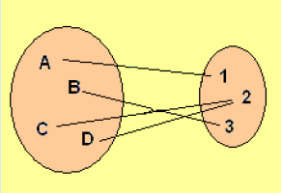
Combinatoria



Edición 2024

Colección Hojamat.es

© Antonio Roldán Martínez

http://www.hojamat.es

El presente documento sólo contiene dos partes muy difrentes: en la primera se repasan los conceptos básicos de la Combinatoria de tipo medio de dificultad, y en la segunda se irán incuyendo algunos temas estudiados con más detenimiento. No constituye un tratado completo ni ese es su objetivo.

CONTENIDO

Combinatoria ..... **¡Error! Marcador no definido.**

Breve esquema teórico ..... **¡Error! Marcador no definido.**

Contenido 2

Conceptos elementales..... 4

Producto cartesiano, correspondencias y aplicaciones 4

Factoriales..... 6

Variaciones, permutaciones y combinaciones 6

Principios combinatorios 12

Principio de la Adición 12

Principio de la Multiplicación..... 12

Principio de Distribución 13

Principio de Inclusión y exclusión 14

Números combinatorios 15

Grupos de permutaciones - Ciclos..... 16

Desarreglos 21

Temas monográficos 24

Particiones de un conjunto 24
Particiones de un número 25
Función de partición Pk(N) 28
Función de partición Q(N) 29
Funciones generatrices 30
Un ejemplo introductorio 30
La teoría 32
Combinaciones y variaciones 38
Particiones y funciones generatrices 44
Particiones con sumandos restringidos 49
Collares bicolores 52
Introducción 52
Órbitas y estabilizadores 54
Conteo de collares 57
Curiosidades 61
Suma de los elementos de todos los subconjuntos 61
Función “parking” 64
Rachas de dígitos 68
¿Variaciones o combinaciones? 75
Máximo producto en la partición de un número 76
Sumas del tipo m+n+mn 78
Unos números de Lah 80

CONCEPTOS ELEMENTALES

Independientemente de la definición que se elija para la Combinatoria, es evidente que sus fundamentos están en los conjuntos y las correspondencias entre ellos. Después, en la práctica se pueden usar los conceptos de ordenación, permutación o elección, pero todos ellos están relacionados por el término básico de *correspondencia unívoca* o *aplicación* entre conjuntos.

PRODUCTO CARTESIANO, CORRESPONDENCIAS Y APLICACIONES

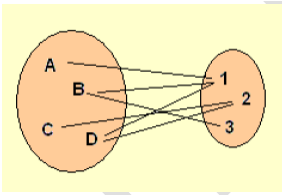
El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es otro conjunto cuyos elementos son todos los pares posibles formados por un elemento de A y otro de B en ese orden. Se representa como A×B

X	A	B	C	D
1	A1	B1	C1	D1
2	A2	B2	C2	D2
3	A3	B3	C3	D3

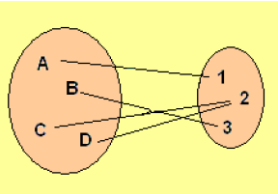
Una **correspondencia** entre dos conjuntos es cualquier subconjunto de su producto cartesiano. En la práctica consiste en asignar **una pareja o varias a todos o algunos elementos del conjunto.**

X	A	B	C	D
1	A1	B1		D1
2			C2	D2
3		B3		

Se puede representar con diagramas de conjuntos



Una **aplicación** es una correspondencia en la que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento del segundo conjunto y solo uno. También se le llama correspondencia *unívoca*.



Según esta definición podremos asignar un nombre (por ejemplo G) a la aplicación y usar la notación G(A)=B, en la que expresamos que al elemento A del primer conjunto le asignamos el elemento B del segundo. En este caso, a A la llamaremos *origen* o *antecedente*, y al B, *imagen.* Así, en el diagrama de la figura, se puede afirmar que G(A)=1, G(B)=3, G(C)=2, G(D)=2.

Como se ve, la definición permite que dos orígenes compartan la misma imagen. Al conjunto de todas las imágenes le llamaremos **Recorrido, Rango o Conjunto Imagen** de la aplicación G. Si el conjunto de orígenes es A, el de imágenes será G(A). Al conjunto de todos los orígenes, que según la definición es todo el primer conjunto, le llamaremos **Dominio** de la aplicación.

Una aplicación es *suprayectiva* si su conjunto imagen coincide con todo el segundo conjunto, *inyectiva* si a orígenes distintos les corresponden imágenes distintas, y *biyectiva* si presenta las dos propiedades anteriores.

Si dos conjuntos admiten una correspondencia biyectiva se llamarán *coordinables*, con la propiedad de que tendrán el mismo cardinal. Esta propiedad es básica en combinatoria.

Para más detalles debes consultar cualquier texto de Matemáticas.

FACTORIALES

Llamaremos factorial de un número natural n (o el cero) a otro número natural **n!** definido por

a) Si n=0 su factorial se define como 1: 0! = 1
b) Si n=1 definiremos su factorial como 1: 1! = 1
c) Si n>1 su factorial viene dado por la expresión n! = 2.3.4.....(n-1).n

Podemos también definir el factorial por recurrencia:

0! =1 ; n! = n*(n-1)!

También se llama ***factorial de n de grado k y diferencia d*** al producto

a(a-d)(a-2d)..... (hasta k factores)

Si la diferencia es **d=1**, el factorial se representa por

$\mathbf{a^{(n} = a(a-1)(a-2)(a-3).....(a-k+1)}$

Es fácil demostrar que $a^{(n}$ es divisible entre n!

Igualmente, llamaremos ***semifactorial*** de un número natural **n** al producto **n(n-2)(n-4)(n-6)....** terminando el producto en 2 o 1, según la paridad de **n** y lo representaremos así: **n!!**

En hojas de cálculo el factorial ordinario se representa como FACT(N). Es una notación mucho más cómoda que la clásica n!

VARIACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Arreglos

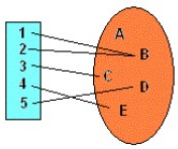
Llamaremos **arreglo** en un conjunto finito a cualquier sucesión también finita formada por elementos de ese conjunto. Al ser el

arreglo una sucesión, intervendrá en él el orden, y se podrán repetir elementos. Estas dos características distinguen los arreglos de los subconjuntos.

En los textos de Combinatoria encontrarás varias formas de nombrar estas sucesiones:

- **Palabras**, en recuerdo de las palabras de un idioma, en las que sí interviene el orden y pueden repetirse elementos
- **n-plas**, que es la notación más usada en textos clásicos.
- **Selecciones ordenadas**: es una denominación muy sugerente, porque describe perfectamente la construcción de cualquier arreglo.

Se puede caracterizar cada arreglo como una aplicación de un conjunto finito de números naturales del tipo {1, 2, 3, 4,... } sobre elementos del conjunto.



El arreglo representado en la imagen se corresponde con la sucesión {B, B, C, E, D}

También se podría representar como u_1=B, u_2=B, u_3=C, u_4=E, u_5=D.

Aquí usaremos preferentemente la notación {B, B, C, E, D}

Este concepto permite desarrollar las definiciones clásicas de variaciones y permutaciones.

Variaciones con repetición

Llamaremos **variaciones con repetición** de **m** elementos tomados de **n** en **n**, (simbolizadas por **VRm,n**) a todos los arreglos de **n** elementos que se pueden formar en un conjunto de **m** elementos, **si se permite la repetición de los mismos**. En términos de

aplicaciones de conjuntos, en este caso se trataría de una aplicación no inyectiva entre el conjunto {1, 2, 3,…,n) y el conjunto {a_1, a_2, a_3, …, a_m)

Segçún esta definición, en las variaciones interviene el orden.

El arreglo de la imagen anterior es un ejemplo de variación con repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5.

El número total de variaciones de este tipo viene dado por la fórmula **VRm,n = m^n**

En el ejemplo anterior el número total de variaciones sería 5^5 = 3.125

Otro ejemplo: el número total de posibles quinielas de 14 partidos será 3^{14} = 4.782.969

Variaciones sin repetición

Llamaremos **variaciones sin repetición** de **m** elementos tomados de **n** en **n**, (simbolizadas por **Vm,n**) a todos los arreglos de **n** elementos que se pueden formar en un conjunto de **m** elementos, **si no se permite la repetición de los mismos**. Si deseamos usar el concepto de aplicación, se trataría de una aplicación inyectiva entre el conjunto {1, 2, 3,…,n) y el conjunto {a_1, a_2, a_3, …, a_m)

Se pueden considerar otras interpretaciones de las variaciones:
- Formas de elegir ordenadamente **n** elementos distintos de un conjunto de **m** elementos
- Órdenes totales posibles definidos en todos los subconjuntos de orden **n**.

El número total de variaciones de este tipo viene dado por la fórmula

Vm,n = m(m-1)(m-2)...(m-n+1) = m!/(m-n)!

Según la notación explicada más arriba, esta expresión también se puede escribir como $\mathbf{m^{(n}}$

Dos variaciones se pueden distinguir entre sí o por los elementos que contienen o por su orden. Esta es la caracterización clásica de las variaciones.

Si en una carrera intervienen 9 atletas, la composición del podio puede presentar V9,3=9*8*7 = 504 resultados distintos.

Permutaciones ordinarias

Se llaman permutaciones ordinarias o sin repetición (**Pn**) a las variaciones sin repetición en las que **m=n**, es decir, que en cada arreglo entran **todos** los elementos del conjunto.

Dos permutaciones sobre un conjunto se distinguen sólo por el orden de los elementos. Por ello se pueden identificar con los distintos órdenes que se pueden establecer en los elementos de un conjunto.

También se llaman permutaciones a las **aplicaciones biyectivas** de un conjunto en sí mismo. Es el concepto tradicional de **sustitución** en un conjunto. Más adelante trataremos este concepto de permutación como aplicación biyectiva interna en un conjunto.

El número de permutaciones formadas con un conjunto de n elementos coincide con su factorial: **Pn = n!**

Un caso especial de permutaciones es el de las **circulares**, que son las distintas formas de ordenar unos objetos en círculo (por ejemplo, invitados a una cena). Su número es (**n-1)!**

Permutaciones con repetición

En los distintos órdenes posibles quizás se desee admitir la repetición de algunos elementos un número determinado de veces.

Por ejemplo, en la palabra CATAPULTA, si quisiéramos ordenar sus letras, deberíamos admitir que la A se repitiera tres veces y la T dos. Llamaremos permutaciones con repetición a estas ordenaciones.

Para calcular el número de permutaciones de este tipo bastará dividir el factorial del número total de símbolos, contando sus repeticiones, entre el número de veces que se repite cada uno.

$$P_{n,a,b,c} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

En el ejemplo, el número de permutaciones de la palabra CATAPULTA sería de 9!/(3!*2!) =30240

Combinaciones

Llamaremos **combinaciones** de **m** elementos tomados de **n** en **n**, (simbolizadas por **Cm,n**) a todos los subconjuntos de **n** elementos que se pueden formar en un conjunto de **m** elementos.

Por su propia definición se deduce que el orden no interviene para distinguir unas combinaciones de otras.

El número total de combinaciones viene dado por la fórmula

$$C_{m,n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición ***CRm,n*** de **m** elementos tomados de **n** en **n** admiten varias definiciones. Se usan todas porque es un concepto más difícil que los anteriores y para abrir aplicaciones diversas de este tipo de arreglos.

Podemos elegir las siguientes:

(1) Son los distintos arreglos que se pueden formar en un conjunto de **m** elementos de forma que en cada uno se elijan **n** elementos que pueden ser repetidos y se diferencien unos arreglos de otros sólo en los elementos que los forman y no por el orden elegido.

(2) Son aplicaciones del conjunto (1,2,3...n) en el conjunto dado con la condición de que sean crecientes en sentido amplio. Esta definición se entenderá bien.

(3) Las ***CRm,n*** equivalen a un reparto de **m** objetos en **n** cajas. Se supone que dentro de las cajas no se tiene en cuenta el orden. Para muchas cuestiones resulta ser la mejor definición.

(4) Las ***CRm,n*** equivalen al conjunto de todas las soluciones enteras positivas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$

La fórmula para calcular CRm,n se puede expresar de varias formas:

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n-1}{m-1}$$

PRINCIPIOS COMBINATORIOS

Casi todos los problemas combinatorios elementales se pueden resolver con las definiciones y fórmulas anteriores, el concepto de Producto Cartesiano y los principios fundamentales que se explican a continuación.

Representaremos por Card(A) el cardinal de un conjunto A, es decir, su número de elementos si es finito.

PRINCIPIO DE LA ADICIÓN

Dados los conjuntos A_1, A_2,...A_k, disjuntos dos a dos, se cumple que

$$Card(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = Card(A_1) + Card(A_2) + ... + Card(A_k)$$

Es decir, que para contar los elementos de la unión de varios conjuntos disjuntos, deberemos **sumar**.

Consecuencias de este principio (que se puede demostrar rigurosamente) son:

Si A está incluido en B, el cardinal de A será menor o igual que el de B

Si A y B no son disjuntos, el principio de adición se deberá corregir así:

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Es decir, en la suma se deben restar los elementos repetidos

Esta fórmula se generaliza fácilmente a varios conjuntos, con la particularidad de que las intersecciones aparecerán con signos más o menos según el número de conjuntos que abarquen.

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN

Si los conjuntos A_1, A_2,...A_k, son no vacíos, se cumple que

$Card(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k) = Card(A_1) \times Card(A_2) \times ... \times Card(A_k)$

Podemos traducir este principio a la idea de que al combinar mediante pares, ternas, etc. varios conjuntos, el número total de elementos resultantes equivale al producto de los cardinales de los conjuntos que se combinaron.

