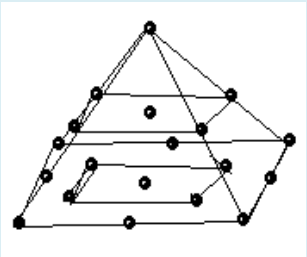
# Aritmética – Números naturales



Edición 2024

Colección Hojamat.es

© Antonio Roldán Martínez

http://www.hojamat.es

# CONTENIDO

Contenido ..... 2
Introducción ..... 4
Fundamentos ..... 4
Axiomas de Peano ..... 5
Operaciones con números naturales ..... 6
Medias ..... 7
Orden en N ..... 9
Sistemas de numeración ..... 10
Persistencias ..... 13
Potencia de un número natural con exponente natural ..... 14
Principio de inducción completa ..... 15
Fórmula de Faulhaber ..... 16
Factoriales ..... 16
Curiosidades ..... 18
Cuadrado mágico ..... 18
*Números figurados* ..... 20
Otros números figurados de dos dimensiones ..... 26
Números piramidales ..... 29
Piramidales de cuatro dimensiones ..... 33
Piramidales centrados ..... 34
Ternas pitagóricas ..... 34
Triángulos heronianos ..... 37

Conjutos de Sidon y Golomb ..... 38
Acercamiento entre potencias ..... 39
Equivalencia entre sumas de cubos ..... 41
Los cinco cubos..... 46
Temáticos ..... 52
Sucesiones..... 52
Sucesiones recurrentes..... 53
Sucesiones curiosas..... 64
Cuestiones diofánticas ..... 73
Ecuación diofántica lineal ..... 73
Ecuación pitagórica ..... 74
Fracciones continuas..... 75
Sumas de cuadrados ..... 83

# INTRODUCCIÓN

En este documento sólo se incluyen conceptos que permiten una cierta experimentación lúdica. No es posible incluir aquí un tratado sobre números naturales. Se inicia con una síntesis de los conceptos fundamentales sobre estos números, para pasar a las operaciones y sistemas de numeración, dedicando la segunda parte igualmente a conceptos complementarios, que se sitúan aquí si no tienen cabida en las otras guías teóricas. La parte final está estructurada como una colección de curiosidades.

No se tratan los temas de Divisibilidad, Combinatoria o Aritmética modular porque están contenidos en otras publicaciones de la colección *hojamat.es*.

También tienen un tratamiento especial en otros documentos los números poligonales y los piramidales.

Debe, por tanto, considerarse este documento como una colección de temas interesantes, pero que no han de seguir un orden estructurado.

# FUNDAMENTOS

En este documento trataremos de los números naturales. Los definiremos mediante los axiomas de Peano, para evitar recurrir a la teoría de conjuntos. Tradicionalmente se comenzó su definición a partir del 1, y así los copiaremos. Modernamente se tiende a incluir el cero, con lo que se tendría que cambiar el axioma 1. Los dejaremos así, y cuando se tenga que considerar el cero se

advertirá. Se suelen representar como N si se incluye el 0 y como N* si no se incluye. La inclusión del cero es un tema de permanente discusión.

## AXIOMAS DE PEANO

Existe un conjunto N compuesto por elementos llamados números naturales, relacionados entre sí por la relación "ser siguiente o sucesor" **m= sg(n)** que cumple estos cinco axiomas.

1. **1** es un número natural.
2. Si **a** es un número natural, entonces **sg(a)** también es un número natural
3. 1 no es siguiente de ningún número natural. (El 1 es el primero, no tiene precedentes)
4. De la igualdad **sg(a)=sg(b)** se deduce que **a=b** (Dos números diferentes no pueden tener el mismo siguiente)
5. Axioma de inducción: si un conjunto C de números naturales contiene al 1 y a los siguientes de cada uno de sus elementos entonces C=N (es decir, pertenecerían a él todos los números naturales)

Estos axiomas cumplen la compatibilidad, independencia y completitud. También garantizan que N es un conjunto infinito. Se suelen representar como puntos equidistantes en una recta, a partir (generalmente hacia la derecha) de un punto origen, que representa el 0 o el 1.

También garantizan que entre un número natural y su siguiente no existe otro número intermedio.

## OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

A partir de los axiomas de Peano se define la suma de dos números naturales **a+b** mediante las definiciones

**a+1 = sg(a)** y **a+sg(b) = sg(a+b)**.

A partir de esta definición se demuestra que es una operación interna con las propiedades

Asociativa: a+(b+c) = (a+b)+c
Conmutativa: a+b=b+a
Cancelativa: Si a+c = b+c, entonces a=b

La propiedad asociativa permite definir sumas de más de dos números de forma unívoca.

Esta última propiedad permite definir *la resta*, como **a-b=x** si y solo si **b+x=a**. Esta operación no es cerrada, porque si **a** es menor que **b**, no se pueden restar. Hay quien no la considera operación en sentido estricto.

La multiplicación de dos números naturales se define a partir de: **a*1 = a** y **a*sg(b) = a*b+a.** De esta definición se puede deducir la clásica de que la multiplicación es una suma de un elemento sumado consigo mismo **n** veces.

Esta operación posee las propiedades

Asociativa: a*(b*c) = (a*b)*c
Conmutativa: a*b = b*a
Elemento neutro: a*1 = 1*a = a
Distributiva respecto a la suma: a*(b+c) = a*b + a*c
Cancelativa: Si a*c = b*c y c>0, entonces a = b

Aquí también la propiedad asociativa permite definir productos de más de dos números de forma unívoca.

Estas propiedades dotan al conjunto N de la estructura algebraica de *anillo conmutativo con unidad*.

La propiedad cancelativa permite definir la división exacta como **a/b = x** con **b>0** si y solo si **b*x=a**. Esta operación tampoco es cerrada. Si un número admite la división entre 2 se llama *par*, y en caso contrario, *impar*.

Se define también la división entera como la operación, para dos números naturales **a** y **b**, que encuentra un cociente **q** y un resto **r<b** tales que **a=b*q+r**. Se puede demostrar que esta operación siempre es posible. Existe también la *división por exceso*, definida como a=b*(q+1)-r', donde r' es el *resto por exceso*, y se cumple que r +r' = b.

## MEDIAS

Aunque las distintas medias o promedios suelen darse más en números racionales y reales, como intervienen en algunas propiedades y curiosidades sobre números enteros, las incluimos aquí:

### MEDIA ARITMÉTICA

La media aritmética de un conjunto de números $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$,…$a_k$ es el cociente entre su suma y el número de elementos:

$$\bar{a} = \frac{a_{1+}a_{2+}a_{3+\cdots+}a_k}{k}$$

Aquí nos interesarán tan solo los conjuntos con media aritmética entera. Por ejemplo, dos números con media entera han de ser ambos pares o impares.

## MEDIA GEOMÉTRICA

Es mucho menos usada que la anterior entre números naturales. La incluimos solo para completar. Es la raíz de orden k del producto de k números enteros:

$$g = \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k}$$

Si la media geométrica de dos números es entera, se pueden visualizar como las dimensiones de un rectángulo de lados enteros que se puede transformar en un cuadrado con su lado también entero.

## MEDIA ARMÓNICA

Es la inversa de la media aritmética de los inversos. Como la anterior, solo tiene utilidad aquí si es entera.

$$h = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_k}}$$

## MEDIA CONTRAARMÓNICA

En el caso de dos números naturales a y b, al cociente $(a^2+b^2)/(a+b)$ se le suele llamar *media contraarmónica* de a y b

Esta media y la media armónica son equidistantes de la media aritmética, siendo la armónica la de menor valor. Lo expresamos:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2} \geq \frac{2ab}{a + b}$$

Si se resta cada una de la anterior esa diferencia equivale a

$$\frac{(a - b)^2}{2(a + b)}$$

Lo repasamos con un ejemplo, a=30, b=20. Los valores de estas medias serían:

Contraarmónica: $(30^2+20^2)/(30+20)=26$ (hemos elegido el ejemplo con valor entero)

Aritmética: (30+20)/2=25

Armónica: 2*20*30/(20+30)=24

Hemos comprobado que los tres valores son equidistantes.

## ORDEN EN N

Dados dos números naturales **a** y **b**, diremos que **a** es menor que **b** si existe otro número natural **x** tal que **a+x=b**

Igualmente, diremos que **a** es menor o igual que **b** si **a** es o bien menor o bien igual que b (en modo texto lo representamos como **a<=b**)

Esta relación es de orden, porque presenta las propiedades

Reflexiva: a<=a para cualquier a natural
Antisimétrica: Si a<=b y b<=a , entonces a=b
Transitiva: Si a<=b y b<=c, entonces a<=c

Este orden *es total*, porque dados dos números naturales **a** y **b**, se cumple siempre o que **a<=b** o que **b<=a**

El orden establecido por la relación <= posee la propiedad monótona respecto a la suma y el producto: Si **a<=b**, entonces **a+c<=b+c** y **a*c<=b*c**

Igualmente, el conjunto N está *bien ordenado* para la relación <=, porque todo subconjunto de N no vacío posee un elemento mínimo.

# SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Los números naturales, por su infinitud, necesitan un sistema de representación a partir de un número finito de símbolos. Para eso se inventaron los sistemas de numeración, como el romano, el decimal, etc.

## Sistemas posicionales

Un sistema de numeración basado en la *posición relativa* usa la llamada *base* del sistema, que es el *número de unidades de orden inferior necesarias para obtener una unidad de orden inmediato superior*. A estos órdenes les llamamos *unidades*, *decenas*, *centenas*,…De esta forma, existirán tantos sistemas de numeración como bases distintas sean posibles, es decir, infinitas. Los más populares son los de bases 10 (decimal), 2 (binario), 8 (octal) y 16 (hexagesimal). La expresión de un número en una base se termina con un paréntesis y la base: $111010_{(2}$, $66523_{(8}$

La base de la expresión de un número N en una base B es lograr el desarrollo polinómico

$N = C_0B^k + C_1B^{k-1} +\ldots+ C_{k-1}*B + C_k$ en el que los coeficientes $C_i$ sean todos más pequeños que la base, positivos o nulos.

Según esto, el verdadero valor de $C_0$ es $C_0B^k$, el de $C_1$ será $C_1B^{k-1}$ y así con todas. Por eso se llama sistema posicional. Además, así se cumple que cada unidad es B veces mayor que la anterior, porque son potencias todas de B.

Para poder usar los sistemas de numeración hay que admitir el número 0, como representante de un lugar vacío en la expresión de un número.

En un sistema de numeración en base B se necesitan B símbolos para las distintas cifras, pues son el cero y todos los posibles restos menores que B, así {0,1} para el binario, {0,1,2} para la base 3…Si la Base es mayor que 10 se añaden letras mayúsculas A, B, C,

D…como cifras. Si no bastan las letras, se pueden usar números de varias cifras bien separados. Por ejemplo, 7722 se expresaría así en base 81: 1, 14, 27 (81, que equivale a la igualdad 7722=1*81^2+14*81^1+27*81^0

La expresión de un número N en un sistema de base B se logra por el método de las divisiones sucesivas:

- Mientras N sea mayor que la base B
    - Dividir de forma entera N entre B
    - El resto se toma como nueva cifra a la derecha
    - El cociente como nuevo valor de N
- Cuando N llegue a ser menor que B, él será la primera cifra de la expresión.

Por ejemplo, para expresar 2013 en base 7: 2013\7=287 y resto **4**; 287/7=41 y resto **0**; 41/7=5 y resto **6**. Como primera cifra tomamos el último cociente **5**, luego la expresión sería: 2013(10 = 5604(7

Efectivamente, así se cumple el desarrollo polinómico $2013=5*7^3+6*7^2+0*7+4$, como se puede comprobar con facilidad.

La operación inversa, de pasar de una expresión en una base a la expresión decimal usual se hará cambiando la división por multiplicación y los restos por sumas:

Para pasar 45541(6 a base diez: 4*6+5=29; 29*6+5=179; 179*6+4=1078; 1078*6+1=6469

**Sistemas no posicionales**

Los sistemas de numeración aditiva son aquellos en los que los valores de los símbolos se suman, sin que influya la posición relativa, como el sistema romano.

## NÚMEROS ESPECIALES SEGÚN SUS CIFRAS

Llamamos ***reverso*** o ***simétrico*** de un número natural a otro número que contiene las mismas cifras pero en orden opuesto, en una base dada. Si no indicamos lo contrario, nos referiremos a la base decimal. Por ejemplo, 345 es el simétrico de 543.

**Número palindrómico o capicúa** es aquel que es igual a su reverso. Los números de una sola cifra se consideran palindrómicos. Por ejemplo, el número 238832 es capicúa.

**Número pandigital** es aquel que contiene en su expresión decimal las diez cifras 0123456789 en cualquier orden. A veces no se exige que entre el 0, y hay quien admite que se repita alguna cifra. Es pandigital 3672510984.

**Repituno**, repunit o repuno es el número que sólo contiene la cifra 1, como 11 o 111. **Repidígito** es aquel en el que todas sus cifras son iguales, como el 7777. Se le puede llamar también *monocifra*.

