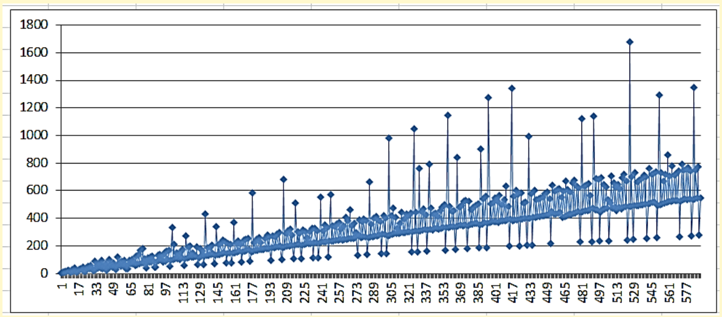
Sucesiones de números naturales



Edición 2026

Colección Hojamat.es

PRESENTACIÓN

El tema de sucesiones está muy presente en mis cálculos diarios y en mis publicaciones en el blog y web Hojamat.es. Por ello, era conveniente recopilarlos en un solo documento.

Como se advierte en todas las publicaciones de esta colección, el material presentado no contiene desarrollos sistemáticos, ni pretende ser un manual teórico. En cada tema se incluirán cuestiones curiosas o relacionadas con las hojas de cálculo, con la única pretensión de explicar algunos conceptos de forma amena.

En la actual edición se han añadido temas y efectuado un repaso general de los textos. También, en el título se ha añadido la aclaración de que se trata de sucesiones de números naturales, para evitar confusiones y falsas expectativas.

TABLA DE CONTENIDO

TEORÍA

ALGUNAS DEFINICIONES

Sucesión de números naturales

Es toda función definida de N (conjunto de los números naturales) en N. A los elementos orígenes de la función les llamaremos **índices**, y a las imágenes **elementos** de la sucesión.

En la práctica es una secuencia ordenada de números naturales del tipo 2, 4, 7, 11, 12, ...r epresentada por los símbolos a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n ... en la que $\mathbf{a_n}$ es el elemento y **n** el índice.

Sucesión o progresión aritmética

Es aquella en la que cada término es igual al anterior sumado con un número constante llamado *diferencia*. Su fórmula de recurrencia es: $\mathbf{a_1 = a;\ a_n = a_{n-1} + d,}$ donde **a** (valor inicial) y **d** (diferencia) son constantes.

La fórmula del término general es

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

La suma de n términos viene dada por la fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Sucesión o progresión geométrica

Es aquella sucesión en la que cada término es igual al anterior multiplicado por un número constante ***r*** llamado *razón*. El primer término se define aparte.

La fórmula del término general es

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma de los primeros términos:

$$a_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Sucesiones recurrentes

Una sucesión se llama *recurrente* cuando todos sus términos, salvo los primeros, que se definen directamente, dependen de los valores de los anteriores inmediatos. El número de esos términos de los que dependen se denomina el ***orden*** de la sucesión. La ecuación que relaciona estos términos se denomina también de recurrencia. Un ejemplo de segundo orden es el siguiente:

x_1=1, x_2=2, x_n=2*x_{n-1}+x_{n-1}*x_{n-2}

Si la relación entre un término y los anteriores se basa en una fórmula lineal, diremos que la recurrencia es también de tipo *lineal*. Añadiremos el calificativo de *homogénea* si en esa fórmula no existen términos constantes.

Esta sería lineal homogénea de tercer orden:

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_n=2*x_{n-1}+2*x_{n-2}-x_{n-3}$

Y esta, lineal no homogémea de segundo orden:

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_n=2*x_{n-1}+2*x_{n-2}+7$

Recurrencia lineal de primer orden

Es la del tipo $x_n=a*x_{n-1}+b$. Si $b=0$ es la que llamamos en la sección anterior *progresión geométrica*, y a ella nos remitimos. Si $a=1$ y $b\neq0$ será *aritmética*. Si ambos son no nulos, será *no homogénea*, pero veremos que es convertible en homogénea de segundo orden.

Recurrencia lineal de segundo orden

Llamaremos relación de recurrencia lineal de segundo orden a la que existe entre los términos de una sucesión si reviste esta forma:

$$x_n=a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + a_3$$

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro y sumado un tercer número. Nos dedicaremos tan sólo al caso en el que $a_3=0$, es decir, a *relaciones lineales de segundo orden homogéneas*, pues en ellas encontraremos bastantes hechos curiosos.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Una sucesión definida por recurrencia vendrá dada así por el conjunto de valores iniciales y el de coeficientes, siendo conveniente fijar también el número de términos.

SUCESIONES COMPLETAS

En esta entrada abordaré un tema interesante, y es el de la posibilidad de que los elementos de una sucesión de números naturales, finita o infinita, generen otros números, a partir de sumas, con o sin repetición.

Ya traté ese tema en algunas entradas antiguas, como

https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/02/frobenius-y-los-mcnuggets.html

“Frobenius y los mcnuggets”, en la que trataba el problema de las monedas necesarias para alcanzar una cantidad y el número de Frobenius.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2012/11/descomposicion-de-un-numero-segun-una.html

En esta entrada se trataba de generar un número a partir de una lista de ellos.

En ambos casos las sucesiones eran finitas, y al sumar los elementos se podían repetir los sumandos.

También se relacionaba algo con lo que pretendo presentar ahora, la entrada sobre algoritmos voraces o codiciosos:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/09/algoritmos-codiciosos-para-sumas.html

Sucesión completa

Desarrollaré aquí el tipo de sucesión más eficaz para generar todos los números naturales, el de sucesión completa.

Una sucesión de números naturales se llama **completa** cuando cualquier otro número natural se puede escribir como suma de elementos de esa sucesión sin repetir ninguno.

El ejemplo básico más popular es el de las potencias de 2, que da lugar al sistema binario de representación de los números. En efecto, la sucesión 1, 2, 4, 8, 16, … permite representar cualquier número como suma de algunos términos, sin repetición. La forma de conseguirlo es similar a la de los algoritmos codiciosos que traté en la entrada referenciada más arriba.

Vemos un ejemplo: representar el número 53:

Buscamos el término de la sucesión más cercano a 53 y menor que él, que es el 32, tomamos nota y restamos: 53-32=21. Reiteramos: 21-16=5, 5-4=1, con lo que obtenemos 53=32+16+4+1, que da lugar a la representación binaria 110101.

Este ejemplo nos abre camino para caracterizar las sucesiones completas. Podemos dar tres condiciones para que una sucesión sea de este tipo:

- El primer término ha de ser 1, $a_1=1$
- Aunque no es imprescindible, pero sí algo operativo, la sucesión debe presentar un orden creciente.
- Si llamamos s_n a la suma de los n primeros términos de la sucesión, se debe cumplir: $s_{n-1} \geq a_n-1$ para todo $n \geq 1$

La primera condición es imprescindible para poder generar todos los números y que los algoritmos tengan parada. Por ejemplo, los números pares no son completos, pues nunca pueden generar un impar.

La segunda se incluye para que tengan sentido los algoritmos.

La tercera es fundamental, porque garantiza que se pueda avanzar en descubrir sumandos hasta llegar, si es necesario al 1.

Seguimos el proceso del 53 visto más arriba. Dado el número N, deberemos encontrar el mayor elemento de la sucesión que sea menor que N, en el ejemplo 32. La diferencia 21 se ha de poder tratar del mismo modo, con lo que s_{n-1} ha de ser suficiente para ello, es decir, $s_n \geq a_n-1$. Piénsese en el caso 63, en el que 63-32=31, y debe poder ser generado por los elementos anteriores, es decir por s_{n-1}, y de ahí la condición $s_n \geq a_n-1$.

Si no se cumple esta condición, la sucesión no es completa. Por ejemplo, la sucesión de potencias de cuatro, 1, 4, 16, 64, …no la cumple, y, por ejemplo, no puede generar el número 70, porque 70-64=6, y 6 no se puede formar con 1 y 4. Aquí la suma 1+4+16 no es suficiente.

La sucesión de potencias de 2 la cumple, porque $s_n=2^n-1$, y da lugar a la representación binaria. Esto se logra porque no se admiten repeticiones en los sumandos. También es minimal, pues si eliminamos un término de ella, habrá números naturales que no se puedan representar. Por ejemplo, si elimino el 4, no podré representar el 6. Otra característica es que la representación es única, algo que no se contempla en las definiciones.

Existe una condición suficiente que puede sustituir a la tercera, y es que **$2a_k \geq a_{k+1}$ para $k \geq 1$**. El ejemplo de las potencias de 2 la cumple, pero falta ver su suficiencia. Lo razonamos con el ejemplo del N=53. La primera operación fue buscar el término menor que 53 más cercano a él, y fue el 32. Restamos y nos resultó 21 para proseguir. Lo vemos en general:

N estará entre a_k y a_{k+1}, pero a_{k+1} estará entre a_k y $2a_k$, luego tendremos: $a_k \leq N \leq a_{k+1} \leq 2a_k$. Restando a_k se verificará:

$0 \leq N - a_k \leq a_k$

Por tanto, la siguiente diferencia (en el ejemplo, el 21) será menor que a_k, y se podrá seguir el algoritmo con un término menor, hasta llegar a 1.

