

k = y

While k > 0

v = v * t / k: t = t - 1: k = k - 1' Igual, en el segundo coeficiente para calcular el segundo combinatorio.

Wend

trinomial = v

End Function

Presenta un pequeño riesgo de redondeo inadecuado, pero suele funcionar bastante bien. Devuelve un cero si los coeficientes de abajo no suman el de arriba. No analiza si los datos son enteros.

Es muy sencillo el traslado a cualquier otro lenguaje de programación, por ejemplo, en PARI, con un rango de datos y resultados mucho mayor:

trinomial(m, x, y, z)=my(t=m,k=x,v=1);while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);k=y;while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);v*(x+y+z==m)

Tal como se esperaba, los valores de estos coeficientes pueden ser grandes. Aquí tenemos un ejemplo:

```
? trinomial(m, x, y, z)=my(t=m,k=x,v=1);while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);k=y;while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);v*(x+y+z==m)
print(trinomial(40,20,15,5))
%5 = (m,x,y,z)->my(t=m,k=x,v=1);while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);k=y;while(k>0,v=v*t/k;t-=1;k-=1);v*(x+y+z==m)
2137172582825280
```

Al ser la primitiva definición simétrica respecto a los índices de abajo, el número total de posibles coeficientes trinomiales para un índice superior **m** dado, es el de particiones de **m** en tres conjuntos. Por ejemplo, para **m=5** las particiones son (5,0,0), (4,1,0), (3,2,0), (3,1,1), (2,2,1), que se corresponden con los posibles valores de los coeficientes, que son 1, 5, 10, 20 y 30. Se comprende

que, en el desarrollo de $(a+b+c)^5$, se tendrán que repetir, como vemos en el siguiente desarrollo:

```
(%i5) ratexpand((x+y+z)^5);
(%o5) z^5+5yz^4+5xz^4+10y^2z^3+20xy^2z^3+10x^2z^3+10y^3z^2+30xy^2z^2+30x^2yz^2+10x^3z^2+5y^4z+20xy^3z+30x^2y^2z+20x^3yz+5x^4z
+y^5+5xy^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y+x^5
```

Con nuestra herramienta Cartesius se puede encontrar el número de estos coeficientes distintos.

(Ver

<https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius>)

Por ejemplo, para $m=7$ plantearíamos:

xtotal=3

xt=0..7

creciente

suma=7

Se interpreta que deseamos encontrar todos los tipos de sumas con resultado 7 y sin tener en cuenta el orden (creciente)

Al resultado se le han añadido manualmente los valores de los coeficientes:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
	0	0	7			1
	0	1	6			7
	0	2	5			21
	0	3	4			35
	1	1	5			42
	1	2	4			105
	1	3	3			140
	2	2	3			210

Estos resultados se corresponden con el desarrollo de una potencia séptima de un trinomio:

$$z^7 + 7yz^6 + 7xz^6 + 21y^2z^5 + 42xyz^5 + 21x^2z^5 + 35y^3z^4 + 105xy^2z^4 + 105x^2yz^4 + 35x^3z^4 + 35y^4z^3 + 140xy^3z^3 + 210x^2y^2z^3 + 140x^3yz^3 + 35x^4z^3 + 21y^5z^2 + 105xy^4z^2 + 210x^2y^3z^2 + 210x^3y^2z^2 + 105x^4yz^2 + 21x^5z^2 + 7y^6z + 42xy^5z + 105x^2y^4z + 140x^3y^3z + 105x^4y^2z + 42x^5yz + 7x^6z + 7xy^6 + 21x^2y^5 + 35x^3y^4 + 35x^4y^3 + 21x^5y^2 + 7x^6y + x^7$$

Como era de esperar, los coeficientes aparecen muy repetidos.