**Equilibrado** se le llama al número que contiene todas sus cifras con la misma frecuencia en una expresión respecto a una base dada. En esta categoría entran los que tienen todas sus cifras distintas. Por ejemplo, el número 5722 es equilibrado al menos en tres bases: 5722(10 =21211221(3 = 1A67(15 = 165A(16

**Ondulado** es el número cuyas cifras siguen la pauta ababab…en una base dada, como 23232 en base 10.

**Periódico en sus cifras** sería, por ejemplo, 283228322832.

**Automórfico** es aquel número que al elevarlo al cuadrado, está contenido en las últimas cifras del mismo. Por ejemplo, el 9376, que al elevarlo al cuadrado se convierte en 8790**9376**

**Anagramáticos** son dos números que poseen las mismas cifras con igual frecuencia y distinto orden. Por ejemplo, 27761 y 17672.

## PERSISTENCIAS

Se llaman así los procesos por los que reiteramos una misma operación sobre las cifras de un número hasta llegar a un punto de no avance de resultados. Podemos considerar:

**Persistencia aditiva**

Consiste en ir sumando las cifras de un número de forma reiterada hasta llegar a un número de una cifra, a partir del cual se estabiliza el proceso. Por ejemplo, el proceso con el número 6512 consistiría en

6+5+1+2=14; 1+4=5, 5=5

El número en el que se detiene la reiteración se llama *raíz digital*, en este caso, el 5. El número de iteraciones que son necesarias para obtener esa raíz recibe el nombre de *índice de persistencia aditiva*, que en el ejemplo es 2.

**Persistencia multiplicativa**

Neil Sloane introdujo este término en su artículo [The persistence of a number, J. Recreational Math., 6 (1973), 97-98] En él define esta persistencia multiplicativa de la forma siguiente:

Se multiplican las cifras del número y se reitera esta operación con los números obtenidos. Estos productos formarán una sucesión decreciente, y se cuentan las iteraciones necesarias hasta llegar a un producto de una sola cifra. Al número de esos pasos se le denomina *índice de persistencia multiplicativa*, y al número final resultante, *raíz digital multiplicativa* del número.

Por ejemplo, iniciamos con el número 762. El producto de sus cifras es 84. Multiplicamos cifras de nuevo, resultando 32, y reiteramos:
762 – 84 – 32 – 6.
Se puede razonar que los productos serán decrecientes hasta llegar a una cifra.

Los procesos de persistencias son invariantes al orden de las cifras, y el caso aditivo, al número de cifras 0 existentes en el número, mientras que en el multiplicativo, al número de cifras 1.

**Persistencia con potencias de cifras**

La suma o el producto de cifras se pueden construir con potencias de las mismas. Hablaríamos entonces de k-persistencia. No es muy popular este concepto.

## POTENCIA DE UN NÚMERO NATURAL CON EXPONENTE NATURAL

Llamaremos potencia de exponente **k** de un número natural **n**, y la representaremos por $\mathbf{n^k}$, al producto **n.n.n….n** de k factores iguales a n.

Propiedades:

- $n^0=1$
- $n^1=n$
- $n^k.n^h=n^{k+h}$
- $n^k.m^k=(nm)^k$
- $n^k/n^h=n^{k-h}$ (k>=h)
- $n^k/m^k=(n/m)^k$
- $(n^k)^h = n^{kh}$

## PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Es el método de demostración de propiedades referentes a números naturales consistente en:

a. Demostrar la propiedad para **n=1** (o el cero).

b. Demostrar que si la propiedad es cierta para **n**, también lo es siempre para **n+1** (es decir, **sg(n)**)

Con esto quedará demostrado que es cierto para todo n natural, en virtud del quinto axioma de Peano.

Con esta y otras técnicas, se demuestran fórmulas muy interesantes sobre sumas de los primeros números naturales de cierto tipo. Por ejemplo:

Suma de los primeros números naturales

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma de los primeros impares

$$1 + 3 + 5 + \cdots (2n+1) = n^2$$

Suma de los primeros pares

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1)$$

Suma de los primeros cuadrados

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma de los primeros cubos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Identidad de Nicómaco

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

## FÓRMULA DE FAULHABER

Una alternativa a la inducción completa en las sumas anteriores es el uso de la fórmula de Faulhaber

(https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber),

que da el resultado de cualquier suma de potencias de los primeros números enteros. Solo incluimos su resultado para las primeras potencias, copiado de Wikipedia.

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

$$1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6 = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

## FACTORIALES

Llamamos factorial de un número N al producto N(N-1)(N-2)(N-3)…1 si N>0 y la unidad si N=0. Lo representamos por n!, notación incómoda para la computación, por lo que es preferible FACT(N), que es la usada en Excel.

Los primeros factoriales serán, pues, contando 0!, 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,…

Su significado más importante es que coincide con las formas de ordenar los elementos de un conjunto de N de ellos (permutaciones), por lo que lo encontraremos en muchas fórmulas de Combinatoria.

Es evidente su definición por recurrencia: N!=N*(N-1)! Si N>0 y 0!=1

Es claro que la sucesión de factoriales es estrictamente creciente y que si m<n, m! divide a n!.

**Doble factorial**

Si en el producto del factorial sustituimos los factores consecutivos por otros descendientes de 2 en 2, obtendremos el doble factorial N!!, que se definirá como N(N-2)(N-4)…hasta finalizar en 1 o en 2.

Su fórmula de recurrencia será N!!=N*(N-2)!! Si N>0 y 0!!=1

Los primeros son:

1, 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, 945, 3840,…

# CURIOSIDADES

En este capítulo se incluirán, además de las curiosidades generales, otras publicadas en nuestro blog “Números y hoja de cálculo”. Solo se reflejarán los resultados importantes, pudiendo consultar los procedimientos usados en la entrada correspondiente.

## CUADRADO MÁGICO

Un cuadrado mágico es una matriz cuadrada de números (normalmente consecutivos y a partir de 1) en la que las sumas por filas, columnas y diagonales son todas iguales. Esta suma, si los números son 1,2,...n, deberá ser igual a $n(n^2+1)/2$

Es famoso el cuadro Lo-Chu, formado por los números 1 al 9 dispuestos en tres filas y tres columnas y cuyas sumas son siempre 15

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Este cuadrado mágico posee muchas propiedades curiosas. Algunas de ellas son:

42+92+22 = 82+12+62
42+32+82 = 22+72+62
4922+3572+8162 = 2942+7532+6182
4382+9512+2762 = 8342+1592+6722

También es clásico el cuadrado de 16 números llamado Melancolía, por haber aparecido en un cuadro del mismo título de Alberto

Durero. Todas sus filas y columnas suman 34. Además, en la parte inferior contiene la fecha de su realización 1514. Este cuadrado, grabado en una placa de plata, se usaba para protegerse de enfermedades.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Este cuadrado mágico también es hipermágico, porque sigue siendo mágico cambiando entre sí algunas filas o columnas.

También suman 34 sus cuatro vértices 16+13+4+1 y sus vecinos 5+8+9+12, 15+14+3+2. También los números centrales 10+11+6+7 y los "saltos de caballo" 5+2+12+15.

Existen 880 cuadrados mágicos de orden 4 y 275305224 de orden 5

Es notable el cuadrado mágico formado por números primos de Henry Dudeney

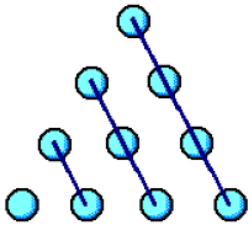
| | | |
|---|---|---|
| 67 | 1 | 43 |
| 13 | 37 | 61 |
| 31 | 73 | 7 |

## NÚMEROS FIGURADOS

Son números que se pueden disponer en forma de figura geométrica. Los más populares son:

### NÚMERO TRIANGULAR

Un número triangular es aquel cuyas unidades se pueden situar en forma de triángulo



Los primeros números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

En la figura se observa la generación de cada número triangular:

$t_1 = 1 = 1$
$t_2 = 1+2 = 3$
$t_3 = 1+2+3 = 6$
$t_4 = 1+2+3+4 = 10$

Todos siguen la fórmula $T(n) = n(n+1)/2$, con $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

Los números triangulares terminan en 0, 1, 3, 5, 6 u 8.

Otro resultado muy interesante es el de que la suma de los inversos de los números triangulares tiende a 2. Si quieres desarrollarlo basta que pienses que $1/3 = (2/2 - 2/3)$, $1/6 = (2/3 - 2/4)$ y así sucesivamente. Desarrolla la suma y verás anularse términos.

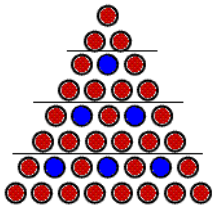
Comprueba lo siguiente: El número $T(n)$ coincide con el número de soluciones positivas de la ecuación $x+y+z=n+2$.

**Triangulares de lado par**

Los números triangulares 3, 10, 21, 36,…son aquellos cuyo número de orden es par: 3=T(2)=2*3/2; 10=T(4)=4*5/2; 21=T(6)=6*7/2,…Si aplicamos la expresión algebraica de un número triangular, la de estos será

$T(2n)=2n(2n+1)/2=n(2n+1)=2n^2+n$

Los podemos representar como formados por filas de triángulos de 3 elementos separados por otros elementos aislados. En la imagen hemos representado el 36, es decir T(8)



Observa que está formado por 10 triángulos de tres elementos y 6 puntos aislados. Nos sugiere que un número triangular de orden par equivale a triangular de orden mitad multiplicado por 3 más su triangular anterior, es decir:

**T(2n)=3T(n)+T(n-1)**

Es fácil demostrarlo por inducción: T(2)=3*T(1)+T(0)=3*1+0=3; T(4)=3*T(2)+T(1)=3*3+1=10…

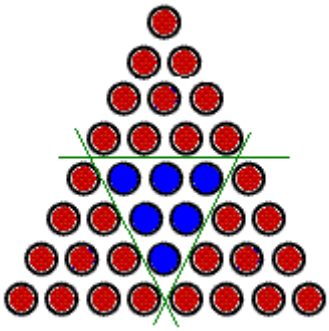
Probemos con T(2(n+1))=T(2n)+(2n+1)+(2n+2) por definición de número triangular. Si aceptamos la hipótesis para n, tendremos:

T(2(n+1))=3*T(n)+T(n-1)+(n+1+n+1+n+1)+n=3*T(n)+3*(n+1)+T(n-1)+n=3*T(n+1)+T(n), luego la hipótesis se cumple para n+1.

La fórmula T(2n)=3T(n)+T(n-1) es válida

Adaptamos una demostración visual contenida en

http://math.berkeley.edu/~rbayer/09su-55/handouts/ProofByPicture-printable.pdf

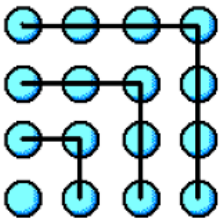


Así se ve  mejor la relación.

En realidad, estos números **son los triangulares que no pueden ser hexagonales**. Se sabe que todo hexagonal es triangular, porque su expresión es H(n)=n(2n-1)=2n(2n-1)/2=T(2n-1), pero el número de orden del triangular es 2n-1, impar, luego los que no son hexagonales formarán la sucesión que estamos estudiando: 3, 10, 21, 36…, que está contenida en http://oeis.org/A014105

## NÚMERO CUADRADO

Un número natural a se llama cuadrado cuando existe otro número natural n tal que $a=n^2$.



Los primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, …

En la figura se observa la generación de cada número cuadrado:

$C_1 = 1 = 1$
$C_2 = 1+3 = 4$
$C_3 = 1+3+5 = 9$
$C_4 = 1+3+5+7 = 16$

Los números cuadrados terminan en 0, 1, 4, 5, 6 o 9

Todos siguen la fórmula $n^2$, como es evidente.

Todo número cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos. Compruébalo o intenta demostrarlo. También se forma un cuadrado con 8 números triangulares, sumándoles una unidad. Con un dibujo lo puedes lograr fácilmente.

Los números triangulares y cuadrados cumplen tres propiedades:

a) Un número natural es suma de 3 cuadrados si y sólo si no es de la forma 4a (8b-1)
b) Todo número natural es suma de a lo más tres cuadrados.
c) Todo número natural es suma de a lo más tres triangulares.

## TRIANGULARES CUADRADOS

Números que son a la vez triangulares y cuadrados

Son los números 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, ...

Siguen las fórmulas de recurrencia:

$C_{n+1} = 34*C_n - C_{n-1} +2$

$$C_{n+1} = \frac{(C_n - 1)^2}{C_{n-1}}$$

Fórmula directa:

$$\frac{\left(17 + 12\sqrt{2}\right)^n + \left(17 - 12\sqrt{2}\right)^n - 2}{32}$$

Estos números están publicados en OEIS, y los primeros son:

0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,… (http://oeis.org/A001110)

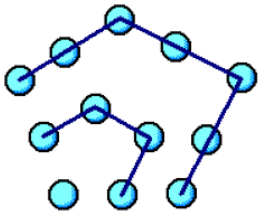
Evidentemente, estos números tienen en común el ser triangulares y cuadrados a la vez.

Una propiedad similar es que la media geométrica entre un término y el siguiente es también un número triangular

| A(n) | RAIZ(A(n)*A(n+1)) | Orden como triangular |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| 36 | 6 | 3 |
| 1225 | 210 | 20 |
| 41616 | 7140 | 119 |
| 1413721 | 242556 | 696 |
| 48024900 | 8239770 | 4059 |
| 1631432881 | 279909630 | 23660 |

## NÚMERO POLIGONAL

Se definen de la misma forma que los cuadrados y los triangulares, como números que forman pentágonos, hexágonos, etc.