Ejemplo reciente

En una entrada anterior vimos la sucesión “catering perezoso”, formada por los términos de fórmula

$$c(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Sus primeros términos son 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92, 106, 121, 137, 154, 172, 191, 211, 232, 254, 277, 301, 326, 352, 379, …https://oeis.org/A000124

Es evidente que cumple **$2a_k \geq a_{k+1}$.**

$2a_k - a_{k+1} = 2(k(k+1)/2+1)-(k+1)(k+2)/2-1 = (k+1)(k-(k+2)/2)+1 =(k+1)(k/2-1)+1$, y esta diferencia es positiva o cero para k>1

Podemos afirmar que esta sucesión es completa, como se afirma en la página en la que está publicada. Según esto, cualquier número natural es suma de algunos de sus términos tomados sin repetición. He efectuado sencillas comprobaciones con mi hoja de cálculo ***partlista***

(Ver https://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#reprenum)

He elegido el número 62 al azar, y deseo generarlo con los términos de esta sucesión 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37. He concretado en la hoja que no se repitan sumandos, y me ha devuelto estos resultados:

11+ 22+ 29
4+ 7+ 22+ 29
2+ 7+ 16+ 37
2+ 4+ 11+ 16+ 29
2+ 4+ 7+ 11+ 16+ 22
1+ 2+ 22+ 37
1+ 2+ 4+ 7+ 11+ 37

No es de extrañar que resulten siete soluciones, porque en estos procesos no tiene que existir solución única.

Sucesión de Fibonacci

Esta sucesión es claramente completa. Basta recordar que es creciente y en ella $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, luego $a_{k+1} < a_k + a_k = 2a_k$, que es condición suficiente para la completitud.

Existe una descomposición basada en esta propiedad, y es la de Zeckendorf, que consiste en ir restando a un número N el mayor número de Fibonacci posible. Es interesante, y acudo a ella con frecuencia. Puedes profundizar en el tema leyendo mi entrada https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/09/representacion-de-zeckendorf.html y descubrir en qué consiste la multiplicación de Fibonacci.

Por ejemplo, esta es la representación de Zeckendorf del número 75:

75 = F(10)+F(7)+F(5)+F(3) = 55+13+5+2

No es el único desarrollo. Con nuestra herramienta Cartesius (https://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius) se puede conseguir otro. Estas son las condiciones:

xrango=5
xt=1..55
xt=filtro(fibonacci)

suma=75

creciente

no repite

Y este el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
2	5	13	55		
2	5	13	21	34	

Nos devuelve el ya conocido, 2+5+13+55, que es el desarrollo minimal, pero nos ofrece otro: 75=34+21+13+5+2

Números primos con la unidad

Si a la sucesión de números primos le adjunto a(1) = 1, resulta una sucesión completa. Es creciente, comienza en 1 y cumple que 2p(k) ≥ p(k+1). Esta afirmación se basa en el Postulado de Bertrand, que afirma, entre otras formulaciones, esta desigualdad. Por ejemplo, con la hoja *partlista*, podemos generar el número 35 con esta sucesión, y resulta:

Soluciones	18
7+ 11+ 17	
5+ 13+ 17	
5+ 11+ 19	
5+ 7+ 23	
3+ 13+ 19	
2+ 5+ 11+ 17	
2+ 3+ 13+ 17	
2+ 3+ 11+ 19	
2+ 3+ 7+ 23	
1+ 11+ 23	
1+ 5+ 29	
1+ 3+ 31	
1+ 3+ 7+ 11+ 13	
1+ 3+ 5+ 7+ 19	
1+ 2+ 13+ 19	
1+ 2+ 3+ 29	
1+ 2+ 3+ 5+ 11+ 13	
1+ 2+ 3+ 5+ 7+ 17	

Es evidente que esta descomposición da lugar a muchas soluciones distintas.

Se pueden encontrar más ejemplos de sucesiones completas, pero con estos se comprende bien el concepto. Otros que he encontrado son demasiado particulares y no son muy interesantes.

SUCESIONES RECURRENTES

INTRODUCCIÓN

Una sucesión se llama *recurrente* cuando todos sus términos, salvo los primeros, que se definen directamente, dependen de los valores de los anteriores inmediatos. El número de esos términos de los que dependen se denomina el ***orden*** de la sucesión. La ecuación que relaciona estos términos se denomina también de recurrencia. Un ejemplo de segundo orden es el siguiente:

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_n=2*x_{n-1}+x_{n-1}*x_{n-2}$

Si la relación entre un término y los anteriores se basa en una fórmula lineal, diremos que la recurrencia es también de tipo *lineal*. Añadiremos el calificativo de *homogénea* si en esa fórmula no existen términos constantes.

Esta sería lineal homogénea de tercer orden:

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_n=2*x_{n-1}+2*x_{n-2}-x_{n-3}$

Y esta, lineal no homogémea de segundo orden:

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_n=2*x_{n-1}+2*x_{n-2}+7$

Recurrencia lineal de primer orden

Es la del tipo $x_n=a*x_{n-1}+b$. Si b=0 es la que llamamos en la sección anterior *progresión geométrica*, y a ella nos remitimos. Si a=1 y $b\neq 0$ será *aritmética*. Si ambos son no nulos, será *no homogénea*, pero veremos que es convertible en homogénea de segundo orden.

Recurrencia lineal de segundo orden

Llamaremos relación de recurrencia lineal de segundo orden a la que existe entre los términos de una sucesión si reviste esta forma:

$$x_n=a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + a_3$$

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro y sumado un tercer número. Nos dedicaremos tan sólo al caso en el que $a_3=0$, es decir, a *relaciones lineales de segundo orden homogéneas*, pues en ellas encontraremos bastantes hechos curiosos.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Una sucesión definida por recurrencia vendrá dada así por el conjunto de valores iniciales y el de coeficientes, siendo conveniente fijar también el número de términos.

Tal como se anunció anteriormente, las recurrencias no homogéneas de primer grado se pueden convertir en este tipo:

Tomamos dos términos consecutivos $x_n=a*x_{n-1}+b$, $x_{n-1}=a*x_{n-2}+b$. Restamos miembro a miembro: $x_n - x_{n-1}= a(x_{n-1} - x_{n-2})$, y de ahí:

$x_n = (a+1)x_{n-1} - ax_{n-2}$

Suma de una sucesión recurrente

Las sucesiones recurrentes de orden h se pueden sumar mediante la siguiente fórmula, también recurrente,que procede de la publicación *Sucesiones recurrentes* de A.I.Markushevich – Editorial Mir. La demostración de ella no es difícil, pero resulta larga para esta publicación:

$s_{n+h+1}=(1+a_1)s_{n+h}+(a_2-a_1)\ s_{n+h-1}+\ \dots\ +(a_h-a_{h-1})\ s_{n+1}-a_hs_n$

Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci $a_1=1$ y $a_2=1$, luego la fórmula se aplicará así $s_{n+3}=(1+a_1)s_{n+2}+(a_2-a_1)s_{n+1}-a_2s_n$, es decir:

$s_{n+3}=2s_{n+2}-s_n$

Se puede comprobar fácilmente:

54=2*33-12=66-12=54, 88=54*2-20=108-20=88

Ecuación característica

Existe un procedimiento simple para intentar expresar **X(n)** en función de **n** en sucesiones definidas por recurrencias de segundo orden: *la ecuación característica*. Puedes estudiarla en cualquier manual o página web específica, como

(http://people.uncw.edu/tompkinsj/133/recursion/homogeneous.htm)

En esencia este método consiste en:

(1) Dada la relación

$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

planteamos la ecuación de segundo grado

$x^2-a_1x-a_2=0$

(2) Si las soluciones de esa ecuación son distintas, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, la expresión buscada será

$x(n)= (x_1)^n$ o $x(n)= (x_2)^n$

o bien una combinación lineal de ambas:

$x(n)= C_1(x_1)^n+C_2(x_2)^n$

A veces uno de los sumandos tiende a cero al crecer n, y esto da lugar a propiedades interesantes, ya que X(n) sólo dependería aproximadamente del primer sumando.

Función generatriz

Es una función tal que al desarrollarla como polinomio, los coeficientes del mismo reproducen los términos de la sucesión. Veremos varias en los siguientes ejemplos.

RECURRENCIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

En este blog no hemos tratado mucho las relaciones de recurrencia. Iniciamos ahora el estudio de un caso particular de las mismas, más por los casos curiosos que presenta que por su estudio teórico, que se puede desarrollar en otras publicaciones

(http://mathworld.wolfram.com/LinearRecurrenceEquation.html)

Llamaremos relación de recurrencia lineal de segundo orden a la que existe entre los términos de una sucesión si reviste esta forma:

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+a_3$$

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro y sumado un tercer número.

Como hemos indicado que nuestras pretensiones no son teóricas, nos dedicaremos tan sólo al caso en el que $a_3=0$, es decir, a *relaciones lineales de segundo orden homogéneas*, pues en ellas encontraremos bastantes hechos curiosos.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Una sucesión definida por recurrencia vendrá dada así por el conjunto de valores iniciales y el de coeficientes, siendo conveniente fijar también el número de términos. Así se concreta, por ejemplo, en Mathematica, la función **LinearRecurrence**, y así lo trataremos más adelante.

Estas sucesiones reciben el nombre de "sucesiones de Horadam" y se caracterizan por estar determinadas por esos cuatro parámetros dentro de una recurrencia de segundo orden homogénea. Así, la sucesión de Fibonacci es Horadam(0,1,1,1), porque los parámetros se escriben en orden inverso a como lo hacemos aquí. Sólo estudiaremos algunos casos, pues el tema es muy amplio y con muchas sucesiones interesantes.

Generación con hoja de cálculo

Aprovechando la recursividad del Basic de las hojas de cálculo se pueden definir funciones que devuelvan el valor de x(n). El problema que tienen es que funcionan mientras no se llene la pila de datos

(ver

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/03/funciones-recursivas-en-las-hojas-de.html).