Como consecuencia, el número de aplicaciones que se pueden construir entre un conjunto A de cardinal n y otro B de cardinal m viene dado por

$A^B = m^n$

Este principio también se aplica cuando un arreglo se construye en varias etapas y las posibilidades de cada una son independientes de los resultados anteriores, por ejemplo en una tirada de tres dados.

También es útil al combinar dos conjuntos de arreglos distintos, como en las matrículas de los coches **D - 1234 - AZ**, en las que se combinan tres variaciones distintas.

PRINCIPIO DE DISTRIBUCIÓN

Este principio se conoce también como *Principio de las cajas, del palomar o de Dirichlet*

Lo desarrollaremos en dos versiones equivalentes:

(a) Si repartimos **m** objetos en **n** cajas, y **m>n**, entonces, al menos una caja deberá contener 2 objetos o más.

(b) Si se reparten **np+m** objetos en **n** cajas, entonces alguna caja deberá contener al menos **p+1** objetos.

Ambos principios, que resuelven muchas cuestiones combinatorias, los damos sin demostración.

Según ellos, en una clase con 35 alumnos, habrá al menos dos que compartan el mismo número de día del mes como cumpleaños. "Ambos nacieron un 12, pero de distinto mes". Si en un centro de enseñanza hay más de 366 alumnos, habrá al menos dos que compartan la misma fecha de cumpleaños. Lo que no sabemos es qué fecha será esa.

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN

Se llama así a la fórmula obtenida anteriormente

$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

y a su generalización para más de dos conjuntos. Por ejemplo, para tres sería

$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$

En el caso de varios conjuntos aparecerían signos - en las intersecciones de un número par de conjuntos y signo + en las de número impar:

$Card(\cup S_i) = \sum Card(S_i) - \sum Card(S_i \cap S_j) + \sum Card(S_i \cap S_j \cap S_k) + ... + (-1)^n \sum Card(S_i \cap ... \cap S_n)$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Los números combinatorios o binomiales se definen por la fórmula

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Equivalen al número de **combinaciones sin repetición** de **n** elementos tomados de **r** en **r**. También se llaman coeficientes binomiales, por serlo en el binomio de Newton.

En hoja de cálculo se representan como **COMBINAT(M;N)**.

Sus principales propiedades son:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

que aplicándola reiteradamente nos lleva a esta otra

$$\binom{n}{r} = \sum_{i=1}^{n-p-1} \binom{n-i}{p-i}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k}$$

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

(Identidad de Vandermonde)

Su conjunto ordenado en forma de triángulo toma el nombre de ***Triángulo de Pascal, de Tartaglia o Aritmético***

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Es clásica la fórmula del Binomio de Newton, que expresa la potencia de un binomio en términos de números combinatorios. Su desarrollo es

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-1}$$

Mediante la sustitución de **a** y **b** por valores adecuados (1, -1,...) se pueden demostrar bastantes propiedades, como algunas de las contenidas en párrafos anteriores.

GRUPOS DE PERMUTACIONES - CICLOS

Como una permutación equivale a una aplicación biyectiva de un conjunto en sí mismo, al igual que estas, formará **un grupo** (el grupo **simétrico** del conjunto) para la operación de **componer aplicaciones**. Toda la teoría que sigue es independiente del tipo que tengan los elementos del conjunto, por lo que supondremos en toda la sección que trabajamos con {1, 2, 3, …, n}

Es trivial considerar que se cumple la propiedad asociativa, que existe una permutación identidad (en la que no se altera el orden existente) y una permutación inversa.

Este grupo no posee la propiedad conmutativa. En general S*S' produce un resultado distinto a S'*S, pero sí existirán sustituciones permutables entre sí, como por ejemplo una sustitución y su inversa. Para destacar el carácter de aplicaciones biyectivas, las permutaciones las podemos escribir así:

(1 2 3 4 5 6 7 8)
(2 1 8 4 6 7 5 3)

en las que el conjunto de arriba sería el origen y el de abajo la imagen. Al conjunto de arriba le podemos llamar **numerador** y al de abajo **denominador**. Si aplicamos una misma permutación a ambos no se altera la correspondencia entre orígenes e imágenes, por lo que podemos escribir el numerador siempre en el mismo orden, al que llamaremos **principal**. Así, con números, podemos usar el orden creciente1, 2, 3, 4...

A este grupo le llamaremos **Grupo de Sustituciones** S_n del conjunto. Su número de elementos será **n!**

Descomposición en ciclos

Si en una permutación vamos recorriendo los transformados de cada elemento de forma consecutiva, pudiera ser que uno de ellos coincidiera con el primero, con lo que se habría cerrado un **ciclo o permutación circular**. Así, la permutación

(1 2 3 4 5 6 7 8)
(2 1 8 4 6 7 5 3)

contiene un ciclo que recorre 5 - 6 - 7 - 5, otro formado por el 3 y el 8, otro por el 1 y el 2 y un último que forma 4 consigo mismo.

Al considerar un ciclo se debe recordar que actúa sobre k elementos dejando invariantes los n-k restantes. Otro hecho que se debe tener en cuenta es que dentro del ciclo es indiferente cuál sea el primer elemento que se escriba. Así, (3,4,2), (4,2,3) y (2,3,4) representan el mismo ciclo.

Toda permutación se puede descomponer en ciclos. Si prescindimos de escribir el conjunto origen, podríamos expresar este hecho de la siguiente forma:

(2 1 8 4 6 7 5 3) = (1 2)(3 8)(4)(5 6 7)

Esta descomposición es única salvo el orden y la forma de escribirla. Para encontrarla podemos usar este procedimiento sistemático:

Elegimos el elemento 1, y aplicamos la permutación de forma reiterada hasta que la imagen vuelva a ser 1. Como el conjunto es finito, esto se acabará logrando, con lo que ya tendremos el primer ciclo de la descomposición. Buscamos después el siguiente elemento que no pertenezca al ciclo conseguido (si hemos acabado es que la permutación estudiada se reduce a un solo ciclo, es cíclica) y efectuamos la misma operación para obtener el segundo ciclo, y así sucesivamente hasta agotar el conjunto.

Como cada ciclo opera sobre elementos distintos, dos ciclos de una misma descomposición serán siempre **permutables**.

La potenciación de sustituciones se define como su composición reiterada: S^n = S*S*S...*S (n veces). Es también trivial demostrar que el conjunto de potencias de una sustitución S forma un subgrupo, llamado **cíclico** o **monógeno** engendrado por S

Recordamos la definición de **orden** de un elemento **a** en un grupo **G**, como el menor exponente natural (en notación multiplicativa) para el que $\mathbf{a^n = I}$ (identidad). Esto también es válido para sustituciones, y los grupos cíclicos engendrados por S, que tendrá cada uno un **orden**, que coincide con su número de elementos. Según la teoría de grupos, todos los órdenes serán divisores de n!

Es fácil demostrar esta propiedad:

Si una permutación se descompone en ciclos, su orden coincidirá con el M.C.M de los órdenes de dichos ciclos.

Así, la sustitución del ejemplo anterior tendrá orden 6.

Cálculos interesantes

Permutaciones circulares o cíclicas

Puede ocurrir que una permutación sea en sí misma un ciclo. La llamaremos cíclica o circular. Dentro del grupo simétrico S_n el número de permutaciones cíclicas equivale a (n-1)! Es algo muy conocido y se justifica porque para inventarte una permutación de este tipo en primer lugar ordenar todos los elementos, lo que puedes realizar de n! formas diferentes y una vez elegida una, esta representa n circulares idénticas, porque tienes n formas de elegir el primer elemento, luego el número es n!/n=(n-1)!

Permutaciones de n elementos que son ciclos de orden k

Deberemos elegir k elementos para el ciclo y dejar los restantes n-k fijos. El elegirlos nos supone Cn,k formas y dentro de los elegidos, (k-1)! ciclos posibles, luego el número total de ciclos de orden k será

$$\binom{n}{k}(k-1)!$$

Permutaciones reducidas

Son aquellas que no dejan fijo ningún elemento, las que en la descomposición en ciclos ninguno de ellos tiene orden 1. Son las conocidas como desarreglos, que explicaremos más adelante.

Paridad de una permutación

Un caso particular de ciclo es el compuesto sólo por dos elementos. En este caso lo llamaremos **transposición**, y consiste en la permutación entre esos dos elementos, por ejemplo (3 8)

Todo ciclo se descompone en transposiciones, pero no de forma única. Así, tenemos que (1 2 3) = (1 2)(1 3) = (1 3)(2 3).

Lo que sí se conserva la **paridad**: todas las descomposiciones en ciclos de una misma permutación comparten el tener un número par o bien impar de transposiciones. Llamaremos permutación **par** a aquella que se puede descomponer en un número par de transposiciones, e igualmente definiremos la permutación **impar**.

Es fácil ver que transponiendo dos elementos de una permutación se añade o se quita una transposición, con lo que todas las permutaciones pares se pueden convertir de esta forma en pares, y viceversa. Por tanto.

En todo conjunto de n elementos se pueden definir n!/2 permutaciones pares y n!/2 impares

También es fácil demostrar que las pares forman **un semigrupo,** llamado **grupo alternado** del conjunto sobre el que actúan. No así las impares, que al componerse entre sí producen una par.

Se puede definir la **signatura** de una permutación como el número +1 si es par y el -1 si es impar.

Números de Stirling de primera clase.

Dado el grupo de permutaciones $\mathbf{S_n}$ sobre un conjunto de **n** elementos, se podría plantear la cuestión de cuántas permutaciones se pueden descomponer exactamente en k ciclos. A este número **S1(n,k)** así definido lo llamaremos **Número de Stirling de primera clase**.

Por ejemplo, el número S1(4,3) = 6 significa que hay seis permutaciones de 4 elementos (por ejemplo. en el conjunto 1234) que se pueden descomponer en 3 ciclos. Serían estas: (1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23), (2)(3)(14), (2)(4)(13) y (3)(4)(12).

Se puede definir S1(n,0) con n>0 como 0, y aceptaremos que S1(0,0)=1 y que S1(0,n)=0.

Es claro que se cumple que S1(n,n)=1 pues sólo obtendríamos la permutación identidad, y es fácil demostrar que S1(n,1)=(n-1)!

Los primeros números de Stirling de primera clase son

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

La propiedad fundamental de estos números, y que permite generarlos en una tabla, es la siguiente:

S1(n,r) = (n-1)*S1(n-1,r)+S1(n-1,r-1)

Se puede comprobar en la tabla.

DESARREGLOS

Dentro del grupo de permutaciones son interesantes aquellas llamadas ***desarreglos,*** en las que la imagen de cada elemento es distinta del mismo. Por ejemplo, S=3412, es un desarreglo, pues S(1)=2, S(2)=4, S(3)=1, S(4)=2. Un ejemplo clásico es el de las cartas a las que se asignan sobres con la dirección ya escrita, y si se emparejan al azar, los desarreglos se producirían cuando

todas las cartas se metieran en un sobre inadecuado (Problema de los sobres o de Montmort)

Si llamamos S a un desarreglo, se deberá cumplir que S(i) sea distinta de i para todo i del conjunto.

Para conseguir su fórmula es mejor contar las permutaciones contrarias F, es decir, en la que existe algún elemento fijo S(i)=i. Basta considerar que las que dejan fijo un sólo elemento son en total (n-1)!, las que dejan 2, (n-2)!... pero cada una deberá ser multiplicada por las formas de elegir un elemento, o dos, o tres, etc., es decir las combinaciones de los elementos que son fijos. Por el principio de inclusión-exclusión quedará:

$$F = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! \ldots - (-1)^n \binom{n}{n}$$

El número de desarreglos D equivaldrá a la diferencia de F con el número total de permutaciones, luego quedará:

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

que se suele escribir más bien de esta forma:

$$D = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

El resultado de esta fórmula recibe también el nombre de **subfactorial**, y se representa por !n.

El paréntesis es el desarrollo del número **1/e** truncado por los términos que dan cocientes enteros con n! Por ello podemos interpretar esta fórmula como "el número entero más cercano a n!/e"

Una propiedad importante de D_n, derivada de la fórmula anterior, es que tiende al límite (1/e)n! = 0,36787944n! cuando n tiende a infinito. Por tanto, para valores grandes de **n** podemos suponer que

un 37% de las permutaciones de un conjunto de n elementos son desarreglos.

D_n también se calcula mediante recurrencias. Se puede demostrar que $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$, lo que unido a que $D_1=0$ y $D_2=1$ nos da la lista de los primeros subfactoriales: 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854...

Curiosidad:

El numero 148,349 es el único numero en que es igual a la suma de los subfactoriales de sus dígitos:

$$148{,}349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9$$

TEMAS MONOGRÁFICOS

PARTICIONES DE UN CONJUNTO

Una partición de un conjunto C es una familia X de subconjuntos, disjuntos dos a dos, cuya unión coincide con el conjunto total. Es decir:

$\cup X_i = C$; $X_i \cap X_j = \varphi$ para todo par i, j

Es interesante preguntarse cuántas particiones distintas de k conjuntos se pueden definir en un conjunto de n elementos. El resultado se denomina como **número de Stirling de segunda clase** y lo representaremos por S2(n,k). Así, el número S2(5,4) representará el número de particiones distintas en cuatro conjuntos disjuntos que se pueden definir en un conjunto de 5 elementos. Por ejemplo, en el conjunto {1,2,3,4,5} se pueden definir estas particiones de 4:

{1}{2}{3}{45}, {1}{2}{4}{35}, {1}{2}{5}{34}, {1}{3}{4}{25}, {1}{3}{5}{24}, {1}{4}{5}{23}, {2}{3}{4}{15}, {2}{3}{5}{14}, {2}{4}{5}{13}, {3}{4}{5}{12}.

En total 10, como se puede comprobar en la tabla de abajo.