La fórmula que siguen los pentagonales 1, 5, 12, ... es n(3n-1)/2

Los hexagonales 1, 6, 14, siguen la fórmula $n(4n-2)/2 = 2n^2 - n$

En general, de k lados la fórmula adecuada es (n*(2+(n-1)*(k-2))/2

### Número poligonal

Aunque estos números se tratan en documento aparte, se incluyen aquí sus conceptos y propiedades generales.

Es un número figurado tal que las unidades del conjunto que representa se pueden situar ordenadamente en forma de polígono. Pueden ser triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

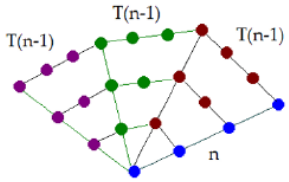
La expresión general de un número poligonal de k lados y orden n es

$$P_{n.k} = \frac{n(n(k-2)-(k-4)}{2}$$

o lo que es equivalente

$$P_{n.k} = n + (k-2)T_{n-1}$$

siendo $T_{n-1}$ el triangular de una dimensión menos. La siguiente imagen demuestra esta propiedad:




Las unidades azules representan a n, y las de los otros tres colores a los números triangulares que terminan de engendrar el pentagonal.

También son válidas las descomposiciones

**Teorema de Nicómaco:**

Todo número poligonal es igual al de su mismo orden pero con una dimensión menos sumado con el triangular de una dimensión menos:

$$P_{n.k} = P_{n-1,k} + T_{n-1}$$

Descomposición triangular de Fermat

$$P_{n.k} = T_n + (k-3)T_{n-1}$$

Según Fermat, todo número natural se puede expresar como la suma de n números poligonales de n lados. Gauss lo demostró para los triangulares y Cauchy para todo tipo de polígonos.

## POLIGORIALES

Los números poligoriales se definen de forma similar a los factoriales, pero en lugar de multiplicar números naturales consecutivos, lo hacen con los números poligonales.

Un número poligorial de orden k equivale al producto de los primeros números poligonales de orden k. Por ejemplo, 180 es poligorial de orden 3, porque es el producto de los cuatro primeros números triangulares: 180=1*3*6*10. 518400 lo es de orden 4, porque equivale al producto de los cuadrados 1, 4, 9, 16, 25 y 36.

En el caso de los factoriales los factores son números naturales, y no hay que calcularlos previamente al producto, pero en el caso de los poligoriales, cada factor posee su propia fórmula, que hay que evaluar. Como trabajamos con números poligonales, es útil usar la misma fórmula en todos los órdenes, aunque luego exista la posibilidad de simplificación en cada caso. Es la siguiente:

$$P_{n,k} = \frac{n\big(n(k-2)-(k-4)\big)}{2}$$

En ella k es el orden y n la longitud de un lado, que es la variable que se recorre al plantear el producto.

## OTROS NÚMEROS FIGURADOS DE DOS DIMENSIONES

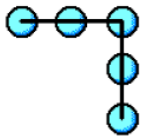
Un número **rectangular** es aquel cuyas unidades se pueden ordenar en forma de rectángulo de lados mayores que uno. Es sinónimo de compuesto.

Lo llamaremos **oblongo** si es posible elegir sus dimensiones como números consecutivos, como 12 = 3*4, 42 = 6*7, etc.

Los primeros números oblongos son 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

La fórmula de los números oblongos es n(n+1) lo que nos hace ver que son dobles de los triangulares. También equivalen a la suma de los k primeros números pares.

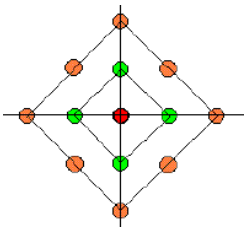
Un número natural constituye un **gnomon** cuando se puede dibujar como una escuadra de brazos iguales. Es equivalente a un número impar. En efecto, basta observar la figura:



Todo número cuadrado es suma de gnomones.

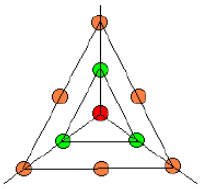
**Números poligonales centrados**

Los números poligonales anteriores crecen a partir de un vértice, y no tienen centro. Podíamos formarlos a partir de un punto (centro) rodeando después con triángulos, cuadrados o pentágonos con número creciente de puntos. Así, la imagen de la izquierda es un cuadrado centrado de orden 3 que equivale al número 13. Si suprimimos el perímetro más lejano nos resultaría el cuadrado centrado 5.



De igual forma se pueden definir los triángulos o polígonos centrados.

Así, los números 1, 4, 10, 19, 31,… son triangulares centrados.



1, 5, 13, 25, 41... son cuadrados centrados y

1, 6, 16, 31, 51... pentagonales centrados

Las fórmulas de generación de estos números son:

$TC_n = (3n^2-3n+2)/2$

$CC_n = 2n^2-2n+1$

$PC_n = (5n^2-5n+2)/2$

como puede verse en esta tabla generada con hoja de cálculo:

| | Triangulares | Cuadrados | Pentagonales |
|---|---|---|---|
| N | (3*n^2-3*n+2)/2 | 2*n^2-2*n+1 | (5*n^2-5*n+2)/2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 10 | 13 | 16 |
| 4 | 19 | 25 | 31 |
| 5 | 31 | 41 | 51 |
| 6 | 46 | 61 | 76 |
| 7 | 64 | 85 | 106 |
| 8 | 85 | 113 | 141 |

Existe una fórmula general para la obtención del valor de un poligonal centrado:

$$POLC(n,k) = \frac{nk^2 - nk + 2}{2}$$

En ella n representa el número de lados y k su longitud. Así los triangulares tendrían como expresión

$TC_n = (3n^2-3n+2)/2$

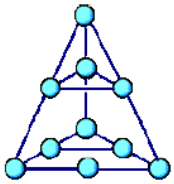
como vimos más arriba. Igual se deducen las de cuadrados, pentagonales y siguientes.

## NÚMEROS PIRAMIDALES

Son aquellos números cuyas unidades se pueden representar como puntos en los lados de una pirámide.

Al igual que los poligonales se generan añadiendo a cada uno de ellos lados nuevos, los piramidales se forman mediante **números poligonales nuevos** que van haciendo el papel de bases de una pirámide.

Tomemos, por ejemplo, los números triangulares, 1, 3, 6, 10,… Imaginemos que comenzamos por 1 (siempre se comienza con él), que hará el papel de vértice, y después le adosamos como base el siguiente triangular, 3, y después el siguiente, 6, y así hasta que obtengamos el orden deseado. Lo puedes ver en la imagen.



A los números poligonales de orden 3 (triangulares) les llamaremos **tetraédricos**, a los de orden 4, **piramidales cuadrados**, y al resto, pentagonales, hexagonales, y así hasta el orden que deseemos. Usamos la palabra *orden* para no crear confusión con la calculadora que ofrecemos. Llamaremos *lado* al número de poligonales que se acumulan.

El número piramidal de orden k y lado n (PIR(n,k)) equivale a la suma del piramidal de idéntico orden y un lado menos y el poligonal de mismo orden y lado.

**Fórmula**

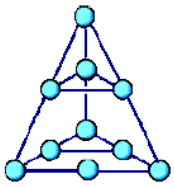
Existe una expresión general para calcular **PIR(N,K)**. De todas las versiones publicadas nos quedamos con la siguiente:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

Es un polinomio de tercer grado, al igual que los poligonales se expresan con uno de segundo.

**Tetraedros.**

A los números piramidales triangulares se les conoce también como tetraédricos, o simplemente tetraedros (abreviado, TET), en recuerdo del primer poliedro regular. Todos ellos se forman a partir del 1 adosando los distintos números triangulares, 3, 6, 10, 15, 21, 28… por lo que también podemos decir que los tetraédricos equivalen a las sumas parciales de los triangulares.



TET(1)=1

TET(2)=1+3=4

TET(3)=4+6=1+3+6=10

TET(4)=10+10)1+3+6+10=20

…

La lista de los primeros será, pues:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, 1140, 1330, 1540, 1771, 2024, 2300, 2600, 2925,… http://oeis.org/A000292

Representan pirámides formadas por números triangulares, como las balas esféricas amontonadas en capas triangulares.

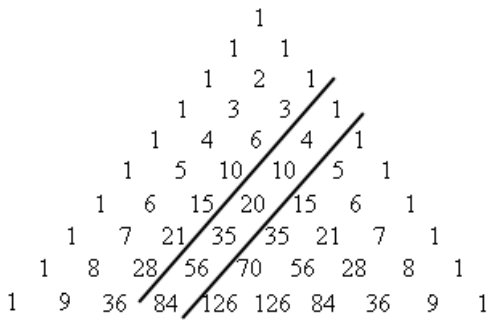
Su expresión algebraica es:

$$TET(n) = PIR(n,3) = \frac{3n^2 + n^3 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Esta expresión nos suena familiar, y es que equivale al número combinatorio n+2 sobre 3:

$$TET(n) = \binom{n+2}{3}$$

Por ser números combinatorios de orden 3, los tetraedros se situarán en la cuarta fila del triángulo de Pascal:




(Imagen adaptada de otra contenida en Wikipedia.es)

**Piramidales cuadrados**

Los piramidales cuadrangulares se forman al apilar números cuadrados consecutivos.

Los primeros números piramidales cuadrados son:

0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525, 6201, 6930, 7714, 8555, 9455,…(http://oeis.org/A000330)

Según su definición, cada piramidal cuadrado será equivalente a la suma 1+4+9+16+…, pero se conoce, y es muy popular, la fórmula de la suma de los n primeros cuadrados, que es igual a n*(n+1)*(2*n+1)/6, luego, si llamamos PCUAD(n) al enésimo piramidal cuadrado tendremos:

$$PCUAD(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si descomponemos 2n+1 en (n+2)+(n-1) resulta

$$PCUAD(n) = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

Al igual que un cuadrado se descompone en dos triángulos consecutivos, aquí serían dos tetraedros: ***Todo número piramidal cuadrado es suma de dos piramidales triangulares consecutivos.***

**Piramidales pentagonales**

Se forman añadiendo a la unidad (el vértice de la pirámide) distintos números pentagonales como si fueran cortes poligonales de la pirámide. Para nosotros es preferible ver los piramidales como suma de pentagonales sucesivos. Así, si estos forman la sucesión 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,… http://oeis.org/A000326, los piramidales correspondientes coincidirán con sus sumas parciales: 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196,…

Los primeros piramidales pentagonales son:

1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, 726, 936, 1183, 1470, 1800, 2176, 2601, 3078, 3610, 4200, 4851, 5566, 6348, 7200, 8125,

9126, 10206, 11368, 12615, 13950, 15376, 16896, 18513, 20230, 22050, 23976, 26011, 28158, 30420, 32800, 35301, 37926, 40678,…http://oeis.org/A002411

Los números piramidales pentagonales (PPENT) siguen una expresión polinómica muy sencilla:

$$PPENT(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^3+n^2}{2}$$

Esta fórmula se obtiene particularizando para 5 la general de los piramidales:

$$PIR(n,k) = \frac{3n^2 + n^3(k-2) - n(k-5)}{6}$$

$$PPENT(n) = \frac{3n^2 + n^3(5-2) - n(5-5)}{6} = \frac{3n^3+3n^2}{6} = \frac{n^3+n^2}{2}$$

Por tanto, podemos afirmar que los piramidales pentagonales son **los promedios entre el cuadrado y el cubo de un número**.

## PIRAMIDALES DE CUATRO DIMENSIONES

Al igual que la acumulación de números poligonales da lugar a los piramidales (de tres dimensiones), si encontramos las sumas parciales las podemos llamar **números piramidales de cuatro dimensiones.** No podemos dibujarlos, pero sí estudiar su fórmula y algunos ejemplos concretos.

### Fórmula

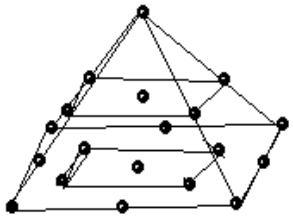
El valor de los números piramidales de cuatro dimensiones se encuentra con la expresión

$$PIRK_4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)((k-2)n+(6-k))}{24}$$

En ella **n** es el número de orden y **k** el valor del lado.

## PIRAMIDALES CENTRADOS

En el caso de tres dimensiones sí se pueden dibujar y poseemos una expresión para ellos. Se forman acumulando, mediante sumas parciales, los números poligonales centrados.



En la imagen se representa el número piramidal centrado de orden 4 (cuatro lados) y longitud 3 (tres niveles)

Su expresión general es:

$$PIRC_m(n) = \frac{mn^3 + (6-m)n}{6}$$

(Elena Deza y Michel Deza)

En ella **m** es el número de lados y **n** su longitud.

## TERNAS PITAGÓRICAS

Definiciones

Una terna de números enteros positivos se llama pitagórica si es solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$

Llamaremos ternas pitagóricas primitivas $x_0$, $y_0$ y $z_0$ a aquellas que no tienen divisores comunes. Por tanto, los tres números no pueden ser pares, luego alguno será impar. Los tres impares tampoco

pueden ser, porque z sería suma de impares y por tanto par. Tampoco puede haber un sólo impar, porque la suma no tendría la paridad adecuada, luego $z_0$ es impar y las otras dos, una par y otra impar.

En lo que sigue sólo nos referiremos a las ternas pitagóricas primitivas.

**Fórmulas de generación**

(1) $Z = m^2 + n^2$ ; $Y = m^2 – n^2$ ; $X = 2mn$ con m y n primos entre sí y de distinta paridad, con m>n.