Tetraedro de Pascal

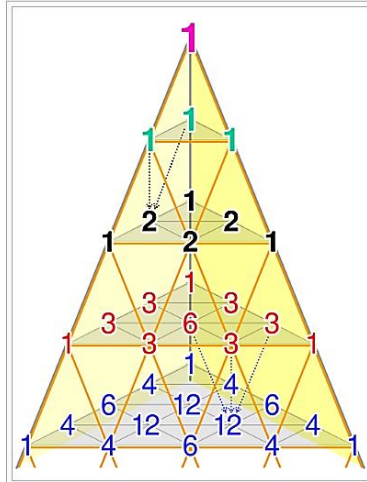
Con la expresión **COMBINAT(m;n1)*COMBINAT(m-n1;n2)** se puede construir un triángulo de coeficientes para un m dado. En una hoja de cálculo se puede visualizar bien. En la imagen figuran los correspondientes a m=7, vistos anteriormente:

7	1								
6	7	7							
5	21	42	21						
4	35	105	105	35					
3	35	140	210	140	35				
2	21	105	210	210	105	21			
1	7	42	105	140	105	42	7		
0	1	7	21	35	35	21	7	1	

Observamos que los lados del triángulo son filas del triángulo de Pascal. Si ahora apilamos triángulos según los valores de m, nos resultará un tetraedro, al que también se le llama de Pascal. En la siguiente página de Wikipedia se explica el proceso:

https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_pyramid

La siguiente imagen pertenece a dicha página:



(Fuente: Wikipedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_pyramid\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_pyramid)

Para quienes deseéis profundizar en el tema. La lectura de esta página es recomendable.

Recurrencia

Es fácil la comprobación de esta recurrencia para calcular coeficientes trinomiales:

$$\binom{n}{n, 0, 0} = \binom{n}{0, n, 0} = \binom{n}{0, 0, n} = 1$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, n_3} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, n_3} + \binom{n-1}{n_1, n_2, n_3-1}$$

En realidad, este es el fundamento del tetraedro de Pascal.

TRIÁNGULO TRINOMIAL

Al igual que construíamos el triángulo de Pascal para binomiales sumando cada dos consecutivos, podemos definir el triángulo trinomial si cada coeficiente es la suma de los tres situados en la fila anterior y sobre él. Los coeficientes de los extremos serán suma de dos o de uno, como si a izquierda y derecha del triángulo existieran ceros. Así quedaría con una hoja de cálculo.

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1

A diferencia de los binomiales, estos coeficientes del triángulo forman filas de longitud impar, $2n+1$, por lo que se puede hablar siempre de términos centrales, que en la imagen son 1, 1, 3, 7 y 19.

Este proceso equivale a la siguiente recurrencia:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ + \binom{n-1}{k} \text{ si están definidos, si no, ceros}$$

Como curiosidad, John D. Cook relaciona estos números con los pasos del rey en el ajedrez para llegar a las distintas posiciones

(ver

<https://www.johndcook.com/blog/2025/05/16/trinomial-coefficients-and-kings/>)

Este triángulo posee diversas propiedades, tal como ocurría con el binomial. Por ejemplo, la primera diagonal de la izquierda contiene los números naturales, 1, 2, 3, 4, ... y la segunda los triangulares, 1, 3, 6, 10, 15, ... Igualmente, si en los binomiales la suma por filas era 2^n , aquí es 3^n . Por ejemplo, $1+3+6+7+6+3+1=27=3^3$

Estos números se pueden interpretar también como los coeficientes de la potencia $(1+x+x^2)^n$

Por ejemplo, para $n=4$ nos queda, en wxMaxima:

```
(%i1) ratexpand((1+x+x^2)^4);
(%o1) x^8 + 4 x^7 + 10 x^6 + 16 x^5 + 19 x^4 + 16 x^3 + 10 x^2 + 4 x + 1
```

Los coeficientes coinciden con los de la fila 4 del triángulo.

Para distinguir estos coeficientes de los binomiales, se suele añadir un 2 a la derecha de su símbolo. El resto queda igual porque vemos que dependen de solo dos

parámetros. Así que, a partir de ahora, los representaremos así:

$$\binom{n}{k}_2$$

En ese símbolo k es un entero que cumple $-n \leq k \leq n$, por lo que puede tomar valores negativos. Lo podemos interpretar como la diferencia entre el lugar central de la fila y el del término definido.

Cálculo directo

Según la Wikipedia, existe una fórmula para el cálculo directo:

$$\binom{n}{k}_2 = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2(n-i)}{n-k-i}_2$$

Usa un sumatorio algo complicado, por lo que es más directo y formativo el seguir la recurrencia definida.