Es claro que S2(n,0)=0 y que S2(n,1)=S2(n,n)=1 porque sólo hay una forma de partir un conjunto de n elementos en conjuntos de n elementos (él mismo) y también una sola forma de partirlo en n subconjuntos (los de un solo elemento).

La propiedad que permite generar estos números es:

S2(n,r) = r*S1(n-1,r)+S1(n-1,r-1)

Puedes comprobar esta propiedad en la siguiente tabla de números de Stirling de segunda clase:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

El número total de particiones que admite un conjunto, independientemente de su estructura, se llama **número de Bell** del conjunto y se representa por B(n). Es evidente que se pueden deducir de los anteriores sumando toda una fila. Los primeros números de Bell son, por tanto:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	**1**	**2**	**5**	**15**	**52**	**203**	**877**	**4140**	**21147**	**115975**

PARTICIONES DE UN NÚMERO

En toda esta sección nos referiremos a la descomposición de un número en sumandos.

Se llaman **particiones de un número natural N** a las distintas formas de descomponerlo en sumandos enteros positivos sin tener en cuenta el orden y admitiendo repetición de sumandos. Para no

tener en cuenta el orden se puede exigir que los sumandos sean decrecientes en sentido amplio. Así es más fácil representarlos.

Al número total de particiones de N lo representaremos por la función P(N). Por tanto la afirmación anterior se puede representar como P(9)=30.

En efecto, el 9 se puede descomponer en estas sumas:

9, 8+1, 7+2, 7+1+1, 6+3, 6+2+1, 6+1+1+1, 5+4, 5+3+1, 5+2+2
5+2+1+1, 5+1+1+1+1, 4+4+1, 4+3+2, 4+3+1+1, 4+2+2+1, 4+2+1+1+1
4+1+1+1+1+1, 3+3+3, 3+3+2+1, 3+3+1+1+1,
3+2+2+2, 3+2+2+1+1, 3+2+1+1+1+1
3+1+1+1+1+1+1, 2+2+2+2+1, 2+2+2+1+1+1, 2+2+1+1+1+1+1,
2+1+1+1+1+1+1+1
1+1+1+1+1+1+1+1+1

Son 30 en total

Cada posible suma se puede representar mediante los llamados diagramas de Ferrer, en los que los sumandos se dibujan como conjuntos en filas.

Por ejemplo, 3+2+2+1+1 se puede representar así:

OOO
OO
OO
O
O

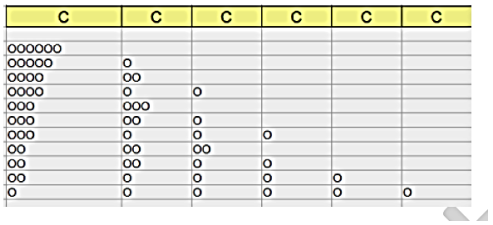
Puedes investigar en la Red las propiedades de estos diagramas.

El número de particiones se corresponde con el de soluciones no negativas de la ecuación diofántica $1x_1+2x_2+3x_3+\ldots nx_n = N$, como es fácil demostrar.

También coincide con el de soluciones no negativas de la ecuación diofántica $x_1+x_2+x_3+\ldots x_n = N$ si se exige que las soluciones formen una sucesión no creciente:

$x_1>=x_2>=x_3>=\ldots x_n$

Igualmente, representa también las formas de repartir N objetos indistinguibles en cajas indistinguibles. En la imagen, extraída de una hoja de cálculo, puedes observar la distribución de seis bolas (11 particiones del número 6)



C	C	C	C	C	C
oooooo					
ooooo	o				
oooo	oo				
oooo	o	o			
ooo	ooo				
ooo	oo	o			
ooo	o	o	o		
oo	oo	oo			
oo	oo	o	o		
oo	o	o	o	o	
o	o	o	o	o	o

Más adelante estudiaremos otras funciones de partición condicionada de un número y su cálculo. Mientras tanto te puedes dedicar a comprobar (con piezas, bolitas o lápiz) estos resultados:

N	P(N)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
11	56
12	77

No perderás el tiempo, porque es divertido encontrar estrategias para no olvidar ninguna suma.

Funciones de partición de un número

Hemos llamado P(N) al número de particiones en sumandos decrecientes del número N, pero se pueden definir otras:

Esta definición básica de número de particiones P(N) se puede someter a condicionamientos de los que surgirán nuevas definiciones. Las expresaremos así:

P(N / condicionamiento)

Vemos algunos ejemplos y sus propiedades

FUNCIÓN DE PARTICIÓN PK(N)

Es la misma función P(N) condicionada a que sólo intervenga un número K de sumandos:

P_k(N)= P(N / k sumandos): Particiones con un número k de sumandos fijado.

Su interés radica en que permite una fórmula de recurrencia para el cálculo de P(N). La demostración se puede consultar en manuales especializados.

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n-k)$$

Se parte de P_1(k)=1 y de P_k(k)=1 y se van calculando todos los P_k(N) por recurrencia.

Es claro que después de encontrar los valores de P_k(N) bastará sumarlos todos para k menor o igual a N a fin de obtener P(N), pues la suma abarcaría todas las posibilidades.

El siguiente esquema está copiado de una hoja de cálculo programada para encontrar P(7)

		K	1	2	3	4	5	6	7
N									
1	1		1						
2	2		1	1					
3	3		1	1	1				
4	5		1	2	1	1			
5	7		1	2	2	1	1		
6	11		1	3	3	2	1	1	
7	15		1	3	4	3	2	1	1

FUNCIÓN DE PARTICIÓN Q(N)

Como la anterior, cuenta el número de particiones, pero en este caso se exige que los sumandos sean todos distintos. Por ejemplo, el entero 7 admite las siguientes particiones como números distintos: 7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1, luego Q(7)=5

Euler demostró que esta función coincide con el número de particiones de n en partes impares.

FUNCIONES GENERATRICES

UN EJEMPLO INTRODUCTORIO

Antes de iniciar cualquier planteamiento teórico sobre las funciones generadoras (o generatrices), muy usadas en Combinatoria y en el estudio de las sucesiones de números, las introduciremos mediante un ejemplo.

Problema

Deseamos elegir nueve cuentas de colores. Disponemos de cantidad suficiente de cuentas rojas, amarillas y verdes, pero queremos elegir entre 2 y 5 rojas, menos de 4 amarillas y al menos 3 verdes. ¿De cuántas formas podemos efectuar la elección?

Este problema nos plantea el desarrollo de **particiones condicionadas** de un número. Independientemente de que se trate de particiones, intentaremos resolver el problema con varias técnicas, y entre ellas la del uso de una función generatriz.

Con un producto cartesiano

Como de las rojas hemos de elegir entre 2 y 5, de las amarillas de 0 a 3 y de las verdes un mínimo de 3 y un máximo de 7 (¿por qué 7?), bastará formar el producto cartesiano $\{2,3,4,5\}\{0,1,2,3\}\{3,4,5,6,7\}$ e ir eligiendo las ternas que sumen 9. Un problema totalmente elemental que se puede resolver en enseñanzas medias.

A poco que nos pongamos obtendremos: 9= 2+0+7 = 2+1+6 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+0+6 = 3+1+5 = 3+2+4 = 3+3+3 =4+0+5 = 4+1+4 = 4+2+3 = 5+0+4 = 5+1+3.

En total 13 particiones. Para este problema no se necesitarían más técnicas, pero lo estamos tomando como modelo sencillo de introducción.

Función generatriz

La idea revolucionaria de la función generatriz consiste en sustituir los distintos elementos numéricos por potencias de una indeterminada, **y los conjuntos convertirlos en polinomios**. Así el producto cartesiano {2,3,4,5}{0,1,2,3}{3,4,5,6,7} se puede escribir en forma de producto de polinomios:

$(x^2+ x^3+ x^4+ x^5)(1+x+ x^2+ x^3)(x^3+ x^4+ x^5+ x^6+ x^7)$

Es fácil darse cuenta de que si multiplicamos algebraicamente estos polinomios, el término de grado 9 tendrá como coeficiente el número de particiones pedido, en este caso 13.

Hemos sustituido una técnica de conteo por otra de tipo algebraico o analítico (esto último lo veremos más adelante)

En este caso tan sencillo parece que esto es una complicación, pero en casos generales veremos que puede resultar muy útil. Por dos motivos:

- Las técnicas algebraicas y analíticas permiten simplificar estos productos y encontrar directamente el coeficiente deseado.
- Al desarrollar estos polinomios no sólo resolvemos el problema para 9 cuentas, sino para cualquier otro total posible.

Disponemos en este caso de una ayuda, y es que sabemos sumar muy bien las progresiones geométricas. Así, el producto de polinomios dado se puede expresar como

$$P(x) = \frac{x^2(x^4-1)(x^4-1)x^3(x^5-1)}{(x-1)^3}$$

Este a su vez se puede simplificar

$$P(x) = \frac{x^{18} - 2x^{14} - x^{13} + x^{10} + 2x^9 - x^5}{(x-1)^3}$$

Con tres pasadas del algoritmo de Ruffini encontraremos todos los coeficientes (omitimos los que no influyen en el problema)

Grado	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
	1	0	0	0	-2	-1	0	0	1	2	0
1											
	1	1	1	1	-1	-2	-2	-2	-1	1	1
1											
	1	2	3	4	3	1	-1	-3	-4	-3	-2
1											
A	1	3	6	10	13	14	13	10	6	3	1
Grado	15	14	13	12	11	10	9	8	7		

Hemos destacado el que nos interesa: con grado 9 aparece el coeficiente 13, que es la solución, pero este procedimiento **nos devuelve mucho más**. Por ejemplo, con suma 7 sólo son posibles estas elecciones: 7=2+0+5=2+1+4=2+2+3=3+0+4=3+1+3=4+0+3, **seis en total**, como marca el esquema, y con suma 14 sólo deberán aparecer 3. Son estas: 4+3+7 = 5+3+6 = 5+2+7

Hemos resuelto varios problemas en uno

LA TEORÍA

En el apartado anterior presentábamos como un artificio sustituir los elementos de un producto cartesiano condicionado de conjuntos numéricos por polinomios en una indeterminada con exponentes idénticos a los números a combinar.

Ahora lo convertiremos en un desarrollo teórico.

Función generatriz de un conjunto numérico

Dado un conjunto ordenado de números reales o complejos (aquí usaremos casi exclusivamente los enteros positivos) {a_0, a_1, a_2, a_3,…a_n} llamaremos función generatriz (ordinaria) o generadora del mismo al polinomio de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots a_4x^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Si el conjunto tiene infinitos términos sustituiremos el polinomio por una serie de potencias, pero en este caso la igualdad

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

sólo tendrá sentido si dicha serie posee un radio de convergencia no nulo y la función está definida dentro de ese radio. No obstante, aquí no trataremos la convergencia, sino las relaciones entre coeficientes. Si no converge, P(x) no será una función, pero las técnicas siguen valiendo.

Casos sencillos

El caso más sencillo de función generatriz es la que corresponde al conjunto {1, 1, 1, 1,…1}

Si este es finito con **n** elementos, sabemos que su función generatriz se puede obtener mediante la fórmula de la suma de una progresión geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ya usamos esta fórmula anteriormente.

Si el conjunto es infinito {1, 1, 1, 1,…}también es sencillo verificar que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

Aquí nos encontramos con la potencia que tiene este método. Si derivamos miembro a miembro (omitimos detalles y también la cuestión de la convergencia) nos encontraremos con que

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Por tanto esta es la función generatriz del conjunto {1, 2, 3, 4,….}

La fórmula del binomio de Newton nos proporciona otro ejemplo de función generatriz. Los números combinatorios para un n dado tienen por función generatriz $\mathbf{(1+x)^n}$ ya que

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Podíamos seguir dando ejemplos hasta llenar páginas enteras, pero destacaremos especialmente dos técnicas

Manipulación algebraica

Con las técnicas algebraicas y sin plantearnos ahora el problema de la convergencia podemos encontrar la función generatriz de muchos conjuntos de coeficientes.

Por ejemplo, es fácil encontrarla para los números de Fibonacci F_0, F_1, F_2, F_3, F_4…, de los que suponemos se conocen sus valores y propiedades. Observa estas manipulaciones:

$F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+ F_3x^3+ F_4x^4+\ldots=$

$F_0+F_1x+(F_0+F_1)x^2+(F_1+F_2)x^3+(F_2+F_3)x^4+\ldots =$

$F_0+F_1x+(F_0 x^2+ F_1 x^3+ F_2 x^4+\ldots) + (F_1 x^2+ F_2 x^3+ F_3 x^4+\ldots)$

Pero en los paréntesis se está reconstruyendo F(x) de alguna forma, por lo que podemos escribir (pon tú los detalles)

$F(x)= F_0+F_1x+F(x) x^2+(F(x)- F_0)x$

Despejamos F(x), sustituimos F_0 por su valor 0 (a veces se toma 1) y F_1 por 1 y ya la tenemos:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Sólo hemos usado técnicas algebraicas sencillas. Más adelante comprobaremos este resultado.

Manipulación analítica

Si consideramos la derivación e integración formales podemos encontrar fácilmente funciones generatrices. Ya hemos considerado un ejemplo de derivación.

De la misma forma podemos usar la integración. Por ejemplo en la geométrica podemos integrar

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Nos resultaría entonces

$$o + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots = ln\frac{1}{1-x}$$

En cualquier manual puedes encontrar muchos ejemplos similares de este tipo de manipulación. No olvides que podemos mezclar las dos técnicas, analítica y algebraica, así como sumar, multiplicar y otras.

Problema inverso

Si la serie que define la función generatriz converge y conocemos esta, encontrar los coeficientes de la misma siempre es posible por la fórmula de McLaurin

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Es un camino muy pesado, pero seguro. Sin embargo el problema contrario de dar los coeficientes y encontrar la expresión de P(x) quizás no lo puedas resolver. Es el clásico problema de la suma de series.