Son pitagóricas, porque $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2$

Son primitivas, porque todo divisor de $m^2 + n^2$ y $m^2 – n^2$ es distinto de 2 (son impares) y divide a su suma y diferencia, luego divide simultáneamente a m y a n, lo que es imposible por ser coprimos. Luego ambos son primos entre sí y también con 2mn.

El perímetro tendrá como fórmula $2m^2 + 2mn$, el semiperímetro $m(m+n)$, el área $mn(m^2 - n^2)$ y por tanto, el radio del incentro $r = mn(m^2 - n^2)/(m(m+n)) = n(m-n)$

Esta propiedad del radio nos lleva a la fórmula generadora (4)

(2) $Z=(m^2 + n^2 )/2$ ; $Y=(m^2 - n^2 )/2$ ; $X=mn$ con m y n impares u coprimos y m>n

Esta es la primitiva fórmula de los pitagóricos.

(3) $X = 2n+1$ ; $Y = 2n(n+1)$ ; $Z = 2n(n+1)+1$

En efecto: $X^2+Y^2 = 4n^2+4n+1+4n^4+8n^3+4n^2$
$Z^2= (2n^2+2n+1)^2 = 4n^4+4n^2+1+8n^3+4n^2+4n$

Esta fórmula no genera todas las ternas primitivas. Sólo genera aquellas en las que el cateto mayor y la hipotenusa son números consecutivos.

(4) $Y = 2pq+q^2$ ; $X = 2pq+2p^2$ ; $Z = 2pq+2p^2+q^2$

En efecto, tomando m y n de la primera fórmula, si llamamos p=n q=m-n, m=p+q, obtendremos: r=n(m-n)=pq; $Z = m^2 + n^2 = (p+q)^2 + p^2 = 2pq+2p^2+q^2$ ; $Y = m^2 – n^2 = (p+q)^2 - p^2 = 2pq+q^2$ ; $X = 2mn = 2(p+q)p = 2pq+2p^2$

Este desarrollo demuestra fácilmente la primera de las propiedades que incluimos a continuación

Propiedades

- La diferencia entre la hipotenusa y el cateto par es un cuadrado perfecto, y su diferencia con el otro el doble de otro cuadrado perfecto.
- Por ejemplo, en la terna 35, 12, 37, la diferencia 37-12 = 25 y 37-35 = 2*1. Puedes comprobarlo con cualquiera de las fórmulas de generación.
- El cateto par es múltiplo de 4
  En efecto, si los otros dos son impares, se cumplirá que $m^2 = (2p+1)^2 - (2q+1)^2$ y desarrollando $m^2 = 4(p-q)(p+q+1)$, pero uno de los paréntesis es par. luego $m^2$ es divisible entre 8, y al ser cuadrado perfecto, entre 16, luego m es múltiplo de 4.
- La hipotenusa es congruente con 1 módulo 4
  Según la primera fórmula de generación, es suma de dos cuadrados, uno par y otro impar, luego no puede tener la forma 4K+3. Ha de ser del tipo 4K+1

**Números de Saint-Exupéry**

Reciben este nombre en la página OEIS (http://oeis.org) aquellos números que coinciden con el producto de los tres lados de una terna pitagórica. El primero, como era de esperar, es 60, que es el

producto de 3, 4 y 5, elementos de la terna más sencilla que conocemos. El segundo, 480, es el producto de sus dobles, 6*8*10. Siguen infinitos de este tipo (porque también es infinito el número de ternas.

## TRIÁNGULOS HERONIANOS

Estos triángulos están relacionados con las ternas pitagóricas, porque también representan conceptos geométricos mediante números naturales.

Un triángulo se califica de *heroniano* si las longitudes de sus lados y el valor de su área son números enteros. Es un concepto aritmético, por lo que se supone que esto ocurre con una unidad de medida adecuada. Consecuencia de esto es que también es entero el perímetro.

El nombre que les aplicamos es un recuerdo de Herón de Alejandría, autor de la popular fórmula para el área de un triángulo conocidos los lados a, b y c:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

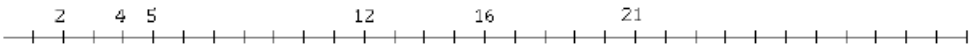
En esta fórmula, p es el semiperímetro. Si A y los lados son todos enteros, el triángulo será heroniano. Esto exige que p(p-a)(p-b)(p-c) sea un cuadrado perfecto.

Una primera clase de este tipo de triángulos lo constituyen los pitagóricos, ya que en una terna pitagórica (a, b, c), el área equivale a **a*b/2**, y en estas ternas siempre existe un cateto par

# CONJUTOS DE SIDON Y GOLOMB

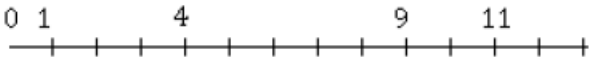
## Regla de Golomb

Se le da el nombre de Regla de Golomb a un conjunto de marcas señaladas en una regla imaginaria, tal que todas las diferencias entre marcas sean distintas. Por ejemplo, estas:




Las seis marcas presentan las quince diferencias 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,14,16,17 y 19 distintas. Se llama orden de la regla al número de marcas, en este caso 6, y longitud a la mayor diferencia entre ellas, 19 en el ejemplo.

Como lo importante del tema son las diferencias, se suele hacer coincidir la primera marca con el 0. De esta forma, la anterior regla quedaría así:




Estas marcas poseen las mismas diferencias, pero no abarcan todas las posibles medidas. Por ejemplo, con esta regla no se podría medir una distancia (diferencia) de 13. Una regla que mida todas las longitudes posibles recibe el nombre de perfecta, y si es la más corta dentro de su orden, óptima. Por ejemplo, {0,1,4.6} forman una regla perfecta, pues se pueden medir con ellas las longitudes

1,2,3,4,5 y 6.

**Conjunto de Sidon**

Un conjunto de números naturales se llama de Sidon cuando todas las sumas posibles entre sus elementos son distintas. Por ejemplo {3,5,8,9} produce las sumas 8,11,12,13,14 y 17.

Se puede demostrar que un conjunto finito de Sidon es también una regla de Golomb, y a la inversa (si se prescinde del convenio de comenzar por cero). Por tanto, un conjunto finito es de Sidon si produce diferencias entre sus elementos todas distintas. Intenta demostrarlo, que no es difícil.

## ACERCAMIENTO ENTRE POTENCIAS

Se sabe que sólo existen dos potencias que se diferencien en una unidad, que son $8=2^3$ y $9=3^2$. Sí pueden existir otros casos con diferencias mayores entre cuadrado y cubo. Vemos los primeros ejemplos:

Dif=2: $5^2+2=3^3$

Dif:=3: $2^2-3=1^3$

Dif=4: $2^2+4=2^3$; $11^2+4=5^3$

Dif=5 y 6: No hay ejemplos elementales

Dif=7: $1^2+7=2^3$; $181^2+7=32^3$

Dif=8: $3^2-8=1^3$; $4^2-8=2^3$; $312^2-8=46^3$

Dif=9: $6^2-9=3^3$; $15^2-9=6^3$; $253^2-9=40^3$

Dif=10: No hay ejemplos elementales.

Todos son casos particulares de la ecuación $x^2=y^3+k$, que necesita conocimientos profundas de Teoría de Números para su resolución. Por eso, en el blog “Números y hoja de cálculo” se han usado técnicas de búsqueda de soluciones en casos particulares. Aquí resumiremos los resultados, dejando para la siguiente entrada los detalles del cálculo:

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/10/acercamiento-entre-potencias.html

## Diferencias entre cuadrados y cubos

Estas son las primeras diferencias pequeñas entre cubo y cuadrado observadas en nuestro blog:

| n | n^2 | m | m^3 | Dife |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 16 | 2 | 8 | 8 |
| 5 | 25 | 3 | 27 | 2 |
| 6 | 36 | 3 | 27 | 9 |
| 11 | 121 | 5 | 125 | 4 |
| 15 | 225 | 6 | 216 | 9 |
| 181 | 32761 | 32 | 32768 | 7 |
| 253 | 64009 | 40 | 64000 | 9 |
| 312 | 97344 | 46 | 97336 | 8 |

## Otras potencias

Diferencias mínimas entre cubo y cuarta potencia, dife<30:

| n | n^3 | m | m^4 | Dife |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 1 | 1 | 7 |
| 3 | 27 | 2 | 16 | 11 |
| 4 | 64 | 3 | 81 | 17 |
| 37 | 50653 | 15 | 50625 | 28 |

Entre cuartas y quintas potencias, dife<50:

| n | n^4 | m | m^5 | Dife |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 1 | 1 | 15 |
| 3 | 81 | 2 | 32 | 49 |
| 4 | 256 | 3 | 243 | 13 |

Así podemos seguir con otros casos. Terminamos con cubos y séptimas potencias:

| n | n^3 | m | m^7 | Dife |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 1 | 1 | 7 |
| 3 | 27 | 1 | 1 | 26 |
| 5 | 125 | 2 | 128 | 3 |
| 13 | 2197 | 3 | 2187 | 10 |

Para terminar, agrupamos en una misma tabla diferencias menores que 10 en algunos casos. Hemos eliminado en la segunda potencia los valores 1 y 2, ya conocidos y triviales:

| n | exp1 | n^exp1 | exp2 | m | m^exp2 | Dife |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 32 | 2 | 6 | 36 | 4 |
| 2 | 5 | 32 | 3 | 3 | 27 | 5 |
| 2 | 7 | 128 | 2 | 11 | 121 | 7 |
| 2 | 7 | 128 | 3 | 5 | 125 | 3 |
| 3 | 3 | 27 | 2 | 5 | 25 | 2 |
| 5 | 2 | 25 | 3 | 3 | 27 | 2 |
| 5 | 3 | 125 | 2 | 11 | 121 | 4 |
| 6 | 2 | 36 | 3 | 3 | 27 | 9 |
| 6 | 3 | 216 | 2 | 15 | 225 | 9 |
| 8 | 5 | 32768 | 2 | 181 | 32761 | 7 |
| 11 | 2 | 121 | 3 | 5 | 125 | 4 |
| 15 | 2 | 225 | 3 | 6 | 216 | 9 |
| 32 | 3 | 32768 | 2 | 181 | 32761 | 7 |
| 40 | 3 | 64000 | 2 | 253 | 64009 | 9 |
| 46 | 3 | 97336 | 2 | 312 | 97344 | 8 |
| 181 | 2 | 32761 | 3 | 32 | 32768 | 7 |
| 181 | 2 | 32761 | 5 | 8 | 32768 | 7 |
| 253 | 2 | 64009 | 3 | 40 | 64000 | 9 |
| 312 | 2 | 97344 | 3 | 46 | 97336 | 8 |

## EQUIVALENCIA ENTRE SUMAS DE CUBOS

Sabemos desde Fermat que un cubo no se puede descomponer en suma de otros dos cubos, pero sí es posible que una suma de cubos sea equivalente a otra distinta. Por ejemplo, esta igualdad:

19^3+2^3=16^3+14^3+3^3

Como veremos más adelante, estas equivalencias son más frecuentes de lo que se podría esperar en una primera aproximación. Comenzaremos, pues, con este tipo, en el que una suma de dos cubos es equivalente a otra de tres.

Los resultados que siguen son resúmenes del estudio realizado en nuestro blog “Números y hoja de cálculo”:

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/12/equivalencia-entre-sumas-de-cubos.html

Suprimiremos las referencias a las funciones usadas en Excel, que se pueden consultar en el blog citado.

Parece ser que sólo los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 y 13 no participan en equivalencias de este tipo. Insertamos las primeras soluciones de dos cubos equivalentes a tres:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 7 1 = 6 4 4 | | |
| 8 | 8 7 = 9 5 1 | | |
| 9 | 9 7 = 10 4 2 | | |
| 11 | 11 7 = 9 9 6 | | |
| 14 | 14 2 = 12 8 8 | 14 10= 13 11 6 | 14 13= 17 3 1 |
| 15 | 15 3 = 12 11 7 | 15 5= 14 9 3 | |
| 16 | 16 7 = 15 10 4 | 16 14= 18 10 2 | |
| 17 | 17 7 = 13 12 11 | 17 11= 15 14 5 | |
| 18 | 18 14 = 20 8 4 | 18 17= 20 14 1 | |
| 19 | 19 2 = 16 14 3 | 19 5= 17 12 7 | |
| 20 | 20 12 = 19 14 5 | | |

Por ejemplo, con base 16 obtenemos dos equivalencias:

16^3+7^3=15^3+10^3+4^3; 16^3+14^3=18^3+10^3+2^3

Si sumamos los cubos del primer par, encontramos los valores comunes de las dos sumas, que están publicados en http://oeis.org/A085336

344, 855, 1072, 1674, 2752, 3402, 3500, 3744, 4439, 4941, 5256, 6244, 6840, 6867, 6984, 8576, 9288, 9604, 9728, 10261, 10656, 10745, 10773, 10989, 13357, 13392, 14167, 14364, 15093,…

Estudiando todos los números siguientes no parece que haya más excepciones. Incluso el número de soluciones aumenta con buen ritmo.