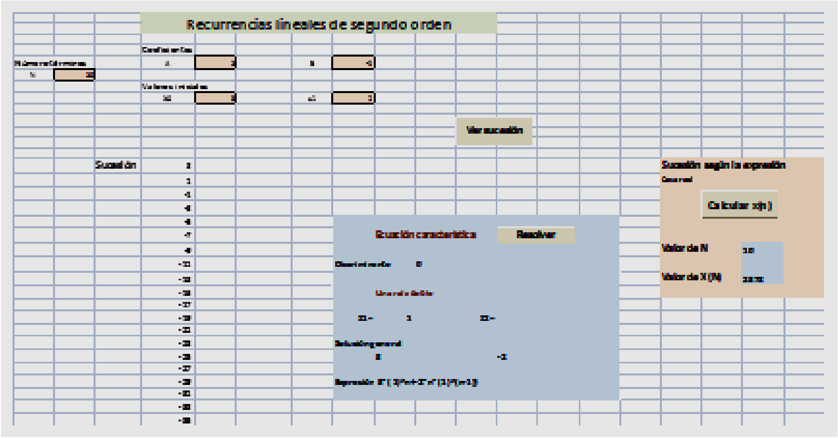
En este caso podrían tener esta estructura:

Public Function recurre(c1, c2, d1, d2, n)
Dim r
If n = 0 Then
r = d1
ElseIf n = 1 Then
r = d2
Else
r = c1 * recurre(c1, c2, d1, d2, n - 1) + c2 * recurre(c1, c2, d1, d2, n - 2)
End If
recurre = r
End Function

La tienes implementada en la hoja ***recurre_lineal***, que ofrecemos en

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Para evitar el problema del llenado de la pila de recursividad, hemos preparado un generador muy simple de estas sucesiones, en la hoja mencionada, con el que practicaremos algunos conceptos y que no usa la recursividad para evitar ese problema:



Basta estudiar la imagen para entender que hay que escribir el número de términos, los coeficientes, aquí llamados A y B y los valores iniciales. Para fijar ideas, generaremos los números de Pell, dados por la ecuación $\mathbf{x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}}$ con las condiciones iniciales $\mathbf{x_0=0}$ y $\mathbf{x_1=1}$. Todos ellos se pueden identificar en la imagen:

			Coeficientes				
Número términos			A	2		B	1
N	20						
			Valores iniciales				
			X0	0		x1	1

Con el botón ***Ver sucesión*** generamos los 20 primeros términos, que están ya publicados en http://oeis.org/A000129 y se nos indica que son los denominadores del desarrollo de los convergentes a raíz de 2 mediante fracciones continuas.

Sucesión	0
	1
	2
	5
	12
	29
	70
	169
	408
	985
	2378
	5741
	13860

Tenemos así una herramienta muy simple para inventarnos sucesiones, independientemente de su importancia matemática. Por ejemplo, llamaremos sucesión "sorpresa" a la engend

rada mediante A=2, B=-1, X_0=0, X_1=1. Te dejamos que averigües su desarrollo y en qué consiste la sorpresa.

Ecuación característica

Existe un procedimiento simple para intentar expresar **X(n)** en función de **n** en sucesiones definidas por recurrencias de segundo orden: *la ecuación característica*. Puedes estudiarla en cualquier manual o página web específica, como

(http://people.uncw.edu/tompkinsj/133/recursion/homogeneous.htm)

En esencia este método consiste en:

(1) Dada la relación

$\mathbf{x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}}$

planteamos la ecuación de segundo grado

$\mathbf{x^2-a_1x-a_2=0}$

(2) Si las soluciones de esa ecuación son distintas, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, la expresión buscada será

$\mathbf{x(n)= (x_1)^n}$ o $\mathbf{x(n)= (x_2)^n}$

o bien una combinación lineal de ambas:

$\mathbf{x(n)= C_1(x_1)^n+C_2(x_2)^n}$

Las soluciones pueden ser reales o complejas.

(3) Si las soluciones de esa ecuación son dobles e iguales a $\mathbf{x_1}$ la expresión buscada será

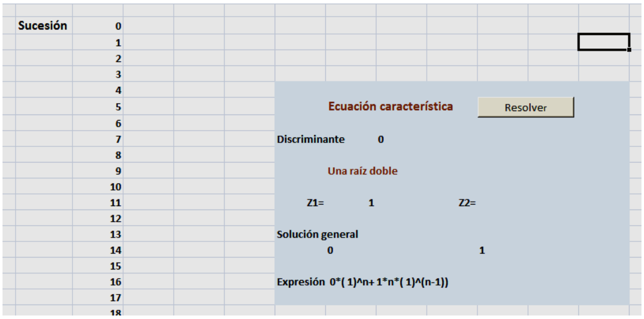
$\mathbf{x(n)= (x_1)^n}$ o $\mathbf{x(n)= n(x_1)^{n-1}}$

o bien una combinación lineal de ambas:

$\mathbf{x(n)= C_1(x_1)^n+C_2n(x_1)^{n-1}}$

(4) En ambos casos, los coeficientes C_1 y C_2 se calcularán a partir de los valores iniciales.

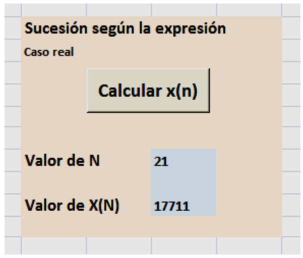
La herramienta que ofrecemos plantea y resuelve la ecuación característica de la sucesión que definamos. En el desarrollo de la fórmula general de x(n) no se ha desarrollado el caso de raíces complejas, ya que no compensaba el trabajo en una programación complicada, dado que nuestras pretensiones son meramente divulgativas.



Se comienza calculando el discriminante para ver si es el caso de raíz doble o no. Después se encuentran las soluciones de la ecuación característica y en el caso real se escribe la expresión general de x(n). En la imagen se observa la solución para la sucesión que llamamos “sorpresa”, que resulta representar la sucesión de números naturales. Si simplificas la expresión de abajo resulta ser **x(n)=n**.

Valores según la expresión general

Por último, en el caso de raíces reales, se ofrece una calculadora de los valores de x(n) dado el valor de n. En la imagen puedes ver el cálculo del término 21 de la sucesión de Fibonacci, que resulta tener el valor de 17711.



Hasta aquí las definiciones y la presentación de la herramienta implementada en hoja de cálculo. Recordaremos ahora cómo es su función generatriz antes de pasar al estudio de sucesiones particulares.

Función generatriz

No es difícil encontrar la función generatriz en este caso (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/03/funciones-generatrices-en-combinatoria.html) y http://eliatron.blogspot.com.es/2009/01/sucesiones-recurrentes-funciones.html).

Siguiendo el procedimiento explicado en el blog del segundo enlace, bastará aplicar lo siguiente:

Si representamos la sucesión por x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, …, su F.G. se construirá tomándolos como coeficientes de un polinomio:

$F(x)=x_0+x_1x+x_2x^2+x_3x^3+x_4x^4+\dots$

$-a_1xF(x)= -a_1x_0x-a_1x_1x^2-a_1x_2x^3-a_1x_3x^4-a_1x_4x^5+\dots$

$-a_2x^2F(x)= -a_2x_0\,x^2-a_2x_1x^3-a_2x_2x^4-a_2x_3x^5-a_2x_4x^6+\dots$

Sumando miembro a miembro

$F(x) - a_1xF(x) - a_2x^2F(x) = x_0+(x_1-a_1x_0)x+(x_2-a_1x_1-a_2x_0)x^2+(x_3-a_1x_2-a_2x_1)x^3+(x_4-a_1x_3-a_2x_2)x^4+\ldots = x_0+(x_1-a_1x_0)x$

Todos los paréntesis son nulos por la definición de la congruencia. Despejando F(x) tendremos:

$$F(x) = \frac{x_0 + (x_{1-}a_1x_0)x}{1 - a_1x - a_2x^2}$$

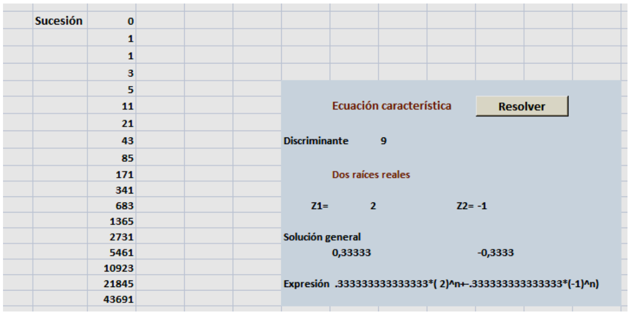
Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, si la hacemos comenzar por 0, tendríamos $x_0=0$, $x_1=1$, $a_1=1$, $a_2=1$ y nos daría

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Usaremos esta expresión en las siguientes sucesiones que estudiemos. Hasta aquí la primera aproximación al tema.

SUCESIÓN DE JACOBSTHAL

Probemos con algunos valores de los coeficientes y valores iniciales. Imagina que hacemos A=1, B=2, $X_0=0$, $X_1=1$ (Horadam(0,1,2,1). Acudimos a nuestra herramienta en hoja de cálculo ya presentada y obtenemos:



Esta sucesión, llamada de Jacobsthal, la tienes en http://oeis.org/A001045

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, …

Si visitas la página indicada te abrumará la cantidad de propiedades e interpretaciones que presenta esta sucesión.

Con la resolución de la ecuación característica, e interpretándola correctamente, obtendrás la expresión del término general

$$X(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

0	
1	1
1	1
3	11
5	101
11	1011
21	10101
43	101011
85	1010101
171	10101011
341	101010101
683	1010101011
1365	10101010101
2731	101010101011
5461	1010101010101
10923	10101010101011

Por ejemplo, el término décimo será (2^10-1)/3=1023/3=341, como puedes observar en la tabla. A partir de esta expresión es fácil entender que el cociente X(n+1)/X(n) tiende a 2 al crecer n.

En binario puedes representarte mejor esta relación. El numerador tendrá la expresión 10000….001 para n par y 111…111 para n impar (sería un repunit). Al dividir entre 3, las expresiones que resultan para los términos de la sucesión estarán formadas por unos alternados con ceros, salvo si acaso el primero. Por tanto, todos equivaldrán a sumas de potencias alternas de 2 terminando al final en 1. Por ejemplo, $85=2^6+2^4+2^2+1$.