Con la ayuda de un ordenador se puede simplificar el proceso. Damos un ejemplo:

Antes vimos que los números de Fibonacci tenían como función generatriz (si se toma F_0=0. A veces se toma F_0=1 y entonces tiene una expresión ligeramente distinta)

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Si tuviéramos posibilidad de desarrollar por McLaurin en algún lenguaje o programa, nos ahorraríamos mucho trabajo. Nosotros lo hemos hecho con el lenguaje PARI. Se entiende fácilmente aunque no se haya usado nunca:

{write("final.txt",taylor(x/(1-x-x^2), x,12))}

Ordenamos que escriba en el archivo "***final.txt***" 12 términos del desarrollo de Taylor (es en x=0) de la función dada. El resultado es:

0+x + x^2 + 2*x^3 + 3*x^4 + 5*x^5 + 8*x^6 + 13*x^7 + 21*x^8 + 34*x^9 + 55*x^10 + 89*x^11 + O(x^12)

Como vemos, los coeficientes son los números de Fibonacci. Si quisiéramos hacer F_0=1 nos daría otro resultado, pues la función generatriz seria $1/(1-x-x^2)$ (intenta demostrarlo)

Programaríamos en PARI esta variante:

{write("final.txt",taylor(1/(1-x-x^2), x,12))}

Obtendríamos la sucesión comenzando en 1:

1 + x + 2*x^2 + 3*x^3 + 5*x^4 + 8*x^5 + 13*x^6 + 21*x^7 + 34*x^8 + 55*x^9 + 89*x^10 + 144*x^11 + O(x^12)

Lo podemos intentar con el ejemplo del aparatado anterior, el de las bolas de colores, cuya función generatriz sin desarrollar era

$$P(x) = \frac{x^2(x^4 - 1)(x^4 - 1)x^3(x^5 - 1)}{(x - 1)^3}$$

Deberíamos escribir en PARI

{write("final.txt",taylor(x^5*(x^4-1)^2*(x^5-1)/(x-1)^3, x,20))}

Obtendríamos

x^5 + 3*x^6 + 6*x^7 + 10*x^8 + 13*x^9 + 14*x^10 + 13*x^11 + 10*x^12 + 6*x^13 + 3*x^14 + x^15 + O(x^20)

Identificamos los resultados anteriores: Con grado 9 el coeficiente es el esperado, 13. Para el grado 14 sólo 3 y para el grado 7 los 6 que ya se obtuvieron.

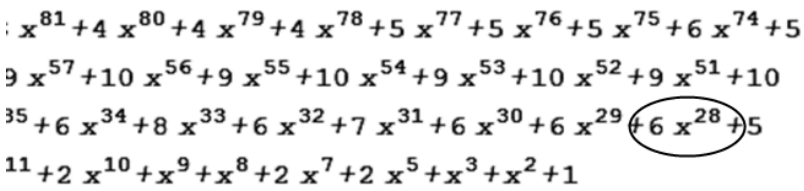
Más adelante veremos las funciones generatrices de combinaciones, variaciones y demás. Hoy seguiremos con ejemplos:

¿De cuántas formas se puede descomponer el número 28 como suma de primos distintos?

Los primos inferiores a 28 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Cada uno de ellos o está en la suma una vez o no está. Entonces podemos usar términos del tipo $(1+x^7)$ o $(1+x^{11})$ para combinarlos en la función generatriz:

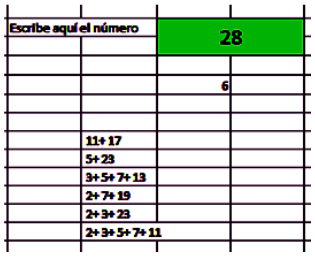
$F(x)= (1+x^2)\ (1+x^3)\ (1+x^5)\ (1+x^7)\ (1+x^{11})\ (1+x^{13})\ (1+x^{17})\ (1+x^{19})\ (1+x^{23})$

Desarrollamos con wxMmaxima y nos da (hemos recortado la imagen):



Vemos que para el exponente 28 el coeficiente es 6, luego existen 6 formas distintas de expresar 28 como suma de primos distintos

Lo comprobamos con nuestra herramienta PARTLISTA (http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#reprenum)



Con ella vemos las seis sumas:

28=11+17=5+23=3+5+7+13=2+7+19=2+3+23=2+3+5+7+11

Con la función generatriz hemos conseguido también otros muchos coeficientes, pero cuidado con la lista de primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Este desarrollo sólo valdría hasta el 28. Para números mayores deberíamos añadir $(1+x^{29})(1+x^{31})$…

Con la función generatriz podemos resolver varios problemas a la vez.

Estos desarrollos algebraicos son pesados incluso con ayuda de los CAS. Sería bueno elegir un solo coeficiente en ellos. El lenguaje PARI que estamos usando últimamente (es gratuito aunque de gestión poco amigable) posee la función POLCOEFF(P(x),E) en la que P(x) es un polinomio y E un exponente dado, y nos devuelve el coeficiente de ese polinomio correspondiente al grado E. Nuestro problema del 28 se calcularía así:

print(polcoeff((x^2+1)*(x^3+1)*(x^5+1)*(x^7+1)*(x^11+1)*(x^13+1)*(x^17+1)*(x^19+1)*(x^23+1),28))

Daría un resultado de 6. Si cambiamos 28 por un número inferior obtendremos más resultados. Para números superiores deberíamos incrementar los primos.

COMBINACIONES Y VARIACIONES

Ya vimos esta relación

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Es el clásico Binomio de Newton y nos da de forma inmediata la función generatriz de las **combinaciones de n elementos sin repetición**.

Esta forma de expresar los números combinatorios da lugar a demostraciones muy sencillas de algunas de sus propiedades. Observa esta identidad

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

Si la desarrollas da lugar a la identidad de Vandermonde

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

Basta imaginarse cómo sería el producto de las dos potencias

De igual forma, de esta otra identidad

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^n$$

Nos resultaría

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Basta con igualar términos con el exponente k

Así se podría demostrar otras similares.

Combinaciones con repetición

La fórmula del binomio de Newton es válida también para exponente negativo, pero en ese caso los números combinatorios tendrían la forma

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots}{r!} = (-1)^r \frac{(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

Pero la última expresión coincide con las combinaciones con repetición, luego

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

Sería, teniendo en cuenta los signos, la F.G. de las combinaciones con repetición.

Caso de elementos con repetición prefijada

Este es el caso con el que comenzamos a estudiar las F.G. Si deseamos combinaciones con repetición, pero en las que algunos elementos tienen un máximo en su repetición (no se suele estudiar este caso en los niveles elementales), debemos usar otra técnica. Por ejemplo:

Disponemos de varias fichas en cada una de las cuales se ha dibujado una forma distinta. Por ejemplo esta distribución:

☺	☺	✡	✡	✡	✞	✞	✞	✞

¿De cuántas formas distintas se puede tomar un conjunto de cinco símbolos? Al hablar de conjunto, no tendremos en cuenta el orden.

Basta usar, como ya vimos, un producto de polinomios en los que los exponentes representan las repeticiones posibles de cada símbolo:

$F(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

Buscamos con PARI su coeficiente de grado 5, que representa los elementos seleccionados:

print(polcoeff((x^2+x+1)*(x^3+x^2+x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1),5))

con un resultado de 11 posibilidades

Son estas:

X1	X2	X3	X4
0	1	4	
0	2	3	
0	3	2	
1	0	4	
1	1	3	
1	2	2	
1	3	1	
2	0	3	
2	1	2	
2	2	1	
2	3	0	

Podemos interpretarlas así:

✞✞✞✞✡ ✞✞✞✡✡ ✞✞✡✡✡ ✞✞✞✞☺ ✞✞✞✡☺ ✞✞✡✡☺

✞✡✡✡☺ ✞✞✞☺☺ ✞✞✡☺☺ ✞✡✡☺☺ ✡✡✡☺☺

Este método es general: para crear la F.G, en un caso de combinaciones con repeticiones prefijadas **basta con formar polinomios de potencias para cada uno de los elementos** y después multiplicarlos todos.

Funciones generatrices exponenciales

Hasta ahora hemos manejado combinaciones, no hemos tenido en cuenta el orden. Cuando éste interviene, para abordar las variaciones y permutaciones, necesitamos otro tipo de funciones generatrices, las exponenciales:

Dada una sucesión de números (en general complejos) $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n,\ldots}\}$ llamaremos **función generatriz exponencial** de esa sucesión a la formada por

$$E(x) = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \frac{a_4 x^4}{4!} + \cdots$$

Es idéntica a la definición general, pero en cada término de la suma dividimos entre el factorial del exponente. La raíz de esta técnica está en el desarrollo del binomio de Newton, en el que podemos sustituir Cm,n por Vm,n/n!

De esta forma, si $(1+x)^m$ era la F.G. de las combinaciones, también será ahora la **F.G exponencial de las variaciones**. Esta idea no es de mucha utilidad así en general, pero nos será muy útil en lo que sigue.

Variaciones con elementos repetidos

Un caso que no se suele estudiar en las enseñanzas medias es el las variaciones en las que se permite un máximo de repeticiones para cada elemento. Por ejemplo, tomar variaciones de 4 elementos en este conjunto de elementos con repetición: AAABBCDD.

Efectuamos previamente un acercamiento sin F.G.

En la imagen hemos obtenido todas las posibles combinaciones, escribiendo en cada columna el número de veces que se toman A,B,C y D, contando después las distintas ordenaciones de cada una. La suma obtenida fue de 162 variaciones.

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	1	1	2		12
0	2	0	2		6
0	2	1	1		12
1	0	1	2		12
1	1	0	2		12
1	1	1	1		24
1	2	0	1		12
1	2	1	0		12
2	0	0	2		6
2	0	1	1		12
2	1	0	1		12
2	1	1	0		12
2	2	0	0		6
3	0	0	1		4
3	0	1	0		4
3	1	0	0		4
					162

Probamos ahora con una F.G. exponencial para cada elemento, hasta 3 para A, 2 para B y D y una para C. Observa que los términos de los polinomios están divididos entre factoriales.

FG=(1+x+x^2/2+x^3/6)(1+x+x^2/2)(1+x)(1+ x+x^2/2)

Desarrollamos esta función con wMaxima

```
(%i1) p:(1+x+x^2/2+x^3/6)*(1+x+x^2/2)*(1+x)*(1+ x+x^2/2);
      ratexpand(p);
(%o1) (x+1)(x^2/2+x+1)^2(x^3/6+x^2/2+x+1)
(%o2) x^8/24+x^7/3+11*x^6/8+11*x^5/3+27*x^4/4+26*x^3/3+15*x^2/2+4*x+1
```

Nos resulta para el exponente 4 un coeficiente de 27/4, pero recordemos que es una F.G. exponencial, luego hay que multiplicar por 4! para encontrar el verdadero coeficiente, el número de variaciones:

27/4*4!=27*6=162, que confirma el resultado previo.

Lo que hemos aprovechado en realidad es que al escribir estos paréntesis **cada elemento está representado por los órdenes que puede presentar**. Si usamos este factor (1+x+x^2/2+x^3/6) lo que estamos comunicando es que x^2 presenta dos posibles órdenes (que al repetir el símbolo se han perdido) y que x^3 proviene de 6 órdenes (permutaciones con tres elementos)

Quiere decir lo anterior que las contribuciones al coeficiente final de x^4, 27/4, ya vienen descontados los órdenes que se han perdido al repetir. Al final, al multiplicar por el factorial de 4, nos quedamos con los órdenes verdaderos. Es un poco complicado de entender, pero estúdialo, que funciona.

Lo comprobamos para el variaciones de 3 elementos: el coeficiente es 26/3 y si multiplicamos por 3! nos queda 26*2=52

Lo generalizamos sin demostración:

Para encontrar el número de variaciones con repetición en el que conocemos el número máximo de repeticiones de un elemento, sean por ejemplo k, aportaremos a la F.G. un factor del tipo $1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^k/k!$ por cada elemento.

Permutaciones con repetición

La función generatriz que hemos empleado para variaciones coincide con la de permutaciones si el coeficiente que buscamos coincide con el total de las repeticiones de símbolos. En el ejemplo

que estamos usando, AAABBCDD, el total de elementos es 8. Busca en el desarrollo mediante wMaxima de arriba el exponente 8 de la F.G. y verás que es 1/24. Como estamos usando funciones exponenciales, el verdadero valor será (1/24)*8! = 1680.

En este caso no es necesaria la F.G., pues ya sabemos que el número de permutaciones de AAABBCDD se calcula mediante 8!/(3!2!1!2!) =8!/24 = 1680, pero es conveniente comprobar que en este caso también funciona la técnica de las F.G.

PARTICIONES Y FUNCIONES GENERATRICES

Al unir los conceptos de partición y función generatriz nos dan resultados mucho más potentes.

Particiones ordinarias P(n)

En la entrada ya referida las estudiamos desde un punto de vista general. Aplicaremos ahora el concepto de función generatriz.

Supongamos que deseamos encontrar todas las particiones ordinarias del número 6 (formas de representar 6 como suma con posible repetición de sumandos). Para ello no necesitamos ni funciones ni técnicas informáticas. Con un poco de atención llegaremos a que el 6 se descompone en suma de las siguientes formas:

6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1 = 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

Son once en total. Se supone que no se tiene en cuenta el orden.