Por recurrencia

El esquema de recurrencia ya presentado se puede traducir a una función directa, en la que dados n y k nos devuelva el coeficiente correspondiente en el triángulo trinomial. Para ello, traducimos las filas de hoja de cálculo a dos vectores $u(i)$ y $v(i)$ que comiencen y terminen con ceros, y con ellos ir construyendo la recurrencia hasta llegar al coeficiente deseado:

Function trinomial2(n, k)

Dim u(50), v(50), i, j, h, t

```

For i = 1 To 2 * n + 3: u(i) = 0: v(i) = 0: Next i 'Se
rellenan los vectores con ceros
u(n + 3) = 1 'Primer coeficiente
For i = 1 To n 'Se trabaja hasta la fila n
For j = 3 To 2 * n + 3 'Longitud de la fila contando con
ceros iniciales
v(j) = u(j - 1) + u(j) + u(j + 1) 'Recurrencia
Next j
For h = 3 To 2 * n + 3: u(h) = v(h: Next h 'Se copia v(i)
en u(i)
For h = 1 To 2 * n + 1: v(h) = 0: Next h 'Y se rellena
con ceros
Next i
t = u(n + k + 3) 'Se localiza el coeficiente pedido
trinomial2 = t
End Function

```

Aunque parece algo complejo, funciona con rapidez. En la imagen se recogen los coeficientes correspondientes a $n=5$ y $n=6$:

	5	6
-6	0	1
-5	1	6
-4	5	21
-3	15	50
-2	30	90
-1	45	126
0	51	141
1	45	126
2	30	90
3	15	50
4	5	21
5	1	6
6	0	1

Coeficientes centrales

Los números centrales de cada fila poseen importancia propia. Por eso, en OEIS, se les dedican muchas referencias y descripciones de propiedades. Aquí sólo se darán algunos detalles, remitiendo para un estudio completo a la página <https://oeis.org/A002426>.

Su cálculo no es difícil. En la página mencionada se usa la definición como coeficientes de $(1+x+x^2)^n$, pero eligiendo el coeficiente número n . Se propone este código PARI de fácil comprensión, extendido aquí con un bucle FOR:

```
a(n) = if( n<0, 0, polcoeff( (1 + x + x^2)^n, n))  
for(k=0,20,print1(a(k), ", "))
```

Su resultado, en la página oficial de PARI es:

```
? a(n) = if( n<0, 0, polcoeff( (1 + x + x^2)^n, n))
for(k=0,20,print1(a(k),", "))
%2 = (n)->if(n<0,0,polcoeff((1+x+x^2)^n,n))
1, 1, 3, 7, 19, 51, 141, 393, 1107, 3139, 8953, 25653, 73789, 212941, 616227, 178760
7, 5196627, 15134931, 44152809, 128996853, 377379369,
```

Coincide con lo publicado.

Con nuestra función trinomial2(n,k) basta dar a k el valor 0. Así se ha efectuado para crear esta columna de Excel:

	Coficiente central
1	1
2	3
3	7
4	19
5	51
6	141
7	393
8	1107
9	3139
10	8953
11	25653
12	73789
13	212941

Una interpretación interesante de estos números es la de David Callan, que los identifica con el número de sucesiones de n elementos tomados del conjunto $(1, 2, 3, \dots, n)$, crecientes en sentido amplio, en las que ningún elemento se repite más de dos veces. Propone como ejemplo si $n = 3$, las sucesiones son 112, 113, 122, 123, 133, 223, 233, es decir, son siete como indica su coeficiente central.

He añadido la condición FMAX a mi herramienta Cartesius

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herr>

[amientas/herrcomb.htm#cartesius](#)) y, aunque aún no está publicada, la he usado para comprobar esta propiedad. He concretado las condiciones siguientes:

xtotal=5

xt=1..5

FMAX<3

Creciente

Con ellas se combinan en arreglos crecientes los números del 1 al 5, con la condición de que la frecuencia máxima sea 2, tal como plantea David Callan, y se han obtenido 51 posibilidades, como corresponde al coeficiente central de orden 5. Este recorte contiene los primeros y su total:

Total	
	51
11223	
11224	
11225	
11233	
11234	
11235	
11244	
11245	
11255	
11334	
11335	
11344	
11345	
11355	
11445	
11455	
12233	
12234	
12235	
12244	

EL CATERING PEREZOSO

El título es traducción libre de la sucesión “Lazy Caterer's Sequence”, que está publicada en la página <https://oeis.org/A000124> con el título *Central polygonal numbers*, que se refiere al máximo número de porciones que se puede obtener en una tarta si la sometemos a n cortes. Su referencia a los números de Hogben, ya tratados en mis cálculos.