Puedes sumar mentalmente en binario dos términos consecutivos y observarás que te van saliendo ceros hasta llegar a un último 1 a la izquierda. Más claro:

La suma de dos términos consecutivos X(n)+X(n+1) equivale a 2^n

Basta estudiar un poco esta expresión para darnos cuenta de que cada término se aproxima al doble del anterior, una vez por la izquierda y la siguiente por la derecha, acercándose al límite del doble exacto. Lo puedes comprobar en esta tabla de cocientes:

0	
1	
1	1
3	3
5	1,66667
11	2,2
21	1,90909
43	2,04762
85	1,97674
171	2,01176
341	1,99415
683	2,00293
1365	1,99854
2731	2,00073
5461	1,99963
10923	2,00018
21845	1,99991
43691	2,00005
87381	1,99998
174763	2,00001
349525	1,99999
699051	2

Podemos concretar más:

Cada término se diferencia en una unidad con el doble del anterior. Concretamente, $X(n+1)=2X(n)+(-1)^n$

En efecto:

X(n+1)-2X(n)= (2^(n+1)-(-1)^(n+1))/3 - (2^(n+1)-2*(-1)^n)/3 = (2*(-1)^n-(-1)^(n+1))/3 =(2*(-1)^n+(-1)^n)/3 = (-1)^n, luego la diferencia es 1 en valor absoluto.

Esta es otra forma de demostrar que el cociente X(n+1)/X(n) tiende a 2 al crecer n.

Algunas propiedades

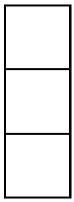
-El que la diferencia entre 3X(n) y 2^n sea sólo la unidad, nos vale para descomponer una fila del triángulo de Pascal en tres sumandos, dos de ellos X(n) y el otro una unidad mayor o menor. Por ejemplo, la fila 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 se puede descomponer usando x(7)=43:

1+7+21+35+35+21+7+1=(1+7+35)+(35+7+1)+(21+21)= 43+43+42

- El producto de dos términos consecutivos es un número triangular:

Si $X(n+1)=2X(n)+(-1)^n$, el producto X(n)*X(n+1) = 2X(n)*(2X(n)+(-1)^n)/2 tendrá la forma de la mitad del producto de dos números consecutivos, que es la definición de un número triangular.

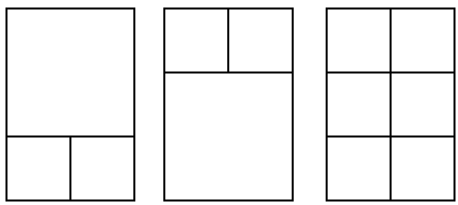
Quizás lo entiendas mejor con un ejemplo: 43691*87381 es un producto de ese tipo y lo podemos escribir como 87381*87382/2



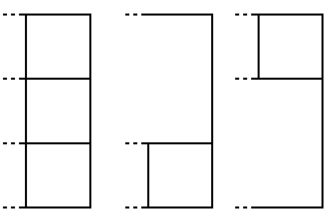
- El término $X(n)$ con $n>1$ equivale al número de teselaciones de un rectángulo de 3 por $n-1$ con baldosas de 1 por 1 y 2 por 2.

Lo podemos demostrar por inducción. Para $n=2$ $X(2)=1$ y coincide con la única forma de teselar así un rectángulo de 3 por 1, ya que sólo se podrían emplear teselas 1 por 1 y no hay otra posibilidad.

Para $n=3$, $X(3)=3$, que cuenta las posibles teselaciones de un rectángulo de 2 por 3. Efectivamente, serían 3 las posibilidades con baldosas de 1 por 1 y de 2 por 2:



Procedamos a la inducción. Imaginemos que $X(n-1)$ representa las teselaciones de este tipo en un rectángulo de 3 por $n-2$. Al añadirle una columna más al rectángulo sólo hay tres posibilidades:



En la primera los tres cuadrados no pueden completar una baldosa de 2 por 2, luego no añaden ni quitan posibilidades, es decir, que el número de teselaciones de este tipo coincidirá con $X(n-1)$.

En las otras dos posiciones es obligado completar a 2 por 2, y de una forma única, luego el número total será

X(n-2). Como hay dos posiciones, el número total será X(n)=X(n-1)+2X(n-2), que es precisamente l definición de la sucesión. La propiedad es cierta.

n	X(n)	S(n)
0	0	0
1	1	1
2	1	2
3	3	5
4	5	10
5	11	21
6	21	42
7	43	85
8	85	170
9	171	341
10	341	682
11	683	1365
12	1365	2730
13	2731	5461
14	5461	10922

Dejamos como ejercicio demostrar una variante: X(n) es el número de teselaciones del rectángulo de 2 por n-1 mediante fichas de dominó de 1 por 2 y cuadrados de 2 por 2.

- Suma de la sucesión: La suma de los n primeros términos de la sucesión equivale al valor de X(n+1) si n es par y a X(n+1)-1 si es impar, es decir S(n)=X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$.

Observando la tabla se comprueba esta propiedad para los primeros términos:

Sólo nos quedaría completar la inducción:

Si S(n)=X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$, al sumarle un nuevo término X(n+1) nos daría S(n+1)=2*X(n+1)+(-1)$^{n \bmod 2}$= X(n+2)+(-1)$^{n+1 \bmod 2}$.

Omitimos los detalles del encaje exacto de la paridad de n en la demostración.

- La función generatriz de esta sucesión es x/(1-x-2*x^2), como puedes comprobar con este desarrollo en PARI

write("sucesion.txt",taylor(x/(1-x-2*x^2),x,20))

x + x^2 + 3*x^3 + 5*x^4 + 11*x^5 + 21*x^6 + 43*x^7 + 85*x^8 + 171*x^9 + 341*x^10 + 683*x^11 + 1365*x^12 + 2731*x^13 + 5461*x^14 + 10923*x^15 + 21845*x^16 + 43691*x^17 + 87381*x^18 + 174763*x^19 + O(x^20)

Según la teoría explicada anteriormente, basta aplicar la fórmula general:

$$F(x)=\frac{x_0+(x_1-a_1x_0)x}{1-a_1x-a_2x^2}=\frac{0+(1-0)x}{1-1x-2x^2}=\frac{x}{1-x-2x^2}$$

Y sigue sorprendiéndonos

0			
1			
1			
3	2	6	1
5	4	12	1
11	8	24	3
21	16	48	5
43	32	96	11
85	64	192	21
171	128	384	43
341	256	768	85
683	512	1536	171
1365	1024	3072	341
2731	2048	6144	683
5461	4096	12288	1365
10923			
21845			

La imagen que adjuntamos contiene una propiedad nueva de esta sucesión: Hemos tomado el término 3 y en la tercera columna lo hemos ido multiplicando por las distintas potencias de 2, con lo que obtenemos la suma de un término más avanzado con el correspondiente a la potencia. Se ha destacado que 3*2^3=24=21+3=X(7)+X(4).

Sigue bajando por la tabla y descubrirás nuevas sumas de este tipo. Ahora, haz lo mismo con el 5 o con el 11 y resultarán relaciones nuevas. Todas ellas se resumen en esta:

X(n)+X(n+2k+1)=X(2k+2)*2^(n-1)

(Se supone que al primer término lo consideramos X(1) y no X(0))

Por ejemplo, en la de la figura: X(4)+X(7) = X(4)*2^3 = 3+21=24.

Otra: X(5)+X(10) = X(6)*2^4=5+171=176=11*16

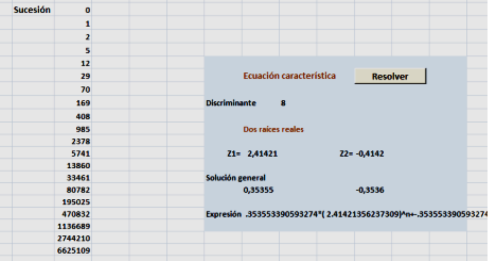
Esta propiedad, expresada con otros índices, ha sido propuesta por Paul Curtz en http://oeis.org/A001045

NÚMEROS DE PELL

Estos curiosos números los estudiaremos desde dos planteamientos distintos. En este primer apartado los deduciremos desde una recurrencia, y, en el siguiente, como coeficientes de fracciones continuas. Podríamos haber unificado ambos textos para evitar repeticiones, pero ha parecido más útil conservar ambos en su integridad.

Estudio como una recurrencia

Tomamos como coeficientes de recurrencia A=2 y B=1. Es decir, que X(n+1)=2X(n)+X(n-1). Si como valores iniciales tomamos 0 y 1 resultan **los números de Pell** o números lambda (Horadam(0,1,1,2).



http://oeis.org/A000129

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, …Los representaremos como P(n)

Como su nombre indica, contiene soluciones de la ecuación de Pell $\mathbf{x^2-2y^2=1}$. En concreto, los valores P(2n+1), es decir 0, 2, 12, 70, 408, 2378,… corresponden con los valores de Y en la solución. Con nuestras hojas de cálculo ***pell.xls*** y ***pell.ods***

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#ecuadio)

lo puedes comprobar, como se refleja en la imagen:

X	Y	
3	2	+1 ó -1
17	12	1
99	70	1
577	408	1
3363	2378	1
19601	13860	1
114243	80782	1
665857	470832	1
3880899	2744210	1
22619537	15994428	1

Si tomáramos como valores iniciales $X_1=1$ y $X_2=1$, resultaría una sucesión complementaria:

1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363, 8119, 19601, 47321, 114243, 275807,…

Observa que aquí los términos de índice impar se corresponden con los valores de X en la solución de la ecuación: 1, 3, 17, 99, 577,…La llamaremos sucesión Pell2 y la representaremos como P’(n)

Así que ya sabes por qué se eligió el nombre de “números de Pell”. Ambas sucesiones también contienen las soluciones de $\mathbf{x^2-2y^2=-1}$.

X	Y	
1	1	+1 ó -1
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1
1393	985	-1
3363	2378	1
8119	5741	-1
19601	13860	1
47321	33461	-1
114243	80782	1
275807	195025	-1

En la imagen queda claro que los términos de índice 2n en ambas sucesiones son soluciones con -1 en el segundo miembro. Según eso, los números de PELL recogen todos los casos en los que 2k^2±1 es un cuadrado, porque es como despejar la X en la ecuación de Pell.