Si queremos expresar este proceso mediante funciones generatrices hay que recordar que sus sumandos provenían de exponentes en un polinomio. En efecto, en este caso del 6 podemos considerar la función

$F(x) = (1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6\ldots)(1+x^3+x^6+x^9\ldots)\ldots(1+x^6+x^{12}+x^{18}\ldots)$

Si multiplicamos todo, el término de grado 6 se compondrá de todos los productos en los que el primer paréntesis aporta los sumandos iguales a 1, el segundo los que valen 2, el tercero, 3, y así hasta llegar al 6. Hemos tomado infinitas potencias en cada uno porque las mayores que 6 no van a influir, pero gracias a ello la expresión se simplifica como una progresión geométrica:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1--x^3}\cdots\frac{1}{1-x^6}$$

O expresado de forma sintética y generalizando hasta n:

$$F(n) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x^j}$$

Después volveremos a esta función generatriz para adaptarla a casos particulares. La comprobamos para n=6. Vimos en anteriores entradas que con PARI se pueden desarrollar fácilmente.

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4)/(1-x^5)/(1-x^6),x,7))

Resultado:

1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+**11x^6**+O(x^7) con el coeficiente 11 para x^6, como era de esperar.

Serían las once particiones esperadas. Como en ocasiones anteriores, este método nos da más, pues podemos leer otros coeficientes: con el 5 tendríamos 7 particiones, con el 4, 5, y así…A la inversa, si en lugar de pararnos en el 6 hubiéramos seguido escribiendo factores, obtendríamos más particiones, para 7, 8,… Así que recordemos la función generatriz (F.G.) para las particiones ordinarias del número n:

$$F(n) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x^j}$$

Intenta obtener otros resultados similares al planteado en este ejemplo. Lo importante es que recuerdes la definición de partición de un número y su F.G.

Particiones en sumandos distintos Q(N)

Si al descomponer un número en sumandos no permitimos que figuren repetidos, obtendríamos resultados muy distintos, recogidos como la función de partición Q(n)

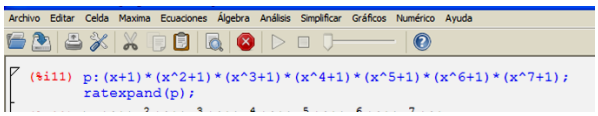
En este caso la función generatriz se simplifica mucho, pues en los paréntesis no han de figurar todas las potencias sino una sola por cada sumando. Así, para n=7 la F.G. sería

$F(x) = (1+x)(1+x^2)\ (1+x^3)\ldots\ (1+x^7)$

y generalizando para n

$$F(x) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + x^j\right)$$

Para el caso de 7 podemos expandir la F.G. mediante wxMaxima



Obtendremos un desarrollo en forma de polinomio, pero sólo serán útiles los coeficientes menores o iguales a 7:

$5x^7+4x^6+3x^5+2x^4+2x^3+x^2+x+1$

Ya tenemos la solución, el 7 se puede descomponer en 5 formas diferentes como suma de números naturales distintos:

7=6+1=5+2=4+3=4+2+1

Además, hemos obtenido que el 6 tiene 4 descomposiciones, el 5, 3 y así hasta el 1. Recuerda: estos son los únicos fiables en el desarrollo.

Particiones en partes impares P(N/Impar)

Aquí vemos rápidamente la utilidad de la función generatriz. Si en la fórmula general de las particiones eliminamos los pares de los paréntesis quedaría

$F(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{20}\ldots)\ldots(1+x^{2k+1}+x^{4k+2}+x^{6k+3}\ldots)$

que fácilmente se traduce, al igual que en las particiones ordinarias, a cocientes:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\ldots$$

O bien

$$F(n) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x^{2j-1}}$$

Por ejemplo, para n=7, usando PARI, nos resultaría

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^3)/(1-x^5)/(1-x^7),x,8))

1+x+x^2+2*x^3+2*x^4+3*x^5+4*x^6+5*x^7+O(x^8)

Como el coeficiente de x^7 es 5, ese será el número de particiones en impares. Como son tan pocas, las podemos escribir directamente: 7 = 5+1+1 = 3+3+1 = 3+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1

Intenta comprobar, como en los casos anteriores, que con 6 resultarían 4, con 5, 3, y así con todos los coeficientes resultantes.

.En realidad siempre es así, como demostró Euler usando funciones generatrices:

El número de particiones de un número en sumandos distintos coincide con el de particiones en sumandos impares

Con el uso de las F.G. todo se reduce a un artificio algebraico:

Demostración

Todo se basa en que

$$1 + x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$$

Así que partiendo de la F.G. de la partición en elementos distintos, representamos cada factor de esta forma, se simplificarán los factores de exponente par y sólo quedarán los impares en el denominador

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + x^j\right) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1 - x^{2j}}{1 - x^j} = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 - x^{2j-1}} = P(n/impar)$$

En el caso de n=7 te proponemos una correspondencia biyectiva por el método de Sylvester. Para que pienses un poco más sólo daremos el proceso y tú sacas tus consecuencias:

7=6+1=5+2=4+3=4+2+1 = 2*3+1 = 5+2*1=4*1+3=4*1+2*1+1 y ahora sustituimos cada producto por la suma correspondiente: 7 = 3+3+1 = 5+1+1 = 1+1+1+1+3 = 1+1+1+1+1+1+1

Para el camino inverso deberíamos expresar cada suma de repetidos como suma respecto a potencias de 2 distintas que se sacan como factor común.

7 = 3+3+1 = 5+1+1 = 1+1+1+1+3 = 1+1+1+1+1+1+1 = *2+1=5+2*1=4*1+3=4*1+2*1+1

Serían siempre todos distintos, porque o se diferencian en el números sacado factor común o en las distintas potencias de 2.

PARTICIONES CON SUMANDOS RESTRINGIDOS

En el anterior apartado hemos supuesto que el número de sumandos en una partición era libre, hasta el mayor posible. Puede ocurrir, sin embargo, que sólo deseemos usar un máximo de hasta tres sumandos, o exactamente cuatro o cualquier otra posibilidad. Por otra parte, los sumandos pueden estar restringidos en magnitud dentro de un rango. Esto complica un poco las cuestiones.

Veremos con algunos ejemplos la utilidad de las funciones generatrices y la posibilidad de comprobar resultados con la hoja Cartesius.

¿De cuántas formas se puede descomponer el número 8 en sumandos no mayores que 4?

Si has entendido de qué van las funciones generatrices comprobarás que la siguiente es la adecuada para este caso

$F(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\ldots)$

Como en casos anteriores podemos expresarlo como sumas de sucesiones geométricas

$$P_{x\leq 4}(n)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

Y en general

$$P_{x\leq k}(n)=\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(1-x^j)}$$

Para aplicarlo al caso de 8 bastará buscar su coeficiente en la F.G. aplicada al caso en el que k=4. Lo escribimos en PARI

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4),x,9))

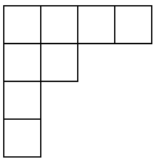
Y obtenemos

F.G.=1+x+2x^2+3*x^3+5*x^4+6*x^5+9*x^6+11*x^7+15*x^8+O(x^9)

Luego la solución del problema es P(8/sumandos no mayores que 4)=15

Particiones conjugadas

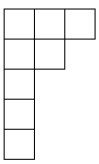
Ahora usaremos una técnica muy simple, pero que da buenos resultados. Como veíamos anteriormente, cada una de las particiones se puede representar mediante un diagrama de Ferrer, en el que se adosan tantas filas como sumandos entran en la partición, siendo la longitud de cada columna el valor del sumando. Así, la partición 8=4+2+1+1 se puede representar como



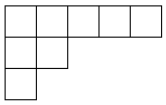
Cada fila representa un sumando: 4, 2, 1 y 1. Todos los diagramas que formemos con estas 15 particiones tendrán como máxima anchura cuatro cuadrados.

Lo bueno de estos diagramas, entre otras ventajas, es que si los giramos convirtiendo las filas en columnas y las columnas por filas seguirán siendo particiones, llamadas ***particiones conjugadas***.

Así, la partición 3+2+1+1+1



Se puede convertir en 5+2+1



Esta correspondencia es biyectiva. Si en las 15 particiones consideradas ninguna podía sobrepasar la anchura de 4, sus conjugadas no podrán tener más de cuatro filas, es decir, **más de cuatro sumandos**.

Esto es muy interesante: **Las particiones en sumandos no mayores que k coinciden en número con las particiones en no más de k sumandos**.

En nuestro ejemplo: si existen 15 particiones de 8 en sumandos no mayores que 4, también serán 15 las que se obtengan con no más de cuatro sumandos libres.

Así que si alguna vez no puedes construir la F.G. de un tipo de particiones, puedes acudir a las conjugadas por si resulta más sencillo. El siguiente ejemplo lo aclara.

¿De cuántas formas distintas podemos descomponer el número 12 en exactamente cuatro sumandos?

Acudimos a la conjugada: Este problema es el mismo que descomponer 12 en sumas de las cuales el mayor sumando sea 4. De otra forma: debe figurar al menos un 4 y el resto ser 1,2 o 3.

De esa forma la F.G. es fácil de obtener:

$F(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(x^4+x^8+x^{12}+\ldots)$

(hemos suprimido el 1 en el mayor sumando)

Generalizando

$$P_k(x) = x^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j}$$

Efectuamos las comprobaciones en nuestro ejemplo

Con la función generatriz y PARI

print(taylor(x^4/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4),x,9))

Desarrollo:
x^4+x^5+2*x^6+3*x^7+5*x^8+6*x^9+9*x^10+11*x^11+15*x^12+O(x^13)

Solución: el coeficiente de 12, que es 15.

Problema conjugado

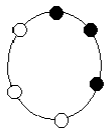
Ahora, en lugar de cuatro sumandos, el máximo ha de ser siempre 4, pero eso no es operativo, pues podemos eliminar siempre ese 4 y en lugar de formar una suma 12 pedimos que la suma sea 8. Este problema lo tenemos resuelto más arriba y nos resultó 15, como era de esperar.

COLLARES BICOLORES

En esta sección se usan los collares como objetos matemáticos que nos permiten aclarar los conceptos de **órbita y estabilizador**.

INTRODUCCIÓN

Supongamos que en un hilo cerrado ensartamos **n** cuentas para formar un collar, **r** de ellas de color negro y **s** de color blanco, con **r+s=n**. Lo dejamos sobre una mesa y permitimos todos los giros posibles, lo que evidentemente deja invariante la estructura de las posiciones mutuas de las blancas y las negras. Por razones de simplicidad (aunque de hecho se hace y está estudiado) prohibiremos cualquier movimiento del collar fuera de la mesa (en el espacio tridimensional)



¿Cómo se estudiarían matemáticamente estas estructuras en forma de collar?

La primera idea es la de que se trata de permutaciones circulares, pero el problema es algo más complicado. Lo abordamos.

Consideremos todas las permutaciones posibles de r negras y s blancas. Sabemos que su número es $C_{n,r}=C_{n,s}$. =n!/(r!.s!) Así, si usamos 3 negras y 3 blancas obtendríamos $C_{6,3}=C_{6,2}$= 6!/(3!*3!)= 20 permutaciones. Si representamos las blancas con una O y las negras con X, resultarían las siguientes (se puede ignorar por ahora la última columna):

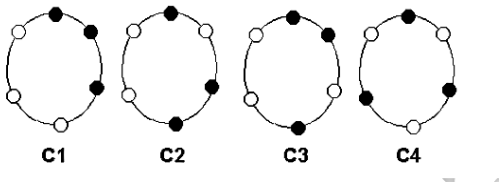
O O O X X X	C1
O O X O X X	C2
O O X X O X	C3
O O X X X O	C1
O X O O X X	C3
O X O X O X	C4
O X O X X O	C2
O X X O O X	C2
O X X O X O	C3
O X X X O O	C1
X O O O X X	C1
X O O X O X	C2
X O O X X O	C3
X O X O O X	C3
X O X O X O	C4
X O X X O O	C2
X X O O O X	C1
X X O O X O	C2
X X O X O O	C3

X X X O O O C1

Intenta imaginar cada permutación como circular y agrupa aquellas que representen el mismo collar. Puedes imaginarlas situadas sobre la esfera de un reloj con la primera cuenta en “las doce” y avanzando en el sentido de las agujas. Así lo haremos a partir de ahora.

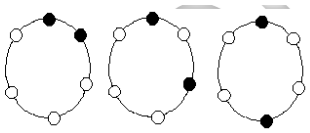
Es un ejercicio muy bueno para dominar el tema. En la última columna de la tabla se han destacado con los símbolos C1, C2,… los distintos collares que se pueden considerar.

Han resultado tres tipos de collares C1, C2 y C3 representados cada uno por 6 permutaciones y luego otro tipo, el C4, representado por dos. Los dibujamos:



Si analizas un poco este conjunto adivinarás por qué el cuarto tipo contiene sólo 2 permutaciones y los otros 6. Por ahora lo dejamos aquí y en la siguiente entrada lo interpretaremos en términos de órbitas en un conjunto sobre el que actúa un grupo.

Mientras tanto, intenta estudiar el mismo tipo de collar pero con sólo dos cuentas negras y cuatro blancas.

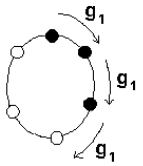


¿Cuántas permutaciones forman cada uno de los tres tipos de collar? ¿Por qué sólo existen tres tipos?

ÓRBITAS Y ESTABILIZADORES

Llamemos **C** al conjunto de permutaciones de **n** cuentas, **r** de ellas de color negro y **s** de color blanco, con **r+s=n.** En total existirán **Cn,r=Cn,s** elementos**.** Con las condiciones que se impusieron en la anterior entrada en la definición de un collar se advierte que vamos a someter a ese conjunto C a una serie de giros, y que consideraremos pertenecientes a un mismo collar a las permutaciones que se pueden convertir una en la otra mediante un giro.

Concretamos:



Llamemos $\mathbf{g_1}$ al giro que traslada cada cuenta al lugar de su siguiente en el sentido de las agujas del reloj. En términos de permutaciones equivaldría a mover cada elemento un lugar y al último convertirlo en primero. Así, en la permutación XOXXO el efecto de g_1 sería OXXOX. Se puede formalizar más, pero así se entiende bien. Esta definición es independiente del número de cuentas.