**Problema de Ramanujan**

En la anécdota famosa del taxi

(ver https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan)

aparece el número 1729 como el menor que se expresa de dos formas distintas como suma de dos cubos:

1729=1^3+12^3=10^3+9^3

El siguiente listado recoge las soluciones entre dos sumandos:

| | |
|---|---|
| 10 | 10 9 = 12 1 |
| 12 | 12 1 = 10 9 |
| 15 | 15 9 = 16 2 |
| 16 | 16 2 = 15 9 |
| 20 | 20 18 = 24 2 |
| 24 | 24 2 = 20 18  24 19= 27 10 |
| 27 | 27 10 = 24 19 |
| 30 | 30 18 = 32 4  30 27= 36 3 |

Vemos que la primera equivalencia, 10, 9 con 12, 1 es la de Ramanujan. Después le siguen

4104=15^3+9^3=16^3+2^3, 13832=20^3+18^3=24^3+2^3,…

La lista con los primeros valores la tienes en http://oeis.org/A001235

1729, 4104, 13832, 20683, 32832, 39312, 40033, 46683, 64232, 65728, 110656, 110808, 134379, 149389, 165464, 171288, 195841,…

**¿Puede un cubo ser equivalente a una suma de tres?**

La respuesta es afirmativa. Por ejemplo:

6^3=5^3+4^3+3^3

9^3=8^3+6^3+1^3, 12^3=10^3+8^3+6^3, 18^3=15^3+12^3+9^3,…

Tienes publicadas las bases del primer miembro de la igualdad en http://oeis.org/A023042

**Un cubo suma de cuatro**

Con nuestra herramienta Cartesius

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Podemos usar este planteamiento (en el listado se busca solución para el cubo de 7):

**xtotal=4**

**xt=1..7**

**xt=suc(n^3)**

**suma=343**

**creciente**

Se fija un total de cuatro cubos del 1 al 7 para que sumen el cubo de 7.

Así obtenemos la solución

7^3=6^3+5^3+1^3+1^3

Cambiando datos:

12^3=11^3+7^3+3^3+3^3

13^3=12^3+7^3+5^3+1^3

13^3=10^3+9^3+7^3+5^3…

Tienes publicadas las bases 7, 12, 13,… en http://oeis.org/A274334

**Soluciones con más sumandos**

Podemos destacar

8^3=6^3+6^3+4^3+2^3+2^3

9^3=7^3+7^3+3^3+2^3+2^3

9^3=8^3+5^3+4^3+3^3+1^3

10^3=9^3+6^3+3^3+3^3+1^3

10^3=7^3+7^3+5^3+5^3+4^3

7^3=6^3+4^3+3^3+3^3+2^3+1^3

Y muchas más.

# LOS CINCO CUBOS

En mis cálculos sobre fechas publicados en Twitter acudo casi a diario a la descomposición de un número de fecha en suma de cinco cubos o menos. El elegir el cinco se debe a limitaciones de nuestro equipo y de cualquier hoja de cálculo, que necesitan gran tiempo de cómputo para más sumandos, y al mismo atractivo de la descomposición, que queda bastante legible con pocos sumandos, pero que se complica de seis en adelante. Es, pues, una elección práctica con vistas a una publicación divulgativa.

Por ejemplo, la fecha 8/2/19 da lugar al número 8219, que se puede expresar con tres cubos:

$8219=3^3+16^3+16^3$

Al día siguiente ya se necesitan cuatro:

$9219=9^3+13^3+13^3+16^3$ o bien $9219=3^3+10^3+16^3+16^3$

Sin embargo, el día 10/2/19 necesita cinco, y el día 11 no se puede descomponer así. El número 11219 necesita más de cinco cubos.

**Teorema de Waring**

Esta cuestión que planteamos aquí es un caso particular del Teorema de Waring. Puedes leer sobre este teorema en

https://en.wikipedia.org/wiki/Waring%27s_problem

y

http://mathworld.wolfram.com/WaringsProblem.html

Según Waring, y en el caso que nos ocupa, el número mínimo para que todos los números puedan ser engendrados por una suma de cubos es 9, pero él lo conjeturó nada más. En las páginas enlazadas puedes ver que este número de potencias se expresa como g(n), con lo que la afirmación anterior se puede expresar

como g(3)=9. En 1909, Wieferich lo demostró. Aquí solo nos interesará el caso de cinco cubos o menos.

## Los cinco cubos

Nos planteamos pues, con qué frecuencia van apareciendo números en la serie natural que no se puedan expresar como suma de no más de cinco cubos. Para ello estudiaremos los casos en los que el número de cubos es 1, 2, 3, 4 o 5, y los números buscados serán el complemento de la unión de estos. El proceder así es debido a que los casos positivos (que sí admiten suma de cinco cubos o menos) tienen interés por ellos mismos, y que ya han sido publicados.

Los iremos presentando según el número de sumandos.

En todo el estudio usaremos a función POTE5(N;Z) que puedes consultar en la entrada de blog

http://hojaynumeros.blogspot.com/2019/03/los-cinco-cubos.html

Aquí nos limitaremos a presentar resultados. Vemos los casos particulares:

### Un cubo

Es el problema trivial. Los números serán los cubos perfectos, 1, 8, 27, 64,…Los tienes publicados en http://oeis.org/A000578 y no hay más que decir.

### Dos cubos

Si establecemos una búsqueda con nuestra función POTE5, obtendremos el siguiente listado:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | BA 2 &&& & 1 , 1 | |
| 9 | BA 2 &&& & 1 , 2 | |
| 16 | BA 2 &&& & 2 , 2 | |
| 28 | BA 2 &&& & 1 , 3 | |
| 35 | BA 2 &&& & 2 , 3 | |
| 54 | BA 2 &&& & 3 , 3 | |
| 65 | BA 2 &&& & 1 , 4 | |
| 72 | BA 2 &&& & 2 , 4 | |
| 91 | BA 2 &&& & 3 , 4 | |
| 126 | BB 2 &&& & 1 , 5 & 2 , 3 , 3 , 4 | |
| 128 | BB 2 &&& & 1 , 1 , 1 , 5 & 4 , 4 | |
| 133 | BA 2 &&& & 2 , 5 | |
| 152 | BB 2 &&& & 2 , 2 , 2 , 4 , 4 & 3 , 5 | |
| 189 | BA 2 &&& & 4 , 5 | |
| 217 | BB 2 &&& & 1 , 3 , 4 , 5 & 1 , 6 | |
| 224 | BB 2 &&& & 2 , 3 , 4 , 5 & 2 , 6 | |
| 243 | BB 2 &&& & 3 , 3 , 4 , 5 & 3 , 6 | |

Ignora los dos caracteres en mayúscula (El primero es el número de cubos, que aquí siempre será B, y el segundo el número de soluciones, que ves es A para una solución y B para dos)

Junto a cada solución se presentan las bases de la suma. Por ejemplo, 91=3^3+4^3. Observa que algunos también presentan soluciones más complejas con cuatro o cinco cubos.

Si recordáis la anécdota de la matrícula del taxi de Ramanujan

(https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Hardy-Ramanujan), sabréis que el primer número que presenta dos soluciones es 1729.

$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$

Los primeros números con esta propiedad están publicados en http://oeis.org/A003325 y vemos que coinciden con nuestra tabla.

**Tres cubos**

Procedemos de la misma forma que en el caso de dos cubos:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | CA 3 &&& & 1 , 1 , 1 | |
| 10 | CA 3 &&& & 1 , 1 , 2 | |
| 17 | CA 3 &&& & 1 , 2 , 2 | |
| 24 | CA 3 &&& & 2 , 2 , 2 | |
| 29 | CA 3 &&& & 1 , 1 , 3 | |
| 36 | CA 3 &&& & 1 , 2 , 3 | |
| 43 | CA 3 &&& & 2 , 2 , 3 | |
| 55 | CA 3 &&& & 1 , 3 , 3 | |
| 62 | CA 3 &&& & 2 , 3 , 3 | |
| 66 | CA 3 &&& & 1 , 1 , 4 | |
| 73 | CA 3 &&& & 1 , 2 , 4 | |
| 80 | CA 3 &&& & 2 , 2 , 4 | |
| 81 | CB 3 &&& & 1 , 2 , 2 , 4 & 3 , 3 , 3 | |
| 92 | CA 3 &&& & 1 , 3 , 4 | |
| 99 | CA 3 &&& & 2 , 3 , 4 | |
| 118 | CA 3 &&& & 3 , 3 , 4 | |
| 127 | CB 3 &&& & 1 , 1 , 5 & 1 , 2 , 3 , 3 , 4 | |
| 129 | CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 5 & 1 , 4 , 4 | |
| 134 | CB 3 &&& & 1 , 2 , 5 & 2 , 2 , 3 , 3 , 4 | |
| 136 | CB 3 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 5 & 2 , 4 , 4 | |
| 141 | CA 3 &&& & 2 , 2 , 5 | |

Algunos números presentan dos soluciones, en las que solo una está formada por tres cubos. Hay que seguir hasta el 251, que sí presenta dos soluciones de ese tipo:

$251 = 1^3+5^3+5^3 = 2^3+3^3+6^3$

Esta sucesión está publicada en http://oeis.org/A003072

**Cuatro cubos**

Este es el listado obtenido mediante nuestra función POTE5:

| | |
|---|---|
| 4 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 |
| 11 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 |
| 18 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 |
| 25 | DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 |
| 30 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 3 |
| 32 | DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 |
| 37 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 3 |
| 44 | DA 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 3 |
| 51 | DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 3 |
| 56 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 3 |
| 63 | DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 3 |
| 67 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 1 , 4 |
| 70 | DA 4 &&& & 2 , 2 , 3 , 3 |
| 74 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 4 |
| 82 | DB 4 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 4 & 1 , 3 , 3 , 3 |
| 88 | DA 4 &&& & 2 , 2 , 2 , 4 |
| 89 | DB 4 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 4 & 2 , 3 , 3 , 3 |
| 93 | DA 4 &&& & 1 , 1 , 3 , 4 |
| 100 | DA 4 &&& & 1 , 2 , 3 , 4 |

Aquí también aparecen soluciones dobles en 82 y 89.

Están publicados en http://oeis.org/A003327

En este caso se ha conjeturado que todo número mayor que 7373170279850 pertenece a la sucesión. Puedes consultar

https://www.ams.org/journals/mcom/2000-69-229/S0025-5718-99-01116-3/

## Cinco cubos

Llegamos al número de cubos que nos interesa. También es fácil encontrar los números que admiten una descomposición en cinco cubos:

| | |
|---|---|
| 5 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 1 |
| 12 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 2 |
| 19 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 2 |
| 26 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 2 |
| 31 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 3 |
| 33 | EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 2 |
| 38 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 3 |
| 40 | EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 2 |
| 45 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 2 , 2 , 3 |
| 52 | EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 2 , 3 |
| 57 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 3 , 3 |
| 59 | EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 2 , 3 |
| 68 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 1 , 4 |
| 71 | EA 5 &&& & 1 , 2 , 2 , 3 , 3 |
| 75 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 1 , 2 , 4 |
| 78 | EA 5 &&& & 2 , 2 , 2 , 3 , 3 |
| 83 | EA 5 &&& & 1 , 1 , 3 , 3 , 3 |
| 90 | EA 5 &&& & 1 , 2 , 3 , 3 , 3 |

Observamos que son frecuentes. El primero en presentar dos soluciones es 157, pues

$157 = 1^3+1^3+3^3+4^3+4^3 = 2^3+2^3+2^3+2^3+5^3$

Están publicados en http://oeis.org/A003328

**Números que no admiten descomposición en suma de cubos**

Estos son los números que más nos interesan, aquellos que no admiten ninguna forma de descomposición en suma de cubos desde 1 hasta 5. Alguno de ellos necesitará hasta 9 cubos, según el teorema de Waring.

Para encontrarlos basta imponer la condición de que POTE5(N;3)=”NO”.

Los primeros son estos:

6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 34, 39, 41, 42, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 58, 60, 61, 69, 76, 77, 79, 84, 85, 86, 87, 95, 98

También se han publicado. Los tienes en http://oeis.org/A069136

Se puede conjeturar que esta sucesión es finita.

# TEMÁTICOS

## SUCESIONES

### Sucesión de números naturales

Es toda función definida de N (conjunto de los números naturales) en N. A los elementos orígenes de la función les llamaremos **índices**, y a las imágenes **elementos** de la sucesión.

En la práctica es una secuencia ordenada de números naturales del tipo 2, 4, 7, 11, 12,....representada por los símbolos $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ...$a_n$ ... en la que $\mathbf{a_n}$ es el elemento y **n** el índice.

### Sucesión o progresión aritmética

Es aquella en la que cada término es igual al anterior sumado con un número constante llamado *diferencia*. Su fórmula de recurrencia es: $\mathbf{a_1 = a;\ a_n = a_{n-1} + d,}$ donde **a** (valor inicial) y **d** (diferencia) son constantes.

La fórmula del término general es

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

La suma de n términos viene dada por la fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

### Sucesión o progresión geométrica

Es aquella sucesión en la que cada término es igual al anterior multiplicado por un número constante ***r*** llamado *razón*. El primer término se define aparte.

La fórmula del término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma de los primeros términos:

$$a_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

## SUCESIONES RECURRENTES

Una sucesión se llama *recurrente* cuando todos sus términos, salvo los primeros, dependen de los valores de los anteriores inmediatos. El número de esos términos de los que dependen se denomina el ***orden*** de la sucesión.

Si la relación entre un término y los anteriores se basa en una fórmula lineal, diremos que la recurrencia es también de tipo *lineal*. Añadiremos el calificativo de *homogénea* si en esa fórmula no existen términos constantes.

## RECURRENCIA LINEAL DE PRIMER ORDEN

Es la del tipo $\mathbf{a_n = Aa_{n-1} + B}$. Si B=0 es la que llamamos en la sección anterior *progresión geométrica*, y a ella nos remitimos.