Te dejamos que saques tus consecuencias, o busques otras correspondencias en http://oeis.org/A000129 y en http://oeis.org/A001333. Una muy interesante es que

P(n+1)=P(n)+P'(n)

En efecto, se cumple para los primeros valores (ver tabla anterior) 3+2=5, 7+5=12, 17+12=29,…luego bastará comprobarlo por inducción.

P(n+2)=2P(n+1)+P(n)=2(P(n)+P'(n))+P(n-1)+P'(n-1)=P(n+1)+P'(n+1)

Intenta justificar esta otra: **P(n+1)=P'(n+1)-P(n)** Los primeros cálculos en la tabla serían: 3-1=2, 7-2=5,17-5=12,…

De ellas dos resultaría una tercera:

2P(n+1)=P'(n+1)+P'(n)

Ambas sucesiones también intervienen en las fracciones continuas del desarrollo de la raíz de 2. Todo esto ocurre porque en ambos casos la generación de numeradores y denominadores **siguen la misma ley de recurrencia**. Lo vemos en nuestras herramientas ***fraccont.xls*** y ***fraccont.ods***

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#algoritmo)

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
1,00000000	1,50000000	1,40000000	1,41666667	1,41379310	1,41428571	1,41420118	1,41421569	1,41421320	1,41421362

Fórmula general

Acudimos al estudio de la ecuación característica, que vemos presenta dos soluciones reales: 2,4142 (uno más la raíz de 2) y –0,4142 (uno menos la raíz de 2) e interpretando los coeficientes de abajo resulta:

$$P(n)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}\right)$$

Comprueba: Para n=0 resulta P(0)=0, para n=1, P(1)=1, y además P(2)=2, P(3)=5,…

Al tener la segunda potencia una base menor que la unidad en valor absoluto, si n tiende a infinito, ese sumando tiende a cero, con lo que es fácil ver que

$$\frac{P(n+1)}{P(n)}\to 1+\sqrt{2}$$

Puedes crear una columna de cocientes en hoja de cálculo para comprobarlo.

1	
2	2
5	2,5
12	2,4
29	2,41666667
70	2,4137931
169	2,41428571
408	2,41420118
985	2,41421569
2378	2,4142132
5741	2,41421362
13860	2,41421355
33461	2,41421356
80782	2,41421356
195025	2,41421356
470832	2,41421356
1136689	2,41421356
2744210	2,41421356
6625109	2,41421356

Para la sucesión complementaria Pell2 la fórmula que resulta es

$$P'(n)=\frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}\right)$$

Para n=0 te resulta 1, para n=1, P'(1)=1, para x=2, P'(2)=3, y así con todos.

Con la primera fórmula para X(n) se puede demostrar esta identidad:

$P(n+1)P(n-1)-P(n)^2=(-1)^n$

Aquí tienes la comprobación con hoja de cálculo:

X(n)	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
X(n+1)X(n-1)		0	5	24	145	840	4901	28560	166465	970224	5654885	
X(n)^2		1	4	25	144	841	4900	28561	166464	970225	5654884	
Diferencia		-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	

Función generatriz

Con el procedimiento general explicado en la primera parte del tema deduciremos que

$$P(x)=\frac{x_0+(x_1-a_1x_0)x}{1-a_1x-a_2x^2}=\frac{0+(1-0)x}{1-2x-x^2}=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

Una curiosa propiedad

La cifra de las unidades de los distintos términos de la sucesión de Pell recorre el conjunto ordenado {0, 1, 2, 5, 2, 9, 0, 9, 8, 5, 8, 1} Lo puedes comprobar con los primeros: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461,…Para asegurarse de que es un fenómeno periódico, en el que se repiten resultados en el mismo orden basta saber que el valor de cada uno sólo depende de los dos anteriores, por tratarse de las unidades (si fueran decenas por ejemplo, se verían alteradas por los arrastres).

Si x(n) termina en una cifra K y x(n+1) en otra H, x(n+2) deberá terminar necesariamente en (2*K+H) MOD 10. Así 169 y 408 deberán producir una cifra de unidades (8*2+9) MOD 10, es decir, el 5, y en efecto, el siguiente término es 985. Como juegos del tipo {K,H} sólo pueden aparecer 100 distintos, se llegará a un término en el que se repita el mismo juego de cifras, luego:

La cifra de las unidades de cualquier sucesión definida por recurrencia de segundo orden debe repetirse en los términos sucesivos (salvo quizás los iniciales) con un periodo igual o menor que 100.

En la sucesión de Pell el periodo es 12, como hemos visto. En la de Jacobsthal

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html) es de sólo 4: {1, 1, 3, 5} Compruébalo: 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691,…Con cálculos 1+1*2=3; 3+1*2=5; 5+2*3=11 (cifra 1)…

A veces el periodo es muy amplio. Lo intentamos con la sucesión de Fibonacci y se sobrepasaba la capacidad de la hoja de cálculo, por lo que acudimos a nuestra STCALCU

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#stcalcu)

descubriendo que el periodo es de 60 elementos nada menos:

{1, 1, 2, 3. 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0. 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0}

(ver http://oeis.org/A003893)

Aplicaciones y propiedades

¿Cuándo un número es triangular y cuadrado a la vez?

Lo planteamos:

k^2=h(h+1)/2 y transformando

8k^2+1=4h^2+4h+1=(2h+1)^2

Si llamo x=2h+1 e y=2k nos queda 2y^2+1=x^2 y por fin x^2-2y^2=1, ecuación de Pell que nos da la solución mediante los números de Pell. Después aplicaremos k=y/2 y h=(x-1)/2

Según estas equivalencias, k será igual a la mitad de los números de Pell de orden impar y su cuadrado el triangular buscado. Calculamos y obtenemos así la lista de los números que son triangulares y cuadrados a la vez:

0		0
1		
2		1
5		
12		36
29		
70		1225
169		
408		41616
985		
2378		1413721
5741		
13860		48024900
33461		
80782		1631432881

Nos han resultado 0, 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, …(http://oeis.org/A001110)

Una interpretación

P(n) equivale al número de formas en las que se puede descomponer n-1 en sumandos ordenados 1 y 2, pudiendo tener el 1 dos colores diferentes.

Por ejemplo, P(4)=12, porque el 3 se puede descomponer así:

2+1, 2+1, 1+2, 1+2, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1, 1+1+1

Primos de Pell

Para que un número de Pell P(n) sea primo es necesario que n sea primo. Los valores de n que producen esos primos son 2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53, 59, 89, 97, 101, 1, … que producen los números de Pell primos

2, 5, 29, 5741, 33461, 44560482149, 1746860020068409, …

Los compuestos no pueden producir primos, porque en la expresión

$$P(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

puede descomponer entonces el exponente n, lo que produce la descomposición de la expresión en al menos dos factores, uno de los cuales será una diferencia de potencias similares con exponente mayor que 1, que absorberá el denominador. Desarróllalo con cuidado y lo comprobarás.

A partir de funciones continuas

Se llaman así a los denominadores del desarrollo en fracciones continuas de la raíz cuadrada de 2. Como este algoritmo no suele ser muy conocido, remitimos a nuestras entradas referidas a él. Como fueron varias, es preferible que consultes el resumen *Números y hoja de cálculo II* en su capítulo "Las olvidadas fracciones continuas". Lo puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/publicaciones/hojanum2.pdf

En esa publicación podrás repasar lo más importante de estas fracciones, que sirven para aproximar tanto los números racionales como los irracionales. En este último caso, si son cuadráticos, los coeficientes de dichas fracciones son periódicos, detalle muy importante, porque nos permite realizar iteraciones. Vemos todo esto a continuación:

Raíz de 2 en forma de fracción continua

Copiamos a continuación la introducción al capítulo que hemos enlazado:

Llamamos fracción continua a la expresada de esta forma:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$$

donde ***a*** *es entero y* ***b, c****…son enteros positivos llamados* ***cocientes****. Toda fracción ordinaria se puede expresar de esta forma, y todo número irracional admite aproximaciones mediante desarrollos de este tipo. Las fracciones continuas se usan cuando se desea manejar una representación de los números reales independiente del sistema de numeración (salvo en la expresión de los cocientes).*

Como hemos indicado más arriba, en el caso de irracionales cuadráticos los cocientes son periódicos. Lo intentamos ver con la raíz cuadrada de 2 y una calculadora:

1,4142135623731 = 1+0,4142135623731 = 1+1/2,414213562 = 1+1/(2+0,414213562) = 1+1(2+1/2,414213562) = 1+1(2+1/2+0,414213562) = …

Aunque de forma aproximada, ya vemos la periodicidad. De hecho, la fracción continua de la raíz cuadrada de 2 es

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Si se interrumpe el desarrollo, que es infinito y periódico y se calcula el valor de lo truncado obtendremos las llamadas *reducidas*. No vamos a reproducir aquí la teoría, porque nuestro interés está en los denominadores de esas reducidas. Desde hace mucho tiempo se sabe que tanto los cocientes como las reducidas se calculan a partir del *algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D*. Dejamos por ahora el fundamento de todo esto, porque lo que nos va a interesar es la obtención de los números de Pell por recursión.

Podemos usar nuestra hoja de cálculo *fraccont.xlsm* para reproducirlo todo (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#fraccont)

Reproducimos el resultado que da para la raíz cuadrada de 2:

1,41421356	Fracción continua:	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
		1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Resolución aproximada											
		1,00000	1,50000	1,40000	1,41667	1,41379	1,41429	1,41420	1,41422	1,41421	1,41421
0,0001											

En la parte izquierda hemos escrito los decimales de la raíz cuadrada de 2, (=RAIZ(2)). La línea de arriba contiene los cocientes de la fracción continua, que, como vemos, es periódica salvo el primero. Debajo están escritas las reducidas, que son fracciones que se aproximan al valor de la raíz de 2, según puedes observar en la fila verde de abajo.