Igualmente, llamaremos g_2 a la composición de g_1 consigo mismo, es decir $g_2(x)= (g_1.g_1)(x)=g_1(g_1(x))$. En la práctica equivaldría a un giro doble. De igual forma podemos definir el giro triple $g_3(x)= (g_1.g_2)(x)=g_1(g_2(x))$ y así sucesivamente hasta llegar a g_n que equivaldría a la transformación identidad e.

Hemos definido en realidad un grupo G (puedes demostrarlo), el de los giros en C, subgrupo del de sustituciones de C. Formalizamos la idea.

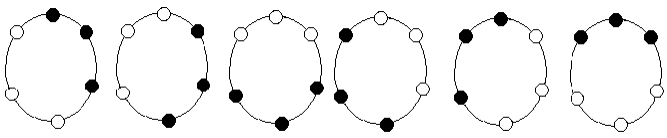
Diremos que un grupo G actúa sobre un conjunto C cuando para cada elemento g de G se define una operación externa g(x)=y, donde x e y son elementos del conjunto C, tal que cumpla e(x)=x y

además (g.f)(x)=g(f(x)), ambas para todo x de C. En nuestro caso de giros sobre permutaciones se cumplen ambas, luego diremos que G actúa sobre C. La imagen intuitiva es que se hacen girar las cuentas de todas las formas posibles.

Dos conceptos importantes se desprenden de esa definición

Órbita

Llamaremos **órbita o trayectoria** de un elemento x del conjunto C sobre el que actúa G, al conjunto **orb(x)** formado por todas las imágenes posibles de x mediante los elementos de G. En la imagen tienes un ejemplo de órbita según los giros en un conjunto de seis cuentas.



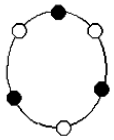
Las órbitas no son subgrupos, sino subconjuntos de C. Si vuelves a leer desde el principio, entenderás que la definición de “collar” coincide con la de “órbita”

Los collares que hemos definido coinciden con las órbitas de las permutaciones si sobre ellas actúan los giros.

Hay otra definición de collar en la que entran las simetrías, pero lo dejamos por si deseas ampliar el tema.

Estabilizador

Para una permutación cualquiera x, llamaremos estabilizador de x **est(x)** al subgrupo de giros que lo dejan invariante, es decir, todos los g tales que g(x)=x. Es fácil demostrar que est(x) constituye un subgrupo.



Así, el estabilizador de la permutación de la imagen está formado por el subgrupo {e, g_2, g_4}. Si no ves simetrías aparentes en una permutación, es fácil que su estabilizador sea {e}, sólo la identidad. Repasa algunos ejemplos y verás que es fácil encontrar su estabilizador.

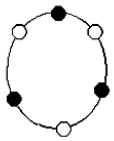
¿Por qué hablamos de estabilizadores? Porque nos sirven para contar órbitas o, lo que es lo mismo, collares.

CONTEO DE COLLARES

Los conceptos de órbita (collares en nuestro caso) y de estabilizadores está relacionados por un cálculo. Si representamos como |C| al cardinal de un conjunto C, tendremos que

Si G actúa sobre un conjunto C, para cada elemento x de C se cumple que

|Orb(xl|=|G|/|est(x) |



Es decir, el cardinal de la órbita de x equivale al cociente del cardinal del grupo que actúa sobre él y el de su estabilizador. Así, en el ejemplo de la imagen, el grupo de giros tiene cardinal 6 y en párrafos anteriores vimos que su estabilizador tiene 3, luego su órbita contendrá 6/3=2 elementos, el de la imagen y su simétrico intercambiando negras y blancas.

En los collares con **n** primo no existen subgrupos propios, luego todos los collares tendrán n elementos equivalentes. Estudia los collares de siete elementos y lo comprobarás.

Hay una forma de contar todos los collares mediante órbitas y estabilizadores. Se trata del lema o teorema de Burnside:

Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto C, y llamemos r(g) al número de elementos de C que quedan invariantes respecto a g (x=g(x)). En ese caso el número de órbitas en C viene dado por

$$O_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} r(g)$$

Puedes consultar la demostración en textos adecuados.

Lo aplicamos al caso de collares de 6 cuentas, 3 negras y 3 blancas. Contamos los puntos fijos de cada giro:

e: Todos los elementos son fijos, contamos 20 elementos
g_1, g_3, g_5: No tienen elementos fijos
g_2, g_4: Cada uno presenta 2 elementos fijos. Contamos 4

Aplicamos el teorema de Burnside: O=(20+0+4)/6 = 4 órbitas, tal como sabíamos desde el principio. Encontramos cuatro collares distintos.

En el caso que propusimos de 2 cuentas negras y 4 blancas tendríamos:

Número total de elementos: 6!/(2!.4!)= 15 permutaciones

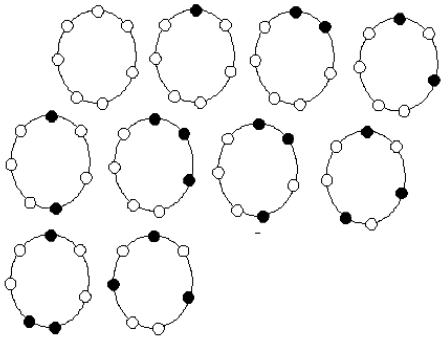
e: Todos los elementos son fijos, contamos 15 elementos
g_1, g_2, g_3, g_5: No tienen elementos fijos
g_3: Presenta 3 elementos fijos.

Luego O=(15+0+3)/6 = 3 órbitas, que se corresponden con los propuestos en nuestra primera entrada.

Puedes estudiar el caso sencillo de collares de 4 cuentas. Desarrolla por separado los casos de 3 de un color y 1 del otro o el de 2 colores de cada clase. Te deben resultar un collar del primer tipo y dos del segundo. Dibújalos si quieres.

En el caso de 7, al ser primo, no hay puntos fijos y el cálculo se reduce a dividir entre 7 el número de permutaciones. Por ejemplo, si $C_{7,4}=C_{7,3}=35$, el número de collares será igual a 35/7 = 5. En el caso de 5 y 2 serían 3=21/7

Ahí los tienes todos



Son 10 en total, y si le añadimos los que resultan de intercambiar negras y blancas, se convierten en 20. Este resultado y otros similares los puedes encontrar en http://oeis.org/A000031

Conteo total

Seguimos con el tema de collares, pero sólo aquellos que están sometidos a giros planos, sin tener en cuenta simetrías. Hemos indicado que este otro caso, algo más complejo, lo dejamos como complemento.

Descubrimos en la entrada anterior que para n=7 existían 20 collares distintos, e igualmente se podría haber razonado que para n=6, caso que hemos estudiado exhaustivamente, serían 14.

Si consultas http://oeis.org/A000031 verás que los resultados son

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

C	1	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188

Existe una fórmula, que puedes consultar en http://mathworld.wolfram.com/Necklace.html

Para calcular esos números sin acudir a un análisis individual de cada collar. Es esta, adaptada al caso de 2 colores:

$$C(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d) 2^{n/d}$$

La variable **d** recorre todos los divisores de n desde 1 hasta n, y **φ(d)** es la función indicatriz de Euler que indica el total de números menores que d y primos con él incluido el 1.

Apliquemos la fórmula al caso 6:

Divisores: 1,2,3,6

Indicadores: φ(1)=1, φ(2)=1, φ(3)=2, φ(6)=2

Total: $C=(1*2^6+1*2^3+2*2^2+2*2^1)/6=(64+8+8+4)/6=84/6=14$, como ya sabíamos.

En el caso de 7:

Divisores:1,7

Indicadores: φ(1)=1, φ(7)=6

Total: $C=(1*2^7+6*2^1)/7 = (128+12)/7 = 140/7 = 20$, que también coincide.

CURIOSIDADES

SUMA DE LOS ELEMENTOS DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS

Tomemos el conjunto formado por los n primeros números naturales {1, 2, 3, …, n}. Imagina que formamos todos los subconjuntos posibles y que en cada uno sumamos los elementos, acumulando después todas las sumas en un total general ¿Cuánto valdrá esa suma S(n) de todos los elementos de todos los subconjuntos? Al conjunto vacío le asignamos suma 0.

Te damos un ejemplo:

S(4)=80, porque tendríamos que sumar (escribimos entre paréntesis la suma parcial de cada subconjunto) lo siguiente. Sería así:

(0)+(1)+(2)+(3)+(4)+(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+3)+(2+4)+(3+4)+(1+2+3)+(1+2+4)+(1+3+4)+(2+3+4)+(1+2+3+4)=10+3+4+5+5+6+7+6+7+8+9+10=27+26+27=80

Los primeros resultados para la función S son S(1)=1; S(2)=6; S(3)=24; S(4)=80; S(5)= 240; S(6)=672, formando la sucesión 1, 6, 24, 80, 240, 672, 1792, 4608, 11520, 28160, 67584, 159744…

¿Sabrías justificar este resultado?

Podemos encontrar una definición por recurrencia. Que S(1)=1 y S(2)=6 es fácil de justificar. A partir de ahí razonamos de una forma muy común en Combinatoria: Sea S_{n-1} la suma de los subconjuntos de {1, 2, 3, …, n-1}. Para formar la suma S_n deberemos añadir el elemento n a los subconjuntos. Entonces estos serán de dos formas:

(a) Subconjuntos que no contienen al elemento n. Su suma será la misma S_{n-1}

(b) Subconjuntos que contienen al elemento n. Estarán formados por los subconjuntos de 1, 2, 3, …, n-1} a los que añadimos a cada uno el elemento nuevo n. El número de tales subconjuntos equivale a 2^{n-1}. Como cada uno se ha incrementado en el elemento n, la suma se habrá incrementado en $n*2^{n-1}$. Luego será $S_{n-1}+ n*2^{n-1}$.

Si reunimos las sumas (a) y (b) nos resulta la fórmula de recurrencia:

$$S_n = 2S_{n-1} + n2^{n-1}$$

En efecto: S(3)=2*6+3*4=12+12=24; S(4)=2*24+4*8=48+32=80; S(5)=2*80+5*16=160+80=240.

Es fácil programarlo en hoja de cálculo. Sólo incluimos una tabla creada así sin dar más detalles:

1	1	1
6	2	2
24	4	3
80	8	4
240	16	5
672	32	6
1792	64	7
4608	128	8
11520	256	9
28160	512	10
67584	1024	11
159744	2048	12
372736	4096	13

Generalmente nos sentimos más a gusto con una fórmula algebraica. Ahí va:

$$S_n = n(n+1)2^{n-2}$$

S(1)=1*2*(1/2)=1; S(2)=2*3*1=6; S(3)=3*4*2=24; S(4)=4*5*4=80…

Se puede demostrar por inducción. Vemos que se cumple para los primeros casos, luego podemos suponer que se cumple para n-1, es decir, que $S_{n-1}=(n-1)*n*2^{n-3}$.

Aplicamos la fórmula de recurrencia presentada más arriba y nos queda:

$S_n=2*(n-1)*n*2^{n-3}+n*2^{n-1}=(n^2-n)*2^{n-2}+2*n*2^{n-2}=(n^2-n+2n)*2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$ lo que completa la demostración.

Otra demostración

La suma T=1+2+3+4+…+n equivale al número triangular n(n+1)/2. Esta suma se repite en S(n) varias veces. Por ejemplo, la suma de todos los elementos unitarios es T. También vale T la suma de elementos del conjunto total. Veamos los demás conjuntos:

Clasifiquemos los subconjuntos por su número de elementos. El número de los que tienen r elementos es Cn,r. Por razones de simetría, los elementos 1,2,3,…n se repiten en total, para un mismo r, igual número de veces, luego la suma de los elementos de estos subconjuntos es múltiplo de T.

Cada elemento se repite en los conjuntos de r elementos tantas veces como indique Cn-1,r-1, luego la suma de todos equivaldrá a Cn-1,r-1*T. Si sumamos todos nos dará:

$T*Cn-1,0+T*\ Cn-1,1+\ T*\ Cn-1,2+\ T*\ Cn-1,3+\ldots+\ T*\ Cn-1,n-1 = T*2^{n-1} = n(n+1)/2*2^{n-1} = n(n+1)*2^{n-2}$, que es la fórmula propuesta.

Estas sumas forman la secuencia http://oeis.org/A001788. Si la estudiáis podréis descubrir la gran cantidad de interpretaciones que tiene.

FUNCIÓN "PARKING"

Imaginemos un aparcamiento de una empresa, situado en una calle estrecha, en la que no es posible dar marcha atrás, y que contiene **n** aparcamientos, que numeraremos de 1 a n. Podemos pensar que es el inicio de una jornada de trabajo y que suelen aparcar en ella siempre los mismos n coches.

Puede ocurrir que cada coche tenga preferencia por un determinado aparcamiento. Si llega y está libre, lo ocupa, y si no, como no puede retroceder, ocupa el siguiente que esté libre. Esto hace que no todas las preferencias de los coches sean viables. Unamos en un mismo conjunto ordenado las preferencias de los conductores. Por ejemplo, si n = 3, el conjunto ordenado (2, 1, 1) es viable, porque el primer coche ocuparía el aparcamiento 2, su preferido. El segundo iría al 1, y el tercero, aunque prefiere el 1, ha de irse al 3, pero aparca.

El arreglo (2, 3, 2) no es válido, ya que el primer coche aparca en el 2, el segundo en el 3, pero el tercero, encuentra ocupado su preferido 2 y también el siguiente, y no puede aparcar. Vemos que una hipótesis poco creíble es que cada conductor se dirige a su aparcamiento preferido ignorando los anteriores. Imaginemos que su empecinamiento le costaría volver a intentarlo y esta vez ocupar el 1 aunque no fuera su preferido, pero esas son las reglas de este juego.