## RECURRENCIA LINEAL DE SEGUNDO ORDEN

Llamaremos relación de recurrencia lineal de segundo orden a la que existe entre los términos de una sucesión si reviste esta forma:

$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + a_3$

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro y sumado un tercer número. Nos dedicaremos tan sólo al caso

en el que $a_3=0$, es decir, a *relaciones lineales de segundo orden homogéneas*, pues en ellas encontraremos bastantes hechos curiosos.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Una sucesión definida por recurrencia vendrá dada así por el conjunto de valores iniciales y el de coeficientes, siendo conveniente fijar también el número de términos.

**Ecuación característica**

Existe un procedimiento simple para intentar expresar **X(n)** en función de **n** en sucesiones definidas por recurrencias de segundo orden: *la ecuación característica*. Puedes estudiarla en cualquier manual o página web específica, como

(http://people.uncw.edu/tompkinsj/133/recursion/homogeneous.htm)

En esencia este método consiste en:

(1) Dada la relación

$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

planteamos la ecuación de segundo grado

$x^2-a_1x-a_2=0$

(2) Si las soluciones de esa ecuación son distintas, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, la expresión buscada será

$x(n)= (x_1)^n$ o $x(n)= (x_2)^n$

o bien una combinación lineal de ambas:

$x(n)= C_1(x_1)^n+C_2(x_2)^n$

A veces uno de los sumandos tiende a cero al crecer n, y esto da lugar a propiedades interesantes, ya que X(n) sólo dependería aproximadamente del primer sumando.

**Función generatriz**

Es una función tal que al desarrollarla como polinomio, los coeficientes del mismo reproducen los términos de la sucesión. Veremos varias en los siguientes ejemplos.

## EJEMPLOS DE SUCESIONES RECURRENTES

## NÚMEROS DE FIBONACCI

Es la más popular de todas. Se define como $x_0=1$, $x_1=1$ y la relación de recurrencia viene dada por $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$. Sus elementos son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…

Su ecuación característica será $x^2-x-1=0$ con soluciones

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ellas dan lugar a la fórmula explícita para esta sucesión:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Como el segundo sumando tiende a cero para n tendiendo a infinito, los números de Fibonacci se aproximarán al primero, y, de hecho, el cociente entre dos consecutivos tiende al número de oro.

Su función generatriz es

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Si se inicia la sucesión en 0 en lugar de en 1, puede cambiar esta función generatriz.

**Sumas de Zeckendorf**

Cada entero positivo puede expresarse de manera única como una suma de números distintos de Fibonacci no consecutivos. Este resultado se denomina teorema de Zeckendorf y la secuencia de números de Fibonacci que se suman se denomina representación de Zeckendorf. Se llaman así en honor al médico belga y matemático aficionado E. Zeckendorf.

Para descomponer un número en sumandos de la sucesión de Fibonacci, se ha demostrado que el mejor procedimiento es el de ir restando al número el término de Fibonacci mayor posible (algoritmo voraz), hasta llegar a una diferencia que sea también de Fibonacci, con lo que se termina en un cero. El teorema correspondiente afirma que siempre se llegará a este término en las diferencias.

## SUCESIÓN DE JACOBSTHAL

Esta sucesión es poco conocida, pero tiene alguna propiedad interesante. Se define como $x_0=1$, $x_1=1$ y la relación de recurrencia viene dada por $x_n=x_{n-1}+2x_{n-2}$. Sus elementos son:

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691,…

(la tienes en http://oeis.org/A001045)

Su término general viene dado por

$$X(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

## NÚMEROS DE PELL

Tomamos como coeficientes de recurrencia $X_0$=2 y $X_1$=1. Es decir, que $X_{n+1}=2X_n+X_{n-1}$. Si como valores iniciales tomamos 0 y 1 resultan los números de Pell o números lambda http://oeis.org/A000129. Son estos:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832,…

Su fórmula general viene dada por

$$P(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n)\right)$$

Como consecuencia, por tender a cero el segundo sumando, el cociente entre dos números de Pell consecutivos es:

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} \to 1+\sqrt{2}$$

Su función generatriz es

$$\frac{x}{1-2x-x^2}$$

Para que un número de Pell P(n) sea primo es necesario que n sea primo. Los valores de n que producen esos primos son 2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53, 59, 89, 97, 101, 1,… que producen los **números de Pell primos**

2, 5, 29, 5741, 33461, 44560482149, 1746860020068409,…

## NÚMEROS DE LUCAS

Los números de Lucas se pueden engendrar con los coeficientes A=1 y B=1 comenzando con $X_0$=2 y $X_1$=1 Su definición es, por tanto $X_n=X_{n-1}+X_{n-2}$

Son estos: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571,…

Su expresión general viene dada por

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n}$$

Y su función generatriz:

$$L(x) = \frac{x_0 + (x_{1-}a_1x_0)x}{1 - a_1x - a_2x^2} = \frac{2 + (1 - 1 * 2)x}{1 - 1x - x^2} = \frac{2 - x}{1 - 2x - x^2}$$

## RECURRENCIA LINEAL DE TERCER ORDEN

**Definición**

Las recurrencias de tercer orden son idénticas a las de segundo, pero con un término más en la fórmula (nos referiremos tan sólo a las homogéneas). Su recurrencia vendrá definida por

$x_n= A*x_{n-1}+B*x_{n-2}+C*x_{n-3}$

El resto de cuestiones es similar a las de segundo orden.

## SUCESIÓN DE PERRIN

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=3}$ $\mathbf{x_1=0}$ $\mathbf{x_2=2}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n=x_{n-2}+x_{n-3}}$

Es como una sucesión del tipo Fibonacci pero “con retraso”, pues los que se suman no son los dos anteriores, sino los que están un paso más atrás.

Esta popular sucesión la tienes disponible en

http://oeis.org/A001608, donde les llaman números skiponacci, quizás por los saltos o retardos que presentan: 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853,…

**Ecuación característica**

La ecuación característica correspondiente será $X^3$-x-1=0. Con la suma de potencias de sus tres soluciones obtenemos la expression del término general:

La solución real 1,32471…(aquí sólo aproximada) es el ***número plástico*** $\psi$, cuyo nombre se eligió como afín al número de oro o el de plata. Como en casos anteriores, los cocientes entre términos consecutivos tienden a él.

**Función generatriz**

$$F(x) = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

**Sucesión de Perrin y números primos**

La propiedad más conocida de estos números es que si **p** es primo, **p** divide a **X(p).** Por ejemplo, X(11)=22, que es múltiplo de 11. A pesar de su carácter algo extraño, la propiedad ha sido demostrada para todos los números primos. La contraria no es cierta. X(n) puede ser múltiplo de n sin que este sea primo. A estos términos se les suele llamar pseudoprimos de Perrin (http://oeis.org/A013998):

271441, 904631, 16532714, 24658561, 27422714, 27664033, 46672291,…

## SUCESIÓN DE NARAYANA

Esta sucesión fue ideada por el hindú Narayana (siglo XIV), e intentaba calcular con ella generaciones de vacas, al igual que Fibonacci lo hacía con conejos. Planteó lo siguiente:

Una vaca tiene anualmente una cría. Cada una de ellas, cuando ya es novilla a los cuatro años, también tiene una cría anual ¿Cuántas vacas habrá a los 20 años?

Este proceso es recurrente:

En efecto, supongamos que nace la vaca en el año 1. Se pasará tres años sin parir, por lo que la sucesión deberá comenzar con 1, 1, 1,… Al cuarto año tiene una cría, luego ya serán 2 vacas, y, como pare cada año, los siguientes números serán 3 y 4. Cuando la cría tiene 4 años, tendrá otra a su vez, y serán 6. En general, en cada generación habrá tantas vacas como las que haya actuales, más todas aquellas que ya tengan cuatro años, lo que nos lleva a que $\mathbf{x_n=x_{n-1}+x_{n-3}}$

Según esto, la sucesión de Narayana es recurrente de tercer orden.

La definición de la sucesión, como todas las de su clase, se basa en dar la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales. Según lo explicado más arriba, son estas:

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=1}$ $\mathbf{x_1=1}$ $\mathbf{x_2=1}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n=x_{n-1}+x_{n-3}}$

Coincide con la sucesión publicada en http://oeis.org/A000930

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745,…

## Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente es $X^3$-$x^2$-1=0. Al resolverla obtenemos una raíz real, 1,46557, y como ocurre en casos similares. El cociente X(n+1)/X(n) se acercará a ese valor 1,46557.

## Función generatriz

Al igual que en las sucesiones recurrentes que ya hemos estudiado, podemos considerar una función generatriz para esta. Es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}$$

Los coeficientes de su desarrollo en polinomio coinciden con los términos de la sucesión.

1 + x + x^2 + 2*x^3 + 3*x^4 + 4*x^5 + 6*x^6 + 9*x^7 + 13*x^8 + 19*x^9 + 28*x^10 + 41*x^11 + 60*x^12 + 88*x^13 + 129*x^14 + 189*x^15 + 277*x^16 + 406*x^17 + 595*x^18 + 872*x^19 +…

Cálculo directo de un término

Se puede demostrar que los términos de esta sucesión vienen dados por una suma de números combinatorios:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{n/3} \binom{n-2i}{i}$$

## SUCESIÓN DE PADOVAN

Esta sucesión es similar a la de Perrin, pero con condiciones iniciales distintas. En ambas la recurrencia viene definida por $\mathbf{x_n=x_{n-2}+x_{n-3}}$, pero mientras que en la de Perrin son $\mathbf{x_0=3\ x_1=0\ \ x_2=2}$, en la de Padovan $\mathbf{x_0=1\ x_1=1\ \ x_2=1}$.

Sus primeros términos son: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432 (http://oeis.org/A134816)

En el resto de características es muy parecida a la anterior.

## NÚMEROS "TRIBONACCI"

Los números "tribonacci" son análogos a los de Fibonacci, pero generados mediante recurrencias de tercer orden homogéneas. Existen muchas sucesiones con este nombre, según sean sus condiciones iniciales. Aquí comenzaremos con la contenida en http://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html, pero podemos cambiar más tarde si surgen propiedades interesantes para su estudio con hoja de cálculo.

En estos números la fórmula de recurrencia posee todos sus coeficientes iguales a la unidad

$x_n= A*x_{n-1}+B*x_{n-2}+C*x_{n-3}$ se convertiría en $x_n= x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}$

Al igual que en el caso de Fibonacci, los dos valores iniciales también valen 1, y el tercero, 2: $\mathbf{x_0=1\ x_1=1\ \ x_2=2}$

Los primeros términos son:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744,… http://oeis.org/A000073

**Ecuación característica**

Al igual que en otras sucesiones recurrentes, su ecuación característica se formará a partir de sus coeficientes, en este caso todos iguales a 1, luego será $\mathbf{x^3-x^2-x-1=0}$

Recordemos que los elementos de las sucesiones recurrentes se pueden expresar como suma de potencias de las tres soluciones, pero con estos números ocurre como con algunos similares (los de Fibonacci, Perrin o Narayana), y es que las raíces complejas, al tener módulo inferior a la unidad, tienden a cero si prolongamos la sucesión. Por ello, las potencias de la raíz real, 1,839286…generan con bastante aproximación los números Tribonacci, y, lo que es lo mismo, esta constante coincidirá aproximadamente con el cociente entre dos de estos números consecutivos.

**Función generatriz**

Todas las variantes de las sucesiones Tribonacci comparten los mismos coeficientes de recurrencia, y por tanto también el denominador de su función generatriz. La que estamos estudiando en esta entrada, de inicio 1, 1, 2, se genera con la siguiente:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2 - x^3}$$

## NÚMEROS DE CATALAN

Llamaremos números de Catalan a los términos de la sucesión 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796,...

Fueron descubiertos por Euler al estudiar las particiones de los polígonos convexos en triángulos que no se intersecten. Así, el cuadrado se puede dividir en triángulos de dos formas distintas, el pentágono de 5, y así con todos. Intenta dibujar las particiones.

Su generación mediante un procedimiento recursivo se obtiene de esta forma:

Añadimos un 1 a la sucesión y, entonces, basta hacer $C_{n+1} = C_n*(4n-6)/n$

Para n>2 su fórmula explícita es

$$C_n = \frac{2 \times 6 \times 10 \times \ldots (4n-10)}{(n-1)!}$$

Estos números también equivalen a las formas de introducir paréntesis (que todos encierren dos elementos) dentro de n símbolos. Por ejemplo, para los símbolos abcd existen 5 formas (número de Catalan para n=4) de introducir paréntesis.

((ab)(cd)) (((ab)c)d) (a(b(cd))) (a((bc)d)) ((a(bc)d)

También coinciden, en la Teoría de Grafos, con el número de árboles plantados trivalentes.

## SUCESIONES CURIOSAS

### SUCESIÓN DE RECAMÁN

Esta original sucesión la envió Bernardo Recamán Santos a N. J. A. Sloane en 1991 para su colección, y que desde entonces ha originado múltiples desarrollos, incluso musicales

(ver https://www.youtube.com/watch?v=h3qEigSSuF0).

Su definición es la siguiente (versión con $a_1$=1):

$a_1=1$

$a_n = a_{n-1} – n$, si este valor es positivo y no figura ya en la sucesión

$a_n = a_{n-1} +n$, en caso contrario.