De toda esta teoría nos interesan los valores de los denominadores (lo demás lo puedes ignorar): 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378,…Estos son los llamados "Números de Pell".

Se puede demostrar que la generación de estos números se obtiene por recursión mediante un antiguo algoritmo llamado de "los cumulantes". Compruébalo:

$P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=2*P_2+P_1=2*2+1=5$,
$P_4=2*P_3+P_2=2*5+2=12$, …

$\mathbf{P_n=2*P_{n-1}+P_{n-2}}$

Aquí comienza verdaderamente el tema:

Llamaremos números de Pell a aquellos números enteros obtenidos mediante esta definición por recursión:

$\boldsymbol{P_1 = 1,\ \ P_2 = 2,\ \ P_n = 2*P_{n-1} + P_{n-2}}$

Los primeros son: 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, 2744210, 6625109, 15994428, 38613965, 93222358, 225058681, 543339720, 1311738121, 3166815962, 7645370045, …

Están publicados en http://oeis.org/A000129

Los puedes reproducir mediante la recursión, pero podemos usar otra herramienta que ofrece *Hojamat.es* sobre las sucesiones recurrentes.

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

En la hoja "Segundo orden" podemos escribir los datos de esta recursión: 1 y 2 como elementos iniciales de los números de Pell así como 2 y 1 como coeficientes de la fórmula de recursión. Quedaría así:

Coeficientes				
A	2		B	1
Valores iniciales				
X0	1		x1	2

Si le das al botón **Ver sucesión** obtendrás los primeros números de Pell:

Sucesión	1
	2
	5
	12
	29
	70
	169
	408
	985
	2378
	5741
	13860
	33461
	80782
	195025
	470832
	1136689
	2744210
	6625109
	15994428

Si bajas a celdas inferiores podrás encontrar la ecuación característica, que es la fórmula que devuelve los números de Pell sin necesidad de recursión. La hoja nos devuelve esta ecuación:

X(n)= .85355*(2.41421)^n+ .14645*(-.41421)^n)

Está escrita con decimales, pero puedes comprobar fácilmente que coincide con la que te dará cualquier publicación:

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

Si le das un valor entero positivo a n, con la fórmula se obtendrá P_n. A partir de ella se deduce que el cociente entre dos números de Pell consecutivos se acerca al valor del número de plata:

$$2{,}414213562\ldots = 1 + \sqrt{2}$$

La razón es que al crecer **n** el segundo sumando tiende a 0. Lo comprobamos con nuestra herramienta *recurre2.xlsm*:

P(n)	P(n+1)/P(n)
1	
2	2
5	2,5
12	2,4
29	2,416666667
70	2,413793103
169	2,414285714
408	2,414201183
985	2,414215686
2378	2,414213198
5741	2,414213625
13860	2,414213552
33461	2,414213564
80782	2,414213562
195025	2,414213562
470832	2,414213562

La recurrencia también es útil para investigar si un número cualquiera es de Pell o no. Como el proceso es bastante rápido, bastará usar esa recurrencia desde P(1)=1 y

P(2)=2 hasta llegar al número dado. Si el proceso pasa por él, será de Pell y, si lo sobrepasa, no lo será. Lo hemos plasmado en esta función:

Función ESPELL

Public Function espell(n)
Dim a, b, c
Dim es As Boolean

If n = 1 Or n = 2 Then espell = True: Exit Function ' Si es 1 o 2, hemos terminado
a = 2: b = 5: es = False 'Iniciamos en P(3)=5 y es=false (lo normal es que no sea tipo Pell)
While b <= n
If b = n Then es = True 'Si pasa por el número, será de tipo Pell
c = a + 2 * b: a = b: b = c 'Recurrencia
Wend 'Si sobrepasa al número, no es de Pell
espell = es
End Function

Puedes probarla con números que sabes que son del tipo Pell y otros que no lo sean, para ver su funcionamiento.

Si conoces el lenguaje PARI, puedes usar esta otra, que es idéntica, pero de estructura más compacta:

espell(n)={my(a=2,b=5,c,m=0);while(b<=n,if(b==n,m=1);c=a+2*b;a=b;b=c);m||n==1||n==2}

Son soluciones de ecuaciones de Pell

Lo que sigue es sólo una ventana a otro tema. Si no te interesan las ecuaciones de Pell, ignóralo. Si ya tienes una idea, esto te servirá para repasar o avanzar.

Los valores P_{2n} son soluciones de la ecuación de Pell $x^2-2y^2=1$

Hemos usado nuestra hoja

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

En ella hemos a D el valor 2 y hemos pedido soluciones para que el segundo miembro valga 1:

X	Y	
3	**2**	**1**
17	12	1
99	70	1
577	408	1
3363	2378	1
19601	13860	1
114243	80782	1
665857	470832	1

Observamos que las soluciones para Y son los números de Pell de índice par.

Los valores P_{2n-1} son soluciones de la ecuación de Pell $x^2-2y^2=-1$

X	Y	
1	**1**	**-1**
3	2	1
7	5	-1
17	12	1
41	29	-1
99	70	1
239	169	-1
577	408	1

En efecto, para el -1 resultan los números de Pell de índice impar 5, 29, 169, …

Aquí lo dejamos, ya que era una idea para profundizar.

Los números de Pell y las ternas pitagóricas

Los números de Pell nos sirven para descubrir catetos de una terna pitagórica primitiva que se diferencien en una unidad. Para ello recordemos que las ternas se formaban mediante estas tres expresiones: **($2mn$, m^2-n^2, m^2+n^2)**, con m y n coprimos y de distinta paridad. Si los dos catetos se diferencian en una unidad se cumplirá que **$m^2-n^2=2mn+1$**. Hemos escrito 1, pero también resultan casos con el -1

Convertimos **$m^2-n^2=2mn+1$ en $(m-n)^2-2n^2=1$** (o a -1)

Por tanto, m-n y n serán soluciones de la ecuación de Pell contenidas en las tablas de arriba.

Tomemos, por ejemplo, las soluciones 99 y 70. Calculamos:

m-n=99, n=70, m=169, m^2-n^2= 23661 y 2mn=2*169*70=23660, y son consecutivos.

Vemos otro: m-n=17, n=12, m=29 y m^2-n^2=697 y 2mn=696.

Los valores de m y n resultan ser números de Pell consecutivos.

¿Pueden ser de otro tipo los números de Pell?

Si combinamos nuestra función ESPELL vista más arriba con otras del mismo tipo como ESCUAD, ESPRIMO, ESOBLONGO o ESTRIANGULAR, podemos saber si un número de Pell puede pertenecer a otro tipo. Aquí tienes algunos resultados:

Primos

Sí existen números de Pell que son primos. Los primeros son 2, 5, 29, 5741,…Sus índices han de ser primos también. Puedes profundizar en estas páginas:

https://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html

http://oeis.org/A086383

Cuadrados

Sólo son de Pell y cuadrados estos dos: el 1 y el 169

Triangulares

Ocurre algo similar, que el 1 es el único número de Pell triangular

Oblongos

Hemos encontrado 2 y 12 y no parece haber más.

Semiprimos

Hemos encontrado 169=13*13, 985=5*197, 1136689=137*8297, 6625109

Con esto tienes una idea básica de lo que son los números de Pell y algunas de sus propiedades.

NÚMEROS DE LUCAS

En apartados anteriores hemos estudiado algunas sucesiones tipo Horadam. Son aquellas que se forman mediante una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, es decir del tipo $\mathbf{x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}}$

(http://mathworld.wolfram.com/LinearRecurrenceEquation.html)

Interpretamos que cada término a partir uno de ellos equivale al anterior multiplicado por un número más el anterior del anterior por otro. A esos dos números a_1 y a_2 les llamaremos los coeficientes de la recurrencia.

Lo normal es definir directamente los primeros términos, llamados *valores iniciales*, y después dar los *coeficientes* *de la recurrencia,* que supondremos constantes. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci, definimos directamente $x_0=1$, $x_1=1$ y usamos los coeficientes $a_1=1$ y $a_2=1$, con lo que la relación de recurrencia vendrá dada por $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$, constituyendo una recurrencia lineal de segundo orden homogénea, y entrando así en nuestro estudio.

Estas sucesiones reciben el nombre de "sucesiones de Horadam" y se caracterizan por estar determinadas por esos cuatro parámetros dentro de una recurrencia de segundo orden homogénea. Así, la sucesión de Fibonacci es Horadam(0,1,1,1), porque los parámetros se escriben en orden inverso a como lo hacemos aquí. Sólo estudiaremos algunos casos, pues el tema es muy amplio y con muchas sucesiones interesantes. En este enlace puedes repasar el funcionamiento de una herramienta para estudiarlas:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/recurrencias-lineales-de-segundo-orden.html

En estas entradas se estudiaron dos casos concretos

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/02/numeros-de-pell.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html

La herramienta de hoja de cálculo la tienes en http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Sucesiones de Fibonacci generalizadas

Se han estudiado mucho las sucesiones de Horadam con coeficientes A=1 y B=1. Algunas de ellas son muy populares, formando un pequeño entramado de sucesiones similares que tendremos que desentrañar. Comencemos dando a X_1 y X_2 los valores usuales entre 0 y 2:

X_1=0 y X_2=1: Resulta la sucesión de Fibonacci comenzando en 0: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

http://oeis.org/A000045.

Por ahora no la estudiaremos. Se ha escrito tanto sobre ella que no parece fácil aportar algo nuevo.

X_1=1 y X_2=1: Resulta la sucesión de Fibonacci comenzando en: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

La nombraremos como F(n) http://oeis.org/A000045

X_1=1 y X_2=2: Se formará la misma sucesión comenzando en el segundo 1: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

X_1=2 y X_2=1: Obtenemos la sucesión de Lucas comenzando en 2: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, …

http://oeis.org/A000032.