(<https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/11/numeros-de-hogben.html>)

me ha llevado a estudiarla, sólo en los aspectos que trato normalmente.

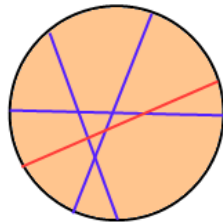
Fórmula de la sucesión

Si solo nos interesan los números máximos de piezas resultantes, deberemos suponer que cada corte posee intersección con todos los anteriores, evitando paralelismos, por lo que se cumplirá que $c(n+1)=c(n)+n$. Como $c(1)=2$, ya que el primer corte produce dos piezas, es fácil ver que la sucesión será: 2, 2+2, 2+2+3, 2+2+3+4, ... pero en OEIS se considera siempre $c(0)$, que aquí sería 1 (ningún corte), por lo que resultaría al final 1, 2, 4, 7, 11, 16, ..., que es la publicada.

El hecho de que la suma de los primeros números naturales sea un número triangular, $n(n+1)/2$, nos da directamente la fórmula de estos números:

$$c(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

En la imagen vemos la generación de $c(4)$, porque de los tres cortes existentes, el cuarto produce 4 nuevos, y el resultado es $4*5/2+1=11$



Si la fórmula de $c(n)$ es $n(n+1)/2+1$, la de $c(n-1)$ será, desarrollando $(n^2-n+2)/2$, y podemos identificar el numerador con un número de Hogben aumentado en una unidad. Esto relaciona las dos sucesiones, pues si añadimos una unidad a la Hogben y dividimos entre 2 nos resulta la que estamos estudiando.

$$c(n) = \frac{h(n+1) + 1}{2}$$

Si emparejamos índices, se comprueba esta relación:

Hogben: 1, 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91

Lazy Caterer's: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46

$(13+1)/2=7$, $(21+1)/2=11$, $(31+1)/2=16$, ...

Los números de Hogben, según es fácil de demostrar, se generan con la recurrencia $h(n+1)=h(n)+2n$, ajustando bien el índice inicial. Es otra forma de razonar la relación entre las dos sucesiones.

Si repasamos mi estudio de estos números, podemos descubrir que los $c(n)$ son la cuarta parte de la suma de dos de $h(n)$ diferenciados en dos órdenes:

$$2=(1+7)/4, 4=(13+3)/4, 7=(21+7)/4, 11=(31+13)/4, \dots$$

Los primeros términos de la sucesión $c(n)$ son:

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191, 211, 232, 254, 277, 301, 326, 352, 379, ...

<https://oeis.org/A000124>

Basta aplicar la fórmula a los primeros números naturales para conseguirla.

Algunas curiosidades

En la página citada se proponen varias propiedades y curiosidades, pero sin desarrollar. Estudiaremos algunas.

Todo proceso en el que el término n ésimo produzca el siguiente al sumarle n puede interpretarse como número del tipo $C(n)$.

Un ejemplo que se propone que el de contar los términos de la expresión $(x+y)^*(x^2+y^2)^*(x^3+y^3)^*...*(x^n+y^n)$.

For $n \geq 1$ $a(n)$ is the number of terms in the expansion of $(x+y)^*(x^2+y^2)^*(x^3+y^3)^*...*(x^n+y^n)$. - Yuval Dekel (dekelyuval(AT)hotmail.com), Jul 28 2003

La justificación es la siguiente: Los primeros términos la cumplen, porque $c(0)=1$, $c(1)=2$ y $c(2)=4$, como fácilmente se comprueba. Los siguientes deberán incrementar los términos en n elementos, porque, por ejemplo, la expresión segunda $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ se convertiría en $x^3*(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+y^3*(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$, aparentemente ocho términos, pero se pierde uno al sumar los dos términos del tipo x^3y^3 , con lo que se suman sólo tres términos, quedando 7, que es $c(3)$. Lo vemos con wxMaxima:

```
ratsimp((x+y)*(x^2+y^2)*(x^3+y^3));
```

```
y^6+x*y^5+x^2*y^4+2*x^3*y^3+x^4*y^2+x^5*y+x^6
```