Sus primeros términos son: 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, 17, 43, 16, 44, 15, 45, 14, 46, 79, 113, 78, 114, 77, 39, 78, 38, 79, 37, 80, 36, 81, 35, 82, 34, 83, 33, 84, 32, 85, 31, 86, 30, 87, 29, 88, 28, 89, 27, 90, 26, 91, 157,… (existe otra versión que comienza en 0, idéntica a esta en todo lo demás http://oeis.org/A005132)

El tema está desarrollado en el blog "Números y hoja de cálculo":

http://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/sucesion-de-recaman.html

## SUCESIÓN DE GOLOMB

Ya estudiamos en 2010 en nuestro blog conjuntos relacionados con este matemático

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Aquí lo hacemos con una de sus sucesiones. Se trata de esta:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12,…

http://oeis.org/A001462

También se la conoce como sucesión de Silverman. Es no-decreciente.

Tiene una definición muy curiosa, y es que **a(n)** representa el número de veces que aparece **n** en la sucesión, si además

definimos a(1)=1 e implícitamente aceptamos que cada valor de n ocupa el mínimo número de orden posible.

Lo verás mejor si acompañamos cada valor con su índice:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a(n) | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |

La imagen de 1 es 1 por definición. La de 2 es 2 porque en la sucesión figura ese valor dos veces. También el 3 aparece repetido, por lo que a(3)=2. A(4)=3 debido a que aparecen tres cuatros, y así con todos.

Este es un ejemplo muy elegante de *autorreferencia*, pues se define un objeto como si ya estuviera construido, pero sólo lo podemos formar si seguimos la definición.

Si aceptamos la condición de que cada valor ocupe el primer número de orden que esté libre, y que cada nueva imagen es la menor que cumple a(n)>=a(n-1), esta sucesión es única. En efecto, nos ponemos a razonar:

A(1)=1 por definición, luego sólo existirá un 1 en la sucesión, por lo que la imagen de 2 no podrá ser 1. Según las condiciones, ha de ser 2, luego en la sucesión deberá haber un par de 2. Como hemos quedado en que se ocupan los menores números de orden, deberá quedar:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 2 |

Esto significa que a(3)=2, luego también repetiremos el 3 dos veces:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |

Obligamos así a que el 4 y el 5 figuren tres veces:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |

Esta sucesión se estudió en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2015/11/sucesion-de-golomb.html

## NÚMEROS BELGAS

Estos números han sido introducidos por Eric Angelini y publicados en el año 2005 en http://oeis.org/A106039. Hay varios tipos, por lo que comenzaremos con los 0-Belgas. Estos números tienen la propiedad de que si a partir del número 0 vamos sumando reiteradamente las cifras (por orden) del número dado, se forma una sucesión que contiene a ese número. Por ejemplo, el 18 es 0-belga, porque a partir del 0 vamos a ir sumando sucesivamente 1, 8, 1, 8,…hasta llegar o sobrepasar el 18: 0, 1, 9, 10, 18, resultando que el mismo 18 es término de la sucesión. Sin embargo, el 19 no lo es, porque se forma la sucesión 0, 1, 10, 11, 20, 21, 30,…al ir sumando sucesivamente 1, 9, 1, 9,… y el mismo 19 es sobrepasado sin pertenecer a la sucesión. Se llaman 0-belgas porque la sucesión la comenzamos en 0, y los primeros son estos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 39, … http://oeis.org/A106039

Si un número posee 3, 4 o más cifras, estas se irán también sumando de forma sucesiva y ordenada.

Llamaremos n-belgas a aquellos números que pertenecen a la sucesión formada al sumar cifras, pero comenzando en el número **n**, siendo n menor que el número dado. Así, estos son los 1-belgas:

1, 10, 11, 13, 16, 17, 21, 23, 41, 43, 56, 58, 74, 81, 91, 97, 100, 101, 106, 110,… http://oeis.org/A106439

Por ejemplo, el 23, comenzando en 1, genera con las cifras 2 y 3 la sucesión 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23,…a la que él mismo pertenece.

Se han publicado también los 2-belgas (A106518), los 3-belgas (A106596) y otros.

Puedes completar este tema en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2015/12/numeros-belgas.html

## SUCESIÓN DE MIAN-CHOWLA

Esta sucesión se define por recurrencia de dos formas equivalentes:

(a) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las sumas a(i)+a(j) con i, j ≤n son distintas.

(b) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las diferencias a(i)-a(j) con i,j≤n i>j son distintas.

Aquí trabajaremos con la primera.

Pertenece al rango de problemas y conjuntos de Sidon, matemático que estudió las cuestiones sobre sumas o diferencias todas distintas, Puedes leer nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Los primeros elementos son 1, 2 , 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66,... http://oeis.org/A005282

Comprobemos la definición con el 8: Los términos anteriores (1, 2, 4) producen las siguientes sumas 2, 3, 4, 5, 6, 8. Deberíamos ahora probar con el siguiente número, el 5, pero este produce la suma 1+5=6, que ya está en la lista, luego no es válido. Probamos el 6, y

la suma 2+6=8 lo invalida. El 7 tampoco pertenece a la sucesión, ya que 1+7=8 pertenece a la lista de sumas. Probamos el 8, que produce las sumas 9, 10 y 12, no incluidas en la lista, luego el 8 es válido y se incorpora a la lista.

Estudio más completo en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/03/sucesion-de-mian-chowla.html

## LA PERMUTACIÓN YELLOWSTONE

Esta sucesión se comienza con los valores a(1)=1, a(2)=2 y a(3)=3, y los siguientes a(n) son los números naturales más pequeños que aún no hayan aparecido en la sucesión y que tengan algún factor común con a(n-2) y ninguno con a(n-1). Para entenderlo bien podemos ir generando términos según la definición. A 1, 2 y 3 le debe seguir el 4, que es el más pequeño que comparte factores primos con el 2 pero no con el 3. Tenemos ya 1, 2, 3 y 4.

El siguiente no puede ser 5, 6, 7 ni 8. Deberá ser el 9, que comparte el factor 3 con el 3 y ninguno con el 4. Así podemos seguir generando, hasta completar:

1, 2, 3, 4, 9, 8, 15, 14, 5, 6, 25, 12, 35, 16, 7, 10, 21, 20, 27, 22, 39, 11, 13, 33, 26, 45, 28, 51, 32, 17, 18, 85, 24, 55, 34, 65,…( http://oeis.org/A098550)

Esta sucesión no es creciente, y algunos números tardan en aparecer, como el 10. Se llama permutación porque se ha demostrado que todos los números naturales aparecen una vez (Ver https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL18/Sloane/sloane9.pdf)

Puedes consultar el documento

http://arxiv.org/pdf/1501.01669v2.pdf

Y también en nuestro blog:

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/06/la-permutacion-yellowstone.html

## HIPOTENUSEANDO

Se presenta en este apartado la sucesión http://oeis.org/A104863

10, 30, 31, 43, 53, 68, 86, 109, 138, 175, 222, 282, 358, 455, 578, 735, 935, 1189,…

En ella, a partir de los valores a(1)=10 y a(2)=30, se van formando los siguientes como **la parte entera de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los dos anteriores**.

Así, el tercer elemento es igual a

ENTERO(RAIZ(10^2+30^2))=ENTERO(RAIZ(1000))=ENTERO(31,62)=31.

Prueba a justificar que el siguiente es 43.

Esta definición equivale a que cada término es la hipotenusa truncada correspondiente a los términos anteriores tomados como catetos. Por eso le hemos llamado a esta sucesión la de "hipotenusear". Su expresión recurrente sería:

$$a_n = Int\left(\sqrt{{a_{n-2}}^2 + {a_{n-1}}^2}\right)$$

Esta sucesión presenta algunas características que le hacen merecer este estudio:

(1) El uso de la parte entera obliga a renunciar a las fórmulas teóricas. De hecho, en términos avanzados de la sucesión, el cumplimiento del Teorema de Pitágoras es deplorable. Observa

este ejemplo, en el que a(n-2)=8348, a(n-1)= 10618 y a(n)=13506. Si elevamos al cuadrado obtenemos:

13506^2=182412036

8348^2+10618^2=182431028

Restamos y nos queda un error de 18992 unidades. Así que las hipotenusas que obtengamos con esta recurrencia **no son tales**, aunque seguiremos llamándolas así.

(2) Como también ocurre en las recurrencias lineales, el cociente entre dos términos consecutivos se va estabilizando y tiende a un límite. Esto nos permite “razonar en el límite”, aunque sepamos que es una técnica aproximada, que sólo nos valdrá para explicar (y no demostrar) algunas conjeturas que se han afirmado para esta sucesión y otras similares.

(3) La sucesión presentada es sólo un caso particular de toda una familia en la que podemos fijar a(1) y a(2) como deseemos. La mayoría de las propiedades se mantendrán. Vemos la primera:

Conjetura: El límite del cociente a(n+1)/a(n) es la raíz cuadrada del número áureo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\emptyset} = 1{,}27201965 \ldots$$

La llamamos conjetura por causa de la parte entera, que nos impide mejores razonamientos.

Para más información:

http://hojaynumeros.blogspot.com/2016/10/hipotenuseando.html

# NÚMEROS DE ULAM

Se llaman *números de Ulam* a los que forman una sucesión construida de la siguiente forma:

Se declara u(1)=1 y u(2)=2 (veremos que esto se puede alterar) y después definiremos u(n+1) como el primer número que se pueda expresar como **suma de dos números de Ulam anteriores distintos, de forma única**.

Los creó el matemático polaco Stanislaw Ulam y los publicó en SIAM Review en 1964.

Puedes ampliar este concepto en las páginas

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_de_Ulam

http://www.grupoalquerque.es/mate_cerca/paneles_2014/221_Numeros%20de%20Ulam.pdf

https://www.gaussianos.com/feliz-ano-2012/

El 1 y el 2 se toman de forma arbitraria. El siguiente deberá ser el 3, ya que 3=1+2 de forma única. También está claro que el cuarto debe ser 4=1+3, pues 4=2+2 no sería válido por ser iguales los sumandos.

Deberíamos rechazar el 5, pues 5=1+4=2+3. El 6 sí nos vale, pues 6=2+4, siendo no válida la suma 6=3+3.

Por tanto, los primeros términos de la sucesión de Ulam serán 1, 2, 3, 4, 6. Es sencillo buscar los siguientes: 8, 11, 13, 16, 18, 26,…

Tienes más elementos en http://oeis.org/A002858, junto con una gran cantidad de comentarios sobre estos números.

# CUESTIONES DIOFÁNTICAS

## ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Una ecuación diofántica es aquella, generalmente de al menos dos incógnitas, definida en el conjunto de los enteros tanto para sus coeficientes como para los valores que puedan tomar las incógnitas.

## SISTEMA DIOFÁNTICO

Es aquel que está formado por ecuaciones diofánticas.

## ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL

La ecuación diofántica de tipo lineal más sencilla es la del tipo $Ax+By=C$

Para que tenga solución ha de ser C múltiplo de $D=MCD(A,B)$. Se resuelve considerando el teorema que afirma que existen dos enteros m y n tales que $mA+nB=D$. Los valores de m y n se calculan mediante el algoritmo de Euclides y el algoritmo de las reducidas o convergentes.

Efectivamente, si consultas la teoría de fracciones continuas verás que la diferencia entre dos reducidas consecutivas equivale a una fracción de numerador la unidad y de denominador el producto de sus denominadores. Esta propiedad también se cumple entre la última reducida y la fracción dada.

Vemos cómo se aprovecha esta propiedad para resolver la ecuación diofántica lineal

Sea, por ejemplo, la ecuación $244X+108Y=112$.

Simplificamos: $61X+27Y=28$, con $MCD(61,27)=1$

Buscamos las reducidas de la fracción 61/27 y elegimos la última 9/4

| Fracción continua: | | | 2 | 3 | 1 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Algoritmo de Euclides | | 61 | 27 | 7 | 6 | 1 |
| | | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| Reducidas | 0 | 1 | 2 | 7 | 9 | 61 |
| | 1 | 0 | 1 | 3 | 4 | 27 |

Se cumplirá, según la propiedad citada, que 61*4-27*9=1, luego 4 y -9 serán las soluciones de 61X+27Y=1. Bastará multiplicar por el término independiente 28 para obtener una solución: X=4*28 = 112 e Y=-9*28 = -252

Las demás soluciones se obtienen mediante las paramétricas

X=112-27v
Y=-252+61v

Si se desean soluciones positivas deberemos ajustar el parámetro v

## ECUACIÓN PITAGÓRICA

Es la que tiene la forma $x^2 + y^2 = z^2$

Llamaremos soluciones primitivas $x_0$, $y_0$ y $z_0$ a aquellas que no tienen divisores comunes. Se puede demostrar que $z_0$ es impar y las otras dos, una par y otra impar.

Las soluciones primitivas se obtienen mediante las fórmulas

$X = m^2 + n^2$

$Y = m^2 – n^2$

$Z = 2mn$

con m y n primos entre sí y de distinta paridad, con m>n.

Si multiplicamos cualquier conjunto de soluciones primitivas por un mismo número, obtendremos infinitas soluciones.

# FRACCIONES CONTINUAS

**Definición**

Llamamos fracción continua a la expresada de esta forma:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$$

donde a es entero y b, c…son enteros positivos llamados cocientes (o cocientes parciales). Toda fracción ordinaria se puede expresar de esta forma, y todo número irracional admite aproximaciones mediante desarrollos de este tipo. Si se exige que el último cociente sea distinto de 1 esta representación es única.

Las fracciones continuas también se expresan mediante el conjunto ordenado de los cocientes: [a, b, c, d...]