La representaremos como L(n)

X_1=1 y X_2=3: Obtenemos la sucesión de Lucas comenzando en 1: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, …

http://oeis.org/A000204

Nos detenemos aquí: según los términos iniciales, podemos obtener la clásica sucesión de Fibonacci, la de Lucas o la de otras del tipo Fibonacci, como la contenida en http://oeis.org/A104449

No nos cabrían aquí todas las propiedades de la primera, ya muy estudiadas y publicadas. Sólo destacaremos alguna de ellas si lo vemos oportuno y nos dedicaremos más a los números de Lucas.

Números de Lucas

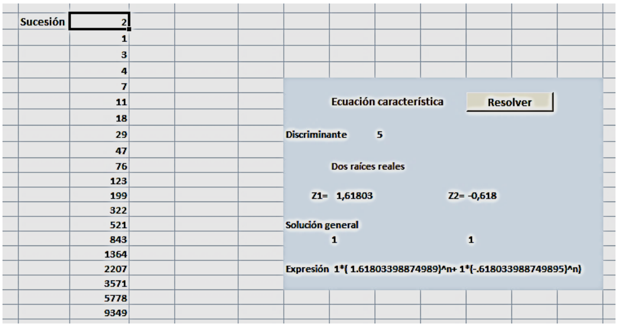
Los números de Lucas se pueden engendrar con los coeficientes A=1 y B=1 comenzando con X_1=2 y X_2=1 (más arriba hemos visto otra variante), es decir forman la sucesión de Horadam(2,1,1,1).

En estas direcciones puedes ampliar el tema:

http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo13.html http://gaussianos.com/algunas-curiosidades-sobre-los-numeros-de-fibonacci/

http://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html

Con hoja de cálculo y nuestra herramienta *recurre_lineal* presentan estos valores:



2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571,…

Los representaremos como L(n)

http://oeis.org/A000032

En la parte derecha, que te da automáticamente la expresión respecto a **n**, puedes comprobar la fórmula de **L(n)**

$$L(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n}$$

ENT:	FHI*n	2
2	1,618034	1
3	2,618034	3
4	4,236068	4
7	6,854102	7
11	11,09017	11
18	17,94427	18
29	29,03444	29
47	46,97871	47
76	76,01316	76
123	122,9919	123
199	199,005	199
322	321,9969	322
521	521,0019	521
843	842,9988	843
1364	1364,001	1364
2207	2207	2207
3571	3571	3571
5778	5778	5778

Es parecida a la de la sucesión de Fibonacci, con la que comparte la misma fórmula de recurrencia. Observa que a partir de n=2, el valor absoluto de la segunda potencia es menor que ½, por lo que X(n) coincidirá con la parte entera de la primera, que coincide con la razón áurea φ elevada a n.

Es decir:

$$L(n) = \left|\varphi^n + \frac{1}{2}\right|$$

En la imagen lo hemos programado en hoja de cálculo y se descubre la coincidencia de valores para n>1.

Consecuencia inmediata de esto es que L(n+1)/L(n) tiene al valor φ cuando n tiende a infinito, al igual que ocurre con la sucesión de Fibonacci.

Periodicidad de la cifra de las unidades

Al igual que en otras sucesiones de Horadam. Los números de Lucas presentan un ciclo de longitud 12 en sus cifras de unidades:

{2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9}

Lo puedes comprobar en el listado: El tercer número de Lucas es 4 y si avanzo 12 pasos en la sucesión encuentro 1364 que también termina en 4. Aunque se genera del mismo modo que la sucesión de Fibonacci, esta última no presenta este ciclo porque en ella nunca coinciden un 1 seguido de un 3.

Relaciones con los números de Fibonacci

Dos sucesiones tan similares tienen por fuerza que relacionarse de varias formas. Comenzamos con la más sencilla:

L(n) = F(n+1)+F(n-1) para n > 0.

Por inducción: Se cumple en los primeros valores:

Fibonacci	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
F(n+1)+F(n-1)		**1**	**3**	**4**	**7**	**11**	**18**	**29**	**47**	**76**	**123**	**199**	

Si la suponemos verdadera para n, L(n)=F(n+1)+F(n-1) se tiene: L(n+1)=L(n)+L(n-1)= F(n+1)+F(n-1)+ F(n)+F(n-2)=F(n+2)+F(n), luego se cumple y la relación queda demostrada.

L(n)=F(2n)/F(n)

Llama la atención esta igualdad, pero basta acudir a una propiedad de F(n), y es que $F(2n)=(F(n+1)^2-F(n-1)^2$

(Ver http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number) y desarrollar:

$F(2n)=(F(n+1)^2-F(n-1)^2=$ F(2n)=(F(n+1)+F(n-1))(F(n+1)-F(n-1))=L(n)F(n) y despejando obtenemos la relación propuesta. Por ejemplo, tomemos n=6. Tendremos: L(6)=18, F(6)=8, F(12)=144, luego

F(12)=144=F(6)L(6)=18*8=144

Según estas equivalencias, cualquier fórmula expresada con números de Lucas, también se puede hacer depender de los de Fibonacci.

Una relación inversa

F(N)=(L(N-1)+L(N+1))/5

Comprobamos los términos iniciales con hoja de cálculo:

Lucas	L(n-1)+L(b+1)	Fibonacci
2		
1		
3	5	1
4	5	1
7	10	2
11	15	3
18	25	5
29	40	8
47	65	13
76	105	21
123	170	34
199	275	55
322	445	89
521	720	144
843	1165	233

Se puede completar la demostración por inducción:F(N+1)=F(N)+F(N-1)=(L(N-1)+L(N+1)+L(N-2)+L(N))/5 =

(L(N)+L(N)+L(N+1))/5 = (L(N)+L(N+2))/5

Función generatriz

Si has leído toda la serie que llevamos publicada sobre recurrencias, no te costará trabajo entender que

1	1	0
2	3	1
3	4	1
4	7	3
5	11	1
6	18	0
7	29	1
8	47	7
9	76	4
10	123	3
11	199	1
12	322	10
13	521	1
14	843	3
15	1364	14
16	2207	15
17	3571	1
18	5778	0
19	9349	1

$$L(x)=\frac{x_0+(x_{1-}a_1x_0)x}{1-a_1x-a_2x^2}=\frac{2+(1-1*2)x}{1-1x-x^2}=\frac{2-x}{1-2x-x^2}$$

Congruencias

Los números de Lucas presentan congruencias destacables:

L(p) es congruente con 1 módulo p, siendo p primo.

Puedes aprovechar para comprobarlo el listado básico que nos devuelve la hoja de cálculo recurre_lineal que venimos usando. Basta incluir la función RESIDUO aplicada a L(n) y a n y comprobarás que para índices primos el resto es 1.

Como ocurría en una situación similar con los números de Pell, la propiedad contraria no es cierta, ya que también hay números compuestos en los que el residuo es también 1. Se les da el nombre de pseudoprimos de Lucas y los tienes en https://oeis.org/A005845: 705, 2465, 2737, 3745, 4181, 5777, 672, …

L(2p) con p primo es congruente con 3 módulo p

En la imagen anterior puedes comprobar los casos de 3, 10 y 14

L(n) es par si n es múltiplo de 3 e impar en los demás casos.

Esta propiedad es casual, y debida a la definición de estos números: Los dos primeros son impares, luego el tercero, su suma, será par, el siguiente impar+par será impar y el quinto, par+impar, también será impar. Así seguiremos de forma que algunos consecutivos serán impares y el tercero par.

Existen otras congruencias más complicadas que omitimos.

SOLUCIONES ENTERAS

Puede ser curioso estudiar sucesiones Horadam cuyas soluciones en la ecuación característica sean enteras

Puedes repasar algo de este tipo de sucesiones en estas entradas que ya hemos publicado:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/recurrencias-lineales-de-segundo-orden.html

En ella se explican las recurrencias de Segundo orden y cómo encontrar sus ecuaciones características. En estas otras explicamos ejemplos concretos, que te pueden server de guía:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/02/numeros-de-pell.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/01/sucesion-de-jacobsthal.html

Usaremos la misma herramienta de hoja de cálculo, ***recurre_lineal***, alojada en

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Así que enlazaremos con lo ya publicado estudiando la ecuación característica $\mathbf{x^2-a_1x-a_2=0}$ en el caso en el que tenga soluciones enteras.

Es fácil ver que si llamamos Z_1 y Z_2 a esas dos soluciones, deberá cumplirse que $a_1=Z_1+Z_2$ y $a2=-Z_1Z_2$. Así de simple: si deseas unas soluciones determinadas (aquí enteras) basta que tomes como coeficiente de X(n-1) en la ecuación de recurrencia su suma y como segundo coeficiente su producto cambiado de signo:

$\mathbf{X(n)=(Z_1+Z_2)X(n-1)-Z_1Z_2X(n-2)}$

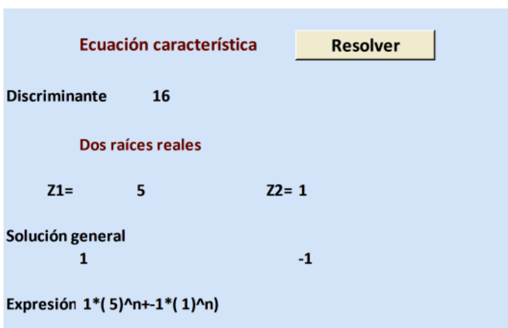
Por ejemplo, si deseamos generar mediante recurrencia $X(n)=5^n-1^n$, el primer paso sería elegir como a_1 su suma 6 y como a_2 su producto 5 tomado negativo:

X(n)=6X(n-1)-5X(n-2)

Los términos iniciales los elegiríamos por sustitución $X(0)=5^0-1^0=1-1=0$ y $X(1)=5^1-1^1=5-1=4$. Lo volcamos todo en nuestra hoja de cálculo ***recurre_lineal*** y obtendremos:

0
4
24
124
624
3124
15624
78124
390624
1953124
9765624
48828124
244140624

Son los números de fórmula 5^n-1 pedidos. Si resolvemos su ecuación característica comprobaremos esta expresión:



Esta sucesión la tienes en http://oeis.org/A024049 En la dirección http://oeis.org/wiki/Index_to_OEIS:_Section_Rec tienes un completo catálogo de sucesiones generadas de forma similar.