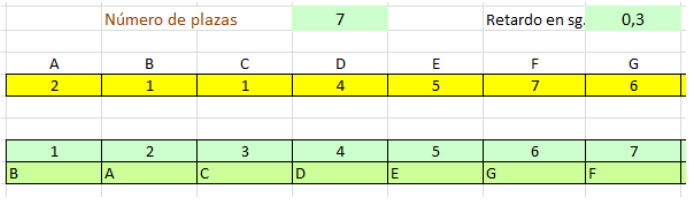
Simulación

Hemos preparado una hoja de cálculo muy simple para que experimentes qué preferencias son válidas. La tienes alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/parking.xlsm

Basta escribir en ella dichas preferencias, ajusta el retardo en segundos para ver bien el proceso, y rellenar las preferencias. Al pulsar los botones “Vaciar parking” e “Intento”, se desarrollará, con el retardo que desees, el proceso de aparcamiento.

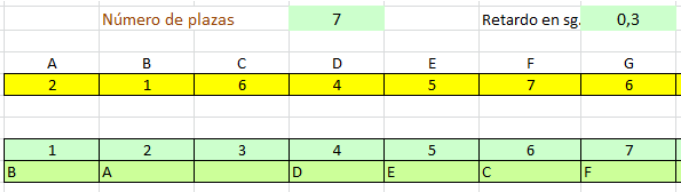
En la imagen puedes ver el final del proceso con unas preferencias válidas



	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	1	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A	C	D	E	G	F

Todos los coches han podido aparcar

En esta otra imagen hemos creado unas preferencias no válidas



	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	6	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A		D	E	C	F

La plaza tercera se ha quedado vacía y el coche G no ha podido aparcar.

Llamamos *coches afortunados* (“lucky car”) a aquellos vehículos que aparcan donde ellos prefirieron previamente. En el ejemplo de la imagen son afortunados A, B, C, D, E y F. Si las preferencias se repiten, sólo serán afortunados algunos de los coches pretendientes a una plaza. Se llama salto (“jump”) al número de plazas que ha de

desplazarse un coche si no logra su plaza preferida. Es evidente que los afortunados presentan un salto igual a cero.

Criterio de validez

Se puede razonar que una función parking es válida si se pueden ordenar las preferencias en orden creciente, y entonces, cada una de ellas **es menor o igual que su número de orden**. En caso contrario, si una preferencia fuera mayor, se dejaría una plaza vacía aunque entraran todos los coches, por lo que alguno de ellos quedaría fuera. En el anterior ejemplo (2, 3, 2) ordenamos de forma creciente (2, 2, 3) y observamos que no hay forma de llenar la plaza número 1, que quedaría vacía. Por el contrario, si en el orden creciente no se sobrepasa el número de orden, como en (1, 3, 1), o en orden creciente (1, 1, 3), sea cual sea el orden de entrada, siempre habrá plaza para todos. Si el orden creciente es válido, cualquier permutación del mismo también lo será.

Con esta condición, no es difícil escribir todas las funciones válidas en su forma ordenada creciente. En el caso de 3 serían

(1, 1, 1) (1, 1, 2) (1, 1, 3) (1, 2, 2) (1, 2, 3)

Ahora le aplicamos a cada una las permutaciones posibles, con lo que nos dará 1+3+3+3+6=16 funciones válidas distintas. Coincide este resultado con la expresión

$$P(n) = (n+1)^{n-1}$$

En este caso $(3+1)^{3-1}=4^2=16$. Se puede demostrar, mediante teoría de grafos, que esta expresión es válida. En esta dirección puedes leer un esbozo de demostración

http://www-math.mit.edu/~rstan/transparencies/parking.pdf

La idea consiste en añadir otra plaza más de aparcamiento, la n+1 que dejamos vacía, y permitir a los coches otro intento. De esta

forma todos aparcarán, aunque se puedan dejar una plaza vacía. El número de opciones ahora será (n+1) elementos para n plazas. El número de funciones es, por tanto, $(n+1)^n$. Si sometemos al proceso a una traslación módulo n+1, sólo será función válida aquella que deje vacía la plaza n+1. Dividimos y queda $(n+1)^n$.

Generación de resultados

Las funciones parking ordenadas se pueden obtener mediante construcción directa, ya que sólo hay que tener cuidado de no sobrepasar del índice i en el término a(i). Para valores de n mayores hemos usado nuestra hoja de cálculo Cartesius (no publicada en este momento). Por ejemplo, en la imagen puedes observar las 14 funciones ordenadas para n=4

	X1	X2	X3	X4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
4	1	1	1	4
5	1	1	2	2
6	1	1	2	3
7	1	1	2	4
8	1	1	3	3
9	1	1	3	4
10	1	2	2	2
11	1	2	2	3
12	1	2	2	4
13	1	2	3	3
14	1	2	3	4

Para n=5 resultarían 42 arreglos. En general, el número de funciónes parking ordenadas coincide con los números de Catalan:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,… (http://oeis.org/A000108).

Como tales, se pueden generar con la fórmula

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Por ejemplo, C(4)=1/5C(8,4)=70/5=14

RACHAS DE DÍGITOS

En Combinatoria es interesante el problema de las rachas, conjuntos de elementos consecutivos iguales. Por ejemplo, el conjunto AABBCDDDDEE posee cinco rachas; AA, BB, C, DDDD y EE. No se impone ninguna condición a la longitud de cada racha.

Aquí estudiaremos algunas rachas de dígitos que puede presentar un número entero. Distinguiremos tres tipos con sus estadísticas correspondientes y después particularizaremos en algunos casos, como primos, cuadrados o triangulares.

Tipos de racheado

Un número puede presentar los dígitos agrupados, es decir, con rachas todas de longitud mayor que 1, como pueden ser 3366677 o 112222. Le llamaremos número de tipo 1, o con “dígitos agrupados”.

Puede ocurrir que ningún dígito se agrupe con el siguiente, que equivale a afirmar que todas las rachas tienen longitud 1, como en 345643. Obsérvese que no se prohíbe que los dígitos se repitan, siempre que no sean consecutivos. Serán estos números los del tipo 2, o de “dígitos aislados”

Los restantes números presentarán rachas de longitud 1 y otras mayores, como en el caso de 1442 o 54322111. Les asignaremos el tipo 3, que es el menos interesante.

Independientemente de consideraciones combinatorias, podemos evaluar de forma aproximada la frecuencia que presenta cada uno de los casos. Usaremos una función en Visual Basic de hoja de cálculo, que, por su relativa complejidad, explicamos al final de la entrada.

El algoritmo que usa funciona en dos fases:

(1) Búsqueda de las rachas existentes entre los dígitos del número entero. En el listado del final puedes ver que se almacenan en una matriz r.

(2) Estudio de la longitud mínima y máxima de racha existente en el número.

Si la mínima longitud no es 1, los dígitos se presentan agrupados, y el entero será de tipo 1. Si la máxima es 1, no habrá agrupamientos, y el tipo será 2. Los restantes ejemplos serán de tipo 3.

Si te apetece, sigue estas fases en el listado VBA del final.

Frecuencias de los tipos

Mediante la función citada y un contador adecuado, hemos observado que las frecuencias en los distintos intervalos son bastante parecidas a las de la tabla, obtenida en el intervalo (10000, 100000)

	A	10000	
	B	100000	
Tipo 1		171	0,19%
Tipo 2		59049	65,61%
Tipo 3		30781	34,20%
		90001	100,00%

Se observa que son muy escasos los de tipo 1, con todos los dígitos agrupados, un 0,19%, los más frecuentes los del tipo 2, con dígitos aislados, con un 65,61%, quedando los del tipo mixto en una frecuencia intermedia del 34,20%. En otros intervalos las frecuencias son semejantes, ya que están basadas en propiedades combinatorias.

Justificar estas frecuencias puede resultar complejo, pero en el caso del tipo 1 no es difícil. Son 171 porque de dos cifras los únicos agrupados son 11, 22, 33,…99. Si le añadimos una cifra más, deberá ser idéntica a la última, luego, seguirán siendo 9: 111,222,…,999. Al llegar a cuatro cifras disponemos de dos caminos para construir los números de tipo 1: O bien añadimos dos cifras iguales por la derecha a los de dos cifras (incluido el cero), con lo que tendríamos 9*10=90 casos, como 1199, 2200,… o bien las añadimos por la izquierda (sin el cero), lo que daría 9*9=81 casos. Sumamos y obtenemos 90+81=171, que es lo que nos da la estadística.

En general, para una racha existen 9 posibilidades si ignoramos el 0. Para dos, 9*9, ya que ambas han de contener dígitos distintos, y para tres rachas, 9*9*9=729. Con una hoja nuestra sobre Combinatoria hemos calculado el número de rachas de cada tipo hasta 7 cifras, quedando esta tabla:

	Número de cifras						
Posibles rachas	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	2	3	4
3	0	0	0	0	0	1	3
4	0	0	0	0	0	0	0
Total	0	9	9	90	171	981	2520

Todas las cantidades están comprobadas: 9 números de tipo 1 de dos cifras, 9 de tres, 90 de cuatro, 171 de cinco, 981 de seis y 2520 de siete.

¿Presentarán los distintos tipos de números frecuencias parecidas? Por ejemplo, ¿existirán más rachas con longitud superior a 1 en los cuadrados?¿y en los primos?...Nos dedicaremos, en plan lúdico, a estudiar diversos casos y observar, si existen, variaciones apreciables en las frecuencias.

Los cuadrados

Por este carácter informal que queremos darle a este estudio, nos limitaremos en todos los casos al intervalo (1, 100000), ya que con él basta para detectar curiosidades.

En ese intervalo sólo aparece el cuadrado 7744=88^2, y las frecuencias son

Cuadrados	
1	0%
208	66%
107	34%
316	100%

Prácticamente coinciden con el caso general. No aparece ningún otro cuadrado de ese tipo entre 1 y 500000. Estás invitado a buscar uno. Por cierto, si lo encuentras, deberá terminar en 00 o 44. Razónalo si te apetece.

Los primos

Establecemos el mismo intervalo, para ver si tampoco en este caso se aprecian diferencias importantes. Y no, resultan casi iguales a las anteriores:

Primos	
15	0%
6387	66%
3190	33%
9592	100%

Los 15 primos encontrados son: 11, 11177, 11777, 22111, 22277, 22777, 33311, 33377, 44111, 44777, 55333, 55511, 77711, 77999 y 88811. Como ves, son muy atractivos. Puedes ver más en

http://oeis.org/A034873

Como en el caso de los cuadrados, sólo unas terminaciones son válidas: 11, 33, 77, 99, como es fácil entender.

Otros casos

Ya vamos sospechando que las frecuencias variarán poco. Lo vemos:

Triangulares

En este caso aumentan algo las frecuencias de tipo 1 y 2 en detrimento del 3:

Triangulares	
4	1%
321	72%
121	27%
446	100%

Los cuatro triangulares de tipo 1 son muy sugestivos: 55, 66, 666, 2211, Tienes más en

http://oeis.org/A116055

Oblongos

Como estos números son los dobles de los triangulares, presentan frecuencias similares, también con ligero predominio de los tipos 1 y 2 respecto al conjunto de todos los números.

En el intervalo (1,100000) sólo aparecen tres de tipo 1: 1122=33*34, 4422=66*67 y 9900=99*100. No están publicados los siguientes. Si te atreves…

Pentagonales

Aparecen tres de tipo 1:22, 8855 y 55777.

Pitagóricos

¿Qué longitudes de hipotenusas de triángulos de lados enteros aparecerán de tipo 1?

De este tipo aparecen muchos más, pues estarían entre ellos algunos múltiplos adecuados de 55, 111 y 100, que presentan rachas de al menos dos elementos. Estos son los primeros, con sus correspondientes catetos:

55	33 , 44
111	36 , 105
222	72 , 210
333	108 , 315
444	144 , 420
555	171 , 528
666	216 , 630
777	252 , 735
888	288 , 840
999	324 , 945
1100	308 , 1056
1111	220 , 1089

Aquí lo dejamos. Podemos analizar algunos más, pero vemos que las proporciones no cambian mucho. Es tan imprevisible la aparición de las cifras en los cálculos previos, que al reunir las frecuencias se llega a resultados muy similares.

Aquí tienes una tabla resumen:

	Frecuencias de agrupamiento							
	Todos los números		Cuadrados		Primos		Triangulares	
Tipo 1	279	0%	1	0%	15	0%	4	1%
Tipo 2	66429	66%	208	66%	6387	66%	321	72%
Tipo 3	33292	33%	107	34%	3190	33%	121	27%
Total	100000	100%	316	100%	9592	100%	446	100%

ANEXO

Función para encontrar el tipo de agrupamiento de dígitos

Public Function tipoagrupa(n)

Dim i, t, nr, l, maxr, minr

Dim r(20) ‘Esta variable contendrá las rachas

Dim sr$, c$, d$

sr$ = Str$(n)

sr$ = Right$(sr$, Len(sr$) - 1) + "$" ‘Convierte el número en un *string* adecuado
nr = 0
maxr = 1: minr = 1000 ‘Máxima y mínima longitud de racha
For i = 1 To 20: r(i) = 0: Next i
i = 1
l = Len(sr$)
While i < l ‘La variable ***i*** recorre los dígitos
nr = nr + 1
r(nr) = 1
c$ = Mid$(sr$, i, 1)
d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)
While c$ = d$ ‘Un dígito es igual al siguiente. Hay racha mayor que 1
r(nr) = r(nr) + 1
i = i + 1
c$ = Mid$(sr$, i, 1)
d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)
Wend
If r(nr) > maxr Then maxr = r(nr) ‘Toma nota de la racha máxima
If r(nr) < minr Then minr = r(nr) ‘Toma nota de la racha mínima
i = i + 1
Wend

t = 3 'En principio suponemos que el tipo es 3, caso mixto
If minr > 1 Then t = 1 'Tipo 1. Todos agrupados, porque las rachas son mayores que 1
If maxr = 1 Then t = 2 'Tipo 2. Todos aislados y rachas unitarias
tipoagrupa = t
End Function

¿VARIACIONES O COMBINACIONES?