Siete términos, $c(3)=7$

Se razonaría de igual forma para grado 4. Lo comprobamos:

```
ratsimp((x+y)*(x^2+y^2)*(x^3+y^3)*(x^4+y^4));
```

```
y^10+x*y^9+x^2*y^8+2*x^3*y^7+2*x^4*y^6+2*x^5*y^5+2*x^6*y^4+2*x^7*y^3+x^8*y^2+x^9*y+x^10
```

Once términos, $c(4)=11$

Otra forma de ver las curiosidades es la relación con técnicas de elegir dos elementos en un conjunto. La 165

propuesta de nuestro compatriota Arregui aprovecha ese detalle:

Number of interval subsets of $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (cf. [A002662](#)). - Jose Luis Arregui (arregui(AT)unizar.es), Jun 27 2006

Para fijar un intervalo en el conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bastará elegir un inicio y un final, pero existen $n(n-1)/2$ formas de efectuar la elección, y añadimos el intervalo vacío, obtendremos los términos $C(n)$. Por ejemplo, $\{1\}$ sólo posee el intervalo vacío $()$, $\{1, 2\}$ los intervalos $()$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$, que son $c(2)=4$, $\{1, 2, 3\}$ tendría estos: intervalos $()$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,3)$ $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, en total $c(3)=7$.

Cualquier otro proceso de este tipo, ajustando los índices, se puede representar con los números $c(n)$

Termino con dos propiedades triviales:

Numbers m such that $8m - 7$ is a square. - [Bruce J. Nicholson](#), Jul 24 2017

En efecto, si $T(n)$ es triangular, $8T(n)+1$ es un cuadrado, según una popular propiedad, luego $8C(n)-7=8T(n)+8-7=8T(n)+1$, que es un cuadrado.

$a(n)$ is the sum of the first three entries of row n of Pascal's triangle. - [Daniel T. Martin](#), Apr 13 2022

En efecto, los tres primeros términos son 1 , n y $n(n-1)/2$ y su suma $1+(n^2-n+2n)/2=1+n(n+1)/2=c(n)$. Por ejemplo, para $n=4$ queda $1+4+6=11=c(4)$

Recurrencia lineal

Las sucesiones dependientes de cuadrados suelen presentar esta recurrencia: $a(n+3) = 3*a(n+2) - 3*a(n+1) + a(n)$. En nuestro caso los términos iniciales son 1, 2, 4. Con mi herramienta de recurrencias se puede comprobar.

(<https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2>)

Rellenamos las condiciones iniciales:

Coeficientes			
A	<input type="text" value="3"/>	B	<input type="text" value="-3"/>
C	<input type="text" value="1"/>		
Valores iniciales			
x0	<input type="text" value="1"/>	x1	<input type="text" value="2"/>
		x2	<input type="text" value="4"/>

Pedimos ver la sucesión:

1
2
4
7
11
16
22
29
37
46
56
67
79
92
106
121

Como era de esperar, obtenemos $C(n)$

Como los números de Hogben también dependen de un cuadrado, se obtendrán con una recurrencia idéntica, pero iniciando en 1, 1, 3:

Coeficientes							
A	3	B	-3	C	1		
Valores iniciales							
x0	1	x1	1	x2	3		

Pedimos ver la sucesión y obtenemos $H(n)$:

1
1
3
7
13
21
31
43
57
73
91
111
133
157
183

En nuestra entrada de blog sobre estos números se explica el fundamento de que esta recurrencia sea válida para expresiones de segundo grado.

NÚMEROS DE PASTEL

Estos números constituyen una extensión natural de los traducidos como “Catering perezoso” (o también como “Cortador perezoso”), que ya se han estudiado en mi blog. Si aquellos contaban el máximo de cortes rectilíneos sobre una tarta o pizza, considerados en dos dimensiones (todos frontales a la superficie mayor de la tarta), aquí se trata de cortar un cubo o una tarta mediante cortes planos que actúan sobre tres dimensiones. Buscaremos siempre el número máximo de partes, por lo que no se consideran planos paralelos, ni cortes paralelos, ni varios planos incidentes en el mismo punto.