Caso 1: Fracción ordinaria

Los cocientes a, b, c,… son los que aparecen en el algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d. de dos números. Así, por ejemplo, para encontrar el m.c.d. de 345 y 1280, en el algoritmo se obtienen los siguientes cocientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 1280 | 345 | 245 | 100 | 45 | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 245 | 100 | 45 | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

En el desarrollo mediante fracciones continuas de 1280/345 vuelven a aparecer los mismos cocientes 3,1,2,2,….¡porque se trata del mismo algoritmo orientado de forma diferente! En la siguiente

imagen, capturada de la hoja de cálculo **fraccont.ods**,

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numerador | 1280 | Fracción continua: | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| Denominador | 345 | | 3 | 4 | 11 | 26 | 115 | 256 |
| | | | 1 | 1 | 3 | 7 | 31 | 69 |

puedes comprobar la evidente igualdad de la serie de cocientes. Comprueba que, efectivamente, es válido este desarrollo:

$$\frac{1280}{345} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}}$$

Estos desarrollos son finitos, porque así lo es el conjunto de los coeficientes del algoritmo de Euclides. Veremos más adelante que en el caso de irracionales son infinitos. En ambos casos se puede demostrar que son únicos.

Convergentes

Para un desarrollo cualquiera en fracción continua

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d \ldots}}}$$

se llaman reducidas o convergentes a los desarrollos

$$a \qquad a + \frac{1}{b} \qquad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} \qquad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

a los que nombraremos como $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$... En el caso del ejemplo obtendríamos:

3=3; 3+1/1=4; 3+1/(1+1/2)=11/3…

**Cumulantes**

Los convergentes son fundamentales en los desarrollos de las funciones continuas, como se verá más adelante. El algoritmo más sencillo para crearlos consiste en comenzar con el cálculo de los cocientes mediante el algoritmo de Euclides y después añadir dos filas de numeradores y denominadores para las convergentes tal como se ve en la imagen, comenzando con 0 y 1 para los numeradores y 1, 0 para los denominadores. En el ejemplo 1280/345 quedaría así

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | |

Después las fracciones reducidas o convergentes se obtienen mediante un algoritmo clásico llamado de “los cumulantes”. Consiste en construir dos sucesiones recurrentes del tipo

$P_n = p_{n-1}*a_n+p_{n-2}$

Se multiplica cada cociente superior por el último numerador o denominador, sumando posteriormente el penúltimo:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 0 | 1 | 3 | 4 | 11 | 26 | 115 | 256 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 7 | 31 | 69 |

En realidad lo que se hace es "deshacer" las operaciones del Algoritmo de Euclides.

Las convergentes o reducidas poseen varias propiedades importantes. Destacamos alguna:

- Todas las reducidas son fracciones irreducibles.
- Las de índice par (comenzando por el cero) forman una sucesión creciente y las de orden impar decreciente, siendo cota de ambas la fracción ordinaria que se desarrolla. Por tanto, las de orden par son mayores que las de orden impar.
- La última reducida equivale a la fracción original simplificada. Así 1280/345 = 256/69. Las demás son aproximaciones por exceso o defecto.
- La diferencia entre dos reducidas consecutivas equivale a la unidad positiva o negativa dividida entre el producto de sus denominadores. También podemos expresarlo como que el producto en cruz de sus numeradores y denominadores es igual a 1 o a -1.

**Aproximación diofántica**

Es evidente que las reducidas aproximan la fracción que se haya expresado en forma continua. Así, 115/31 es una aproximación a 256/68 en el ejemplo anterior, Lo interesante es que también pueden aproximare a los números irracionales. Por ejemplo, la fracción 3650401/2107560 es una muy buena aproximación de la raíz cuadrada de 3 (coinciden en los trece primeros decimales)

Cualquier número expresado en forma decimal puede representarse mediante una fracción continua. Si el número es racional, ésta será finita, pero si es irracional no podrá serlo, y tendríamos que prolongar el desarrollo de la fracción continua hasta el infinito. En los siguientes párrafos veremos cómo.

Un caso muy interesante es el de los irracionales cuadráticos, que, como demostró Lagrange, presentan desarrollos periódicos.

¿Cómo desarrollar un decimal cualquiera en fracción continua exacta (caso racional) o aproximada (si es irracional)?

La idea es: separamos la parte entera y la parte decimal del número N=e+d, y la decimal la expresamos así: N=e+1/(1/d). Volvemos a separar parte entera y decimal de 1/d y reiteramos, con lo que irán apareciendo los cocientes enteros de una fracción continua.

Probamos con la raíz cuadrada de 3. Los cálculos serían:

1,73205080757 = 1+ (1/(1/1,73205080757) =
1+ 1/1,36602540378 = 1+ 1/(1+1/2,73205080760) =
1+1/(1+1/(2+1/1,36602540378) = ….

Al salir este último número se descubre la periodicidad, luego 1,73205080757 equivale a la fracción continua

[1,1,2,1,2,1,2,….] que es periódica por tratarse de un irracional cuadrático.

A continuación destacamos algunos desarrollos importantes:

$$\sqrt{2} = [1,2,2,2,2...]$$

Se llaman números de Pell a los denominadores de este desarrollo en fracciones continuas de la raíz cuadrada de 2.

**Números metálicos**

Son soluciones de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - bx - 1 = 0$

**Número de oro**

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1,1,1,1,1...]$$

Es solución de la ecuación $x^2$-x-1 = 0

**Número de plata**

$$\varphi = 1+\sqrt{2} = [2,2,2,2...]$$

Es solución de la ecuación $x^2$-2x-1 = 0

**Número de bronce**

$$\psi = \frac{\sqrt{13}+3}{2} = [3,3,3,3...]$$

Es solución de la ecuación $x^2$-3x-1 = 0

## ECUACIÓN DE PELL

Una aplicación importante de las fracciones continuas es la resolución de la ecuación de Pell

Se llama ecuación de Pell (por error, porque Pell no la estudió) a la ecuación diofántica cuadrática $X^2 - DY^2 = 1$, con X e Y variables enteras y D número entero positivo no cuadrado perfecto. Existe una variante con el segundo miembro -1 que se resuelve de forma similar, con algunas restricciones, y también se consideran los casos en los que se trate de cualquier número entero.

En su resolución hay que distinguir dos problemas:

**Primera solución**

Una primera solución no es difícil de encontrar en general. (a) Puedes acudir a un simple tanteo entre cuadrados perfectos. Por ejemplo, una solución de $X^2 - 6Y^2 = 1$ es $X_0=5$ $Y_0=2$. Con una hoja de cálculo no es tarea muy complicada.

(b) Las fracciones continuas también son útiles en la resolución de esta ecuación. Basta para ello desarrollar la raíz cuadrada de D mediante ellas y, según vimos en una sección anterior, aprovechar la periodicidad del desarrollo. En el caso de la ecuación de Pell basta tomar las reducidas anteriores a la finalización del primer periodo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 |
| 2 | 5 | 22 | 49 | 218 | 485 | 2158 | 4801 |
| 1 | 2 | 9 | 20 | 89 | 198 | 881 | 1960 |
| -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| | Solución | | Solución | | Solución | | Solución |

En la imagen observarás que la solución $X_0=5,Y_0=2$ aparece antes del final del primer periodo [2,4] en el desarrollo por fracciones continuas. Después siguen otras: X=49, Y=20, X=485, Y=198, etc.

En nuestro modelo de hoja de cálculo que recomendamos más abajo basta escribir el valor de D y el segundo miembro +1 ó -1 y la hoja se encarga de desarrollar la raíz cuadrada de D mediante fracciones continuas:

**Siguientes soluciones**

Según la teoría del anillo Q(√D), que no podemos desarrollar aquí, las primeras soluciones, escritas como X0+Y0 (√D) constituyen una

unidad del anillo, y también lo serán todas sus potencias, por lo que las siguientes soluciones provendrán de los desarrollos de las expresiones

$$\left(X_0 + Y_0\sqrt{D}\right)^n$$

agrupando después los términos que no contienen el radical como valor de Y y los que sí lo contienen como valor de X. Este método puede ser fatigoso, por lo que es mejor ir obteniendo las distintas soluciones por recurrencia. En efecto, de la anterior consideración se deduce que

$$\left(X_n + Y_n\sqrt{D}\right) = \left(X_{n-1} + Y_{n-1}\sqrt{D}\right)\left(X_0 + Y_0\sqrt{D}\right)$$

O bien, separando términos:

$$X_n = X_{n-1}X_0 + Y_{n-1}Y_0D$$

$$Y_n = X_{n-1}Y_0 + Y_{n-1}X_0$$

Estas son las fórmulas que hemos usado en la hoja de cálculo.

Puedes consultar la búsqueda de la primera solución por fracciones continuas y la recurrencia para las siguientes en las hojas de cálculo pell.ods para Calc y pell.xls para Excel

Por ejemplo, intenta resolver esta cuestión: ¿Qué cuadrado perfecto de diez cifras, al quitarle una unidad se puede descomponer en cinco cuadrados perfectos idénticos?

# SUMAS DE CUADRADOS

Todo comenzó con Fermat

Hay números que se pueden descomponer en suma de dos cuadrados, pero ¿de cuántas formas?

Para conseguir una respuesta a la pregunta formulada se necesitaron esfuerzos de varios matemáticos, pero todo comenzó con Fermat y su Teorema de Navidad (lo comunicó a Mersenne el 25 de Diciembre de 1640, pero no lo demostró), y que actualmente expresamos así:

Un número primo se puede descomponer en suma de dos cuadrados $x^2+y^2$ de números enteros si y sólo si es el número 2 o bien es congruente con 1 módulo 4 (es decir, si es de la forma 4n+1).

El teorema directo es difícil de demostrar, y lo ha sido a lo largo de siglos mediante diversas técnicas (descenso infinito, enteros gausianos, etc.), siendo Euler el primero que lo logró. El inverso está a nuestro alcance. Inténtalo:

Un número primo congruente con 3 módulo 4 no puede descomponerse en suma de dos cuadrados de números enteros.

Gauss, en la sección 182 de sus Disquisitiones arithmeticae destacó que esa descomposición es única, salvo orden y signo. Los dos números x e y han de ser primos entre sí ¿por qué?

De este hecho podemos obtener un criterio marginal: Si un número de la forma 4n+1 no se puede descomponer en dos cuadrados o bien lo puede de más de una forma, no es primo.

Esta propiedad de poder descomponerse en suma de dos cuadrados se mantiene si multiplicamos dos números primos de este tipo, y además se puede duplicar el número de posibles sumas. Así, si $13 = 2^2+3^2$ y $5 = 2^2+1^2$, al multiplicarlos obtenemos:

$65 = 13*5 = 8^2+1^2 = 7^2+4^2$

Esta propiedad se desprende de la famosa identidad:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

que nos viene a decir que este producto también es suma de dos cuadrados y además de dos formas distintas (si los sumandos son distintos):

65 = $(2*2+3*1)^2$ +$(2*1-3*2)^2$ = $7^2+4^2$ (obsérvese que en el cálculo se ha obtenido -4 y no 4)

65 = $(2*2-3*1)^2$ +$(2*1+3*2)^2$ = $8^2+1^2$

Ocurre lo mismo si se multiplica el número primo por 2 (elemental ¿no?)

## FÓRMULA DE GAUSS

Estas propiedades se resumen en un criterio que no vamos a desarrollar aquí, y es que sólo se pueden descomponer en cuadrados los números en los que los factores primos del tipo 4n+3 figuren en su descomposición con exponente par. Gauss fue más allá en esa sección 182, pues dio una fórmula para contar el número de formas diferentes en las que se descompone un número en suma de dos cuadrados con base no negativa:

$$N = ES[(\alpha+1)(\beta+1)\dots(\delta+1)/2]$$

donde ES significa “mínimo entero igual o superior” y los factores que le siguen se corresponden con los exponentes de los factores del tipo 4n+1 aumentados en una unidad. La fórmula, como advierte Gauss, sólo es válida si los factores del tipo 4n+3 forman un cuadrado perfecto.

Así, por ejemplo, el número 325=52*13 se deberá descomponer en

N=ES((2+1)(1+1)/2)=ES(3*2/2)=ES(3)=3

En efecto, 325=$1^2$ + $18^2$ = $6^2$ + $17^2$ = $10^2$ + $15^2$ (tres formas distintas)

Y el número 6664 sólo de una forma, pues 6664 = 23*72*17 y aplicando la fórmula nos daría

N=ES(1+1)/2 = ES(1)=1, y su descomposición única es $6664=42^2+70^2$

Actualmente se prefiere considerar todas las sumas de cuadrados posibles, incluyendo bases negativas y teniendo en cuenta el orden. Esto multiplica por 8 el número de soluciones cuando x es distinto de y y ambos son no nulos, y por 4 en caso contrario. Así, el 13 presentaría ocho soluciones:

$13= 2^2+3^2 = (-2)^2+3^2 = 2^2+(-3)^2 = (-2)^2+(-3)^2 = 3^2 +2^2 =(-3)^2 +2^2 = 3^2 +(-2)^2 = (-3)^2 +(-2)^2$

Y el 16, cuatro: $16 = 4^2+0^2 = (-4)^2+0^2 =0^2 + 4^2 = 0^2 + (-4)^2$

Igualmente, 8 presentaría también 4: $8 = 2^2+2^2 = (-2)^2+2^2 =2^2 + (-2)^2 = (-2)^2 + (-2)^2$