Existen números, como el 1716 que equivalen a un número de variaciones sin repetición y también de combinaciones sin repetición, ambas con el mismo índice superior.

En efecto, 1716 = 13*12*11 = V(13,3), pero también equivale a C(13,6) o C(13,7), ya que

$$\binom{13}{6} = \frac{13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 13 * 12 * 11 = 1716$$

Se ha producido la feliz casualidad de que 13*12*11 = 6*5*4*3*2*1, y por eso se ha podido simplificar.

En esta propiedad el verdadero protagonista, a efectos de construcción de algoritmos, es el número 13, que es el que participa en ambas fórmulas, de combinaciones y variaciones. No existen muchos índices que cumplan esto. Los primeros son 8, 13, 27, 124, 725 y 5046, si imponemos la condición razonable de que el índice inferior sea mayor que 1, para evitar trivialidades.

Puedes consultar las búsquedas de estos números en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/10/variaciones-o-combinaciones.html

MÁXIMO PRODUCTO EN LA PARTICIÓN DE UN NÚMERO

Ya sabemos que una partición de un número entero positivo N es una suma de números también enteros positivos cuyo resultado es ese número. Si no tienes claro el concepto puedes acudir a las direcciones

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/particiones-de-un-numero.html

https://es.wikipedia.org/wiki/Partici%C3%B3n_(teor%C3%ADa_de_n%C3%BAmeros)

Está muy estudiado el tema del desarrollo de las particiones y el del cálculo de su número. Aquí nos **interesará el máximo producto que se puede lograr multiplicando los sumandos de cada partición**. Lo introducimos con ejemplos:

Máximo producto logrado con particiones

Tomemos el número 6. Mentalmente se pueden escribir sus particiones (no se tiene en cuenta el orden):

6=5+1=4+2=3+3=4+1+1=… En cada partición calculamos el producto entre sumandos: 6, 5, 8, 9, 4,… y nos quedamos con el máximo. En el esquema lo verás mejor:

6						6
1	5					5
2	4					8
3	3					9
1	1	4				4
1	2	3				6
2	2	2				8
1	1	1	3			3
1	1	2	2			4
1	1	1	1	2		2
1	1	1	1	1	1	1

Figuran las once particiones del 6 y en la columna de la derecha los productos de sumandos. En la partición de sumando único lo elegimos como producto. Se observa que el máximo producto es 9.

Otro ejemplo: En PARI las particiones se obtienen con la función *partitions*. Si pedimos las particiones del número 8 las obtenemos como vectores independientes:

```
parisize = 4000000, primelimit = 500000
? print(partitions(8))
[Vecsmall([8]), Vecsmall([1, 7]), Vecsmall([2, 6]), Vecsmall([3, 5]), Vecsmall([
4, 4]), Vecsmall([1, 1, 6]), Vecsmall([1, 2, 5]), Vecsmall([1, 3, 4]), Vecsmall(
[2, 2, 4]), Vecsmall([2, 3, 3]), Vecsmall([1, 1, 1, 5]), Vecsmall([1, 1, 2, 4]),
 Vecsmall([1, 1, 3, 3]), Vecsmall([1, 2, 2, 3]), Vecsmall([2, 2, 2, 2]), Vecsmal
l([1, 1, 1, 1, 4]), Vecsmall([1, 1, 1, 2, 3]), Vecsmall([1, 1, 2, 2, 2]), Vecsma
ll([1, 1, 1, 1, 1, 3]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 2, 2]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 1, 1
, 2]), Vecsmall([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])]
?
```

Si multiplicas los sumandos dentro de cada vector descubrirás que el máximo producto es 18=2*3*3, luego MPP(8)=18

Estos resultados figuran en la página de OEIS http://oeis.org/A000792 con una definición recursiva:

1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 243, 324, 486, 729, 972, 1458, 2187, 2916, 4374, 6561, 8748, 13122, 19683, 26244, 39366, 59049, 78732, 118098, 177147, 236196, 354294, 531441, 708588, 1062882, 1594323, 2125764, 3188646, 4782969,…

Como era de esperar, los valores son crecientes (cada uno es un máximo que se apoya en los anteriores) y pronto adquieren una buena tasa de crecimiento. La página citada contiene una fórmula recursiva que es fácil de entender.

*a(n) = max{ (n-i)*a(i) : i<n}; a(0) = 1*

Se define a(0) como 1, y también es fácil entender las siguientes: a(1)=1, a(2)=2, a(3)=3,… La recursividad tampoco es difícil de captar. Se trata de multiplicar cada valor menor que **n** por el máximo correspondiente a su diferencia con **n**. En efecto, las particiones de **n** se forman eligiendo esos valores i:1…n-1 para luego unirlos con las particiones de **n-i**. Por ejemplo, en las particiones del 7, si elegimos el valor 4, se deberá combinar con las

particiones del 3 para formar las particiones del 7 que contengan un 4. Igual ocurre con todos los valores: 5 se añadirá a las particiones del 2 y 3 se unirá a las particiones de 4.

Si conservamos los valores máximos de cada partición de n-i, al multiplicarlos por i resultarán productos de la partición superior, candidatos a ser máximos. Al recorrer todos los valores menores que **n** dispondremos de **n-1** posibles máximos, y uno de ellos será el MPP.

Puedes ampliar este estudio en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/11/maximo-producto-en-la-particion-de-un.html

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/11/maximo-producto-en-la-particion-de-un_23.html

SUMAS DEL TIPO M+N+MN

En este apartado nos dedicaremos al número de descomposiciones del tipo **k=m+n+mn** (m>0 y n>0) que puede presentar un número k. A efectos prácticos podemos suponer que n es mayor o igual a m.

El número 99, por ejemplo, admite cuatro descomposiciones:

99=3+24+3*24
99=4+19+4*19
99=9+9+9*9
99=1+49+1*49

Otros números tan populares como el 30 no admiten ninguna descomposición de este tipo.

¿De cuántas formas se puede descomponer un número determinado? Como en ocasiones similares, podemos comenzar con procedimientos de "fuerza bruta", para ir después refinando el estudio hasta llegar al planteamiento teórico.

En http://hojaynumeros.blogspot.com/2017/09/sumas-del-tipo-mnmn.html se describen algoritmos de búsqueda para esta cuestión.

Estudio teórico

Iniciamos un estudio teórico que nos llevará a una fórmula para el número de descomposiciones del tipo m+n+mn=k

Basta darse cuenta de que la expresión estudiada equivale a (m+1)(n+1)-1. Por ejemplo, 2+35+2*35=37+70=107 es igual a (2+1)(35+1)-1=3*36-1=108-1=107.

Esto nos aclara la situación, porque el número de descomposiciones del tipo m+n+mn para un número k coincide con el de **los pares de divisores cuyo producto es k+1**. Así, las cuatro descomposiciones del número 99 (3+24+3*24, 4+19+4*19, 9+9+9*9, 1+49+1*49) coinciden con todos los pares de divisores (m+1)(n+1) del número k+1, en este caso 100. En efecto, los pares son: 2*50, que da lugar a 1+49+1*49, 4*25, que produce 3+24+3*24, 5*20 para 4+19+4*19 y 10*10, que se empareja con 9+9+9*9

El número de descomposiciones de k en expresiones m+n+mn coincide con el del número de pares de productos p*q=k+1 con p>1 y q>1.

El número de pares de este tipo está relacionado con la función TAU de k+1, que cuenta el número de divisores que posee k+1, y que tiene la expresión

$$D(N)=(1+a_1)*(1+a_2)\ldots(1+a_k)$$

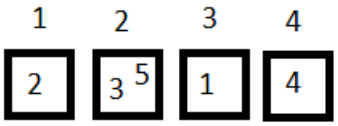
En ella los valores de a_1, a_2, a_3,…son **los exponentes de los factores primos de k+1**. Si el valor de esa función es par, el número de productos p*q=k+1 será la mitad, y si es impar, la mitad más 1. A ese resultado habrá que restarle 1, porque el par 1*(k+1) no nos sirve. Así que quedaría:

$$N = INT\left(\frac{TAU(k+1)+1}{2}\right)-1$$

UNOS NÚMEROS DE LAH

Si deseamos construir una aplicación sobreyectiva de un conjunto de **n** elementos sobre otro de **n-1**, debemos buscar un origen para cada elemento del segundo conjunto, pero siempre nos sobrará uno del primero, que habrá que asignarlo a un elemento imagen ya elegido, con lo que este poseerá dos orígenes.

Esta situación se entiende bien con el símil de cajas y bolas. Deseamos meter **n** bolas en **n-1** cajas, de forma que todas las cajas tengan al menos una bola y que todas las bolas estén asignadas a alguna caja. Esto nos obliga a meter dos bolas en una caja concreta.



En la imagen observamos una aplicación sobreyectiva de los números {1, 2, 3, 4, 5} sobre las cajas {1, 2, 3, 4} En ella hemos tenido que hacer convivir el 3 y el 5 en una misma caja.

¿Cuántas formas existen de construir este tipo de aplicaciones? Con esta pregunta llegaremos a un caso particular de los llamados números de Lah, cuando el parámetro k es igual a 2

$$L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}.$$

(Imagen tomada de

https://en.wikipedia.org/wiki/Lah_number)

Deducción de la fórmula

Observemos lo que hemos hecho:

En primer lugar debemos llenar las cajas con una bola. Como tenemos 5 bolas para 4 cajas, las posibles elecciones serán *variaciones sin repetición de 5 sobre 4*, es decir, 5*4*3*2. Esas serían las formas de completar las cajas. Siempre nos sobrará una bola, que podemos asignar a una de las 4 cajas posibles, luego debemos multiplicar por 4 y quedaría 5*4*3*2*4. Si razonamos así, estaríamos contando estos casos como dobles. Por ejemplo, en la imagen, repetiríamos el razonamiento con el 3 y con el 5, con lo que habríamos contado 5*4*3*2*4=480, en lugar de los 240 que efectivamente existen, es decir, 5*4*3*2*4/2=4*5!/2

Generalizando: El número de aplicaciones sobreyectivas de {1,2…n} sobre {1, 2,…n-1} equivale a un caso concreto de números de Lah (cuando k=2) dado por la expresión

$$N = \frac{(n-1)n!}{2}$$

Estos números están publicados en

http://oeis.org/A001286

1, 6, 36, 240, 1800, 15120, 141120, 1451520, 16329600, 199584000, 2634508800, 37362124800, 566658892800, 9153720576000, 156920924160000, 2845499424768000, 54420176498688000, 1094805903679488000, …

Entre ellos figura el 240 que hemos deducido para n=5: 4*5!/2=2*120=240

Para el caso de n=3 el número de aplicaciones sería 6. Representamos las cajas mediante paréntesis: (12)(3), (13)(2), (23)(1), (1)(23), (2)(13), (3)(12)

Hay que advertir que dentro de cada paréntesis no influye el orden.

La fórmula para Excel sería (N-1)*FACT(N)/2

Podemos deducir la fórmula con otro razonamiento: Se puede decidir antes de nada qué dos bolas comparten caja. Esta elección se hace mediante *combinaciones sin repetición de n elementos tomados de 2 en 2*, es decir **n(n-1)/2**. Una vez elegido el par, hay que asignarle una caja, y esto supone **n-1** posibilidades, con lo que quedaría un total de **n(n-1)/2*(n-1)** casos. Así nos quedarán libres **n-2** bolas y **n-2** cajas. Entre ellas se pueden formar **(n-2)!** aplicaciones biyectivas, que completarían el proceso. En resumen, tendríamos **n(n-1)/2*(n-1)*(n-2)!=(n-1)*n!/2**, como ya sabíamos.

Una propiedad derivada

En el razonamiento anterior usamos la expresión **n(n-1)/2** como número de combinaciones, pero también es un número triangular de orden n-1, que equivale a la suma de consecutivos 1+2+3+…+n-1, luego estos números también se pueden expresar como

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)!$$

Lo puedes ver en esta tabla de Excel:

		Factores k*m!						
n	n!	1	2	3	4	5	6	Suma
1	1	1						**1**
2	2	2	4					**6**
3	6	6	12	18				**36**
4	24	24	48	72	96			**240**
5	120	120	240	360	480	600		**1800**
6	720	720	1440	2160	2880	3600	4320	**15120**

La parte central coloreada representa el conjunto de términos del sumatorio. A la derecha figuran en negrita los números de Lah para k=2, suma de los anteriores, y a la izquierda los factoriales. De esta tabla se pueden extraer unas representaciones interesantes para los números de Lah que estamos estudiando. Te dejamos que lo deduzcas:

6=(1+2)*1*2
36=(1+2+3)*1*2*3
240=(1+2+3+4)*1*2*3*4
1800=(1+2+3+4+5)*1*2*3*4*5
15120=(1+2+3+4+5+6)*1*2*3*4*5*6

Queda atractivo.

Recurrencia

Finalizamos este estudio con una breve referencia a la generación de cada número respecto al anterior y al número de orden. No hay que razonar mucho para comprender que

$$L(n+1) = L(n) \cdot n(n+1)/(n-1)$$

Se puede reproducir esta generación escribiendo una columna de índices y aplicar esta fórmula en una segunda columna a partir del 1:

n	L(n)	Factor multiplicador
1	**1**	
2	6	6
3	36	6
4	240	6,66667
5	1800	7,5
6	15120	8,4
7	141120	9,33333
8	1451520	10,2857

No importa que el factor multiplicador no sea entero, porque se compensa con los factores del anterior número de Lah (sabemos que el resultado ha de ser entero).