Siguiendo las ideas de Peter C. Heinig en <https://oeis.org/A000125>, podemos contemplar tres escalas de complejidad en estos cortes:

Una dimensión, cortes sobre una recta. Es evidente que el número máximo de regiones para n cortes es

$$C_1(n) = \text{binomial}(n,0) + \text{binomial}(n,1) = 1 + n$$

En el caso de un plano, vimos, en la sucesión de catering perezoso,

<https://hojaynumeros.blogspot.com/2026/02/el-catering-perezoso.html>, que el número era: $n(n+1)/2 + 1$, que también se puede escribir como

$$C_2(n) = \text{binomial}(n,0) + \text{binomial}(n,1) + \text{binomial}(n,2)$$

En nuestro caso actual, sobre tres dimensiones, es fácil razonar que su expresión es $C(n+1,3)+n+1=(n+1)n(n-1)/6+n+1$, lo que nos llevaría a

$$C_3(n) = \text{binomial}(n,0) + \text{binomial}(n,1) + \text{binomial}(n,2) + \text{binomial}(n,3)$$

Lo vemos:

Una tarta, con el corte mediante un solo plano se divide en dos partes, y se cumple $C(1)=0+1+1=2$

Para dos cortes obtenemos cuatro partes como máximo, y se cumple:

$$C(2)=3*2*1/6+2+1=4$$

Aquí podemos seguir por inducción: Supongamos efectuados los $n-1$ cortes primeros. Al cortarlos con un nuevo plano, si ese número es máximo, se formarán en el nuevo plano el máximo de cortes posible, que sabemos que es $C_2(n-1)$, y serían elementos de la sucesión del catering perezoso, luego $C_3(n)= C_3(n-1)+C_2(n-1)$, y quedaría:

$$C_3(n)= C_3(n-1)+(n-1)n/2+1=n(n-1)(n-2)/6+n+(n-1)n/2+1$$

Mediante el programa wxMaxima comprobamos la identidad entre este resultado y el propuesto. En el recorte de pantalla observamos además que las expresiones se pueden simplificar bastante:

Esta propiedad nos permite identificar los números de pastel con el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos cuyo cardinal **no supere los tres elementos**. Expresado de otra forma, la suma del número de combinaciones de n elementos tomados de 0, 1, 2 o 3 elementos.

Al igual que ocurría con la sucesión del catering perezoso, la existencia de una fórmula tan directa hace inútil la búsqueda de otro algoritmo o función. Basta organizar una tabla con esa fórmula:

N	C(N)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	15
5	26
6	42
7	64
8	93
9	130
10	176
11	232

Coinciden los valores extraídos del triángulo de Pascal y con los publicados en <https://oeis.org/A000125>,

Recurrencia

Con la fórmula básica se puede llegar a números de orden grande, pero quizás se prefiera una recurrencia

por la rapidez de cálculo. En la página de OEIS citada se propone la siguiente:

$$a(n) = 4*a(n-1) - 6*a(n-2) + 4*a(n-3) - a(n-4).$$

Bastará, pues, crear una columna con los cuatro primeros en una hoja de cálculo y después aplicar la fórmula a esos cuatro y rellenar hacia abajo hasta el punto que deseemos.

Comienzo:

1				
2				
4				
8	<i>Los cuatro primeros, definidos</i>			
15	<i>4*AE68-6*AE67+4*AE66-AE65</i>			

Escribimos los cuatro primeros, y al quinto le aplicamos la fórmula de recurrencia.

Segundo paso

Rellenamos hacia abajo la fórmula:

	1				
	2				
	4				
	8	<i>Los cuatro primeros, definidos</i>			
	15	$4*AE68-6*AE67+4*AE66-AE65$			
	26				
	42				
	64				
	93				
	130				
	176				
	232				
	299				
	378				

De esta forma, en segundos, llegamos al orden que deseemos:

2325
2626
2952
3304
3683
4090
4526
4992
5489
6018
6580
7176
7807

Las recurrencias lineales son muy útiles para construir tablas de forma casi instantánea.