Situación inversa

Toda sucesión definida en su término general por **$X(n)=mA^n+nB^n$** (en este caso con **m** y **n** enteros) se puede generar de esta forma:

Si $X(n)=mA^n+nB^n$ y $X(n-1)=mA^{n-1}+nB^{n-1}$, tendremos

$X(n+1)=(A+B)*(mA^n+nB^n)-AB*(mA^{n-1}+nB^{n-1})=(A+B-B)*mA^n + (A+B-A)*nB^n= mA^{n+1}+nB^{n+1}$,

luego la recurrencia es válida.

Después haríamos $X(0)=m+n$ y $X(1)=mA+nB$

Toda sucesión del tipo $X(n)=mA^n+nB^n$ se puede generar mediante una recurrencia lineal homogénea de segundo orden

Otro ejemplo

Tomemos otro ejemplo: $X(n)=4^n-2^n$. La recurrencia que la reproduce será: $X(0)=0$, $X(1)=4-2=2$, $X(n)=6X(n-1)-8X(n-2)$

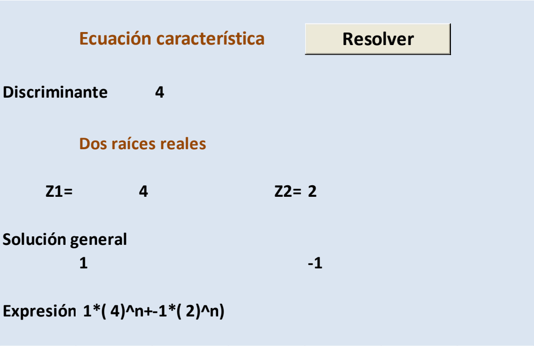
Aquí tienes la sucesión formada con nuestra hoja de cálculo

Hemos elegido la recurrencia propuesta

Sucesión	0
	2
	12
	56
	240
	992
	4032
	16256
	65280
	261632
	1047552
	4192256
	16773120

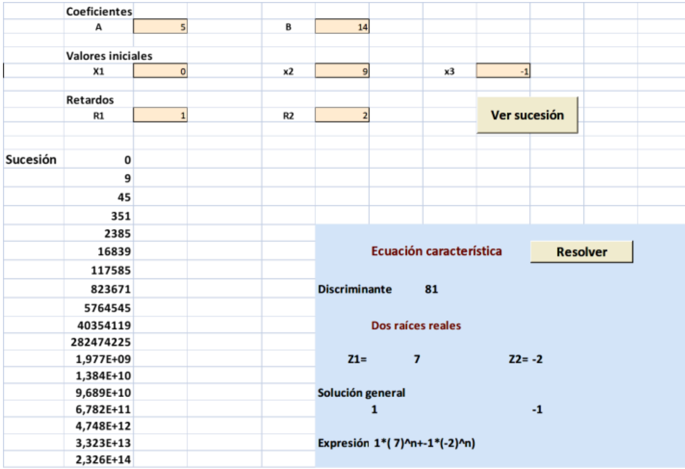
Coeficientes					
A	6		B	-8	
Valores iniciales					
X1	0		x2	2	

Y hemos reproducido la diferencia de potencias como fórmula general:



Esta sucesión la tienes estudiada en http://oeis.org/A020522 y medio escondida figura la recurrencia.

De esta forma podemos generar cualquier otra sucesión de ese tipo. Tomemos un ejemplo con un negativo: $X(n)=7^n-(-2)^n$. En este caso tomaríamos X(0)=0, X(1)=9, X(n)=5X(n-1)+14X(n-2). En la imagen puedes estudiar la comprobación:



Función generatriz

Si una sucesión está definida como combinación lineal de potencias de dos enteros hemos demostrado que se puede generar mediante una recurrencia de segundo orden. Podremos usar el modelo de F.G. que definimos en su momento

$$F(x) = \frac{x_0 + (x_1 - a_1 x_0)x}{1 - a_1 x - a_2 x^2}$$

En este caso se traduciría así:

$$F(x) = \frac{(mA + nB)x}{1 - (A + B)x + ABx^2}$$

En el ejemplo anterior se traduciría como

$$F(x) = \frac{9x}{1 - 5x - 14x^2}$$

Lo comprobamos con PARI

{write("final.txt",taylor(9*x/(1-5*x-14*x^2), x,12))}

Efectivamente, los coeficientes del desarrollo coinciden con los obtenidos con hoja de cálculo.

9*x + 45*x^2 + 351*x^3 + 2385*x^4 + 16839*x^5 + 117585*x^6 + 823671*x^7 + 5764545*x^8 + 40354119*x^9 + 282474225*x^10 + 1977328791*x^11 + O(x^12)

Números de Mersenne

Los números de forma 2^n-1 son llamados "de Mersenne", aunque son más populares los "primos de Mersenne" 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, …Con lo explicado anteriormente será fácil generarlos: a_1=3, a_2=-2, X(0)=0, X(1)=1. Volcamos estos datos en la herramienta:

Coeficientes					
A	3		**B**	-2	
Valores iniciales					
X1	0		**x2**	1	

Obtenemos

Sucesión	0
	1
	3
	7
	15
	31
	63
	127
	255
	511
	1023
	2047
	4095
	8191
	16383
	32767

Comprobamos la expresión general:

Ecuación característica   Resolver

Discriminante   1

Dos raíces reales

Z1=   2   Z2= 1

Solución general
1   -1

Expresión 1*(2)^n+-1*(1)^n)

Estos números los encontrarás en

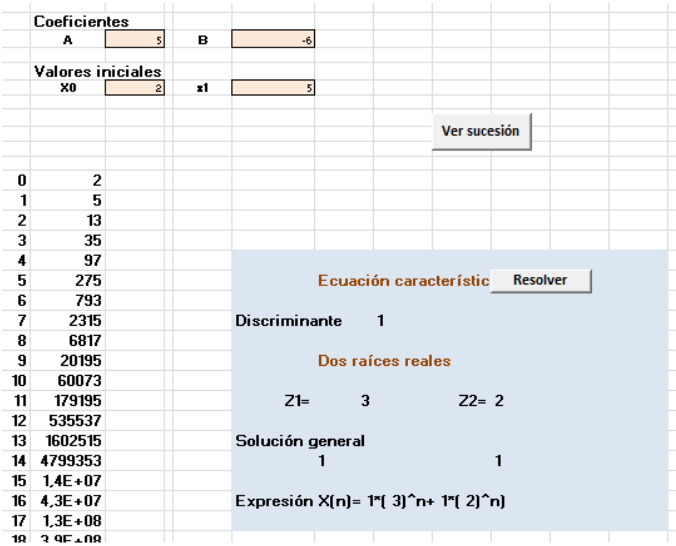
http://oeis.org/A000225

Merece la pena que recorras los comentarios sobre esta sucesión, en especial su conexión con el problema de las torres de Hanoi. En el apartado de fórmulas encontrarás la recurrencia que hemos usado y la función generatriz, que puedes comprobar con lo explicado anteriormente.

Una suma de potencias

¿Cómo engendrar mediante recurrencia la sucesión 2^n+3^n*?*

Te dejamos tan sólo el volcado de pantalla de la misma, para que saques tus consecuencias:



SUCESIÓN DE PERRIN

La teoría fundamental sobre esta serie la puedes consultar en

http://mathworld.wolfram.com/PerrinSequence.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number

Aquí la describiremos con la ayuda de la herramienta que hemos ofrecido en entradas anteriores, alojada en

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Definición

Esta sucesión es recursiva de tercer orden homogénea, por lo que necesita tres valores iniciales y que X(n) dependa de los tres valores anteriores X(n-1), X(n-2) y X(n-3) mediante la relación

$\mathbf{x_n= A^*x_{n-1}+B^*x_{n-2}+C^*x_{n-3}}$

En este caso particular sólo depende de los dos últimos, y no de X(n-1).

Concretando:

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=3}$ $\mathbf{x_1=0}$ $\mathbf{x_2=2}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n=x_{n-2}+x_{n-3}}$

Es como una sucesión del tipo Fibonacci pero "con retraso", pues los que se suman no son los dos anteriores, sino los que están un paso más atrás.

En nuestra hoja de cálculo se define así (segunda hoja del libro):

Recurrencias lineales de tercer orden							
Coeficientes							
A	0		**B**	1		**C**	1
Valores iniciales							
X0	3		**x1**	0		**x2**	2

El primer coeficiente es nulo, que es lo que produce el "retraso", y debajo tienes los tres valores iniciales.

La sucesión resultante la vemos pulsando el botón correspondiente:

3	
0	
2	
3	
2	
5	
5	
7	
10	
12	
17	
22	
29	
39	
51	
68	
90	

Esta popular sucesión la tienes disponible en http://oeis.org/A001608, donde les llaman números skiponacci, quizás por los saltos o retardos que presentan: 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853,…

Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será X^3-x-1=0. Con el botón ***Resolver*** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

Ecuación característica			Resolver		
1ª Raíz real	1,324718				
Discriminante	-1,26463				
	Dos raíces complejas				
Z1=	-0,6624	0,56228	Z2=	-0,6624	-0,5623

Coinciden con las soluciones que da WxMaxima

```
(%i5) algsys([x^3-x-1=0],[x]);
(%o5) [[x=-0.5622795120623 %i-0.66235897862237],[x=0.5622795120623 %i-0.66235897862237],[x=1.324718045112782]]
```

La solución real 1,32471…(aquí sólo aproximada) es el ***número plástico*** ψ, cuyo nombre se eligió como afín al número de oro o el de plata. En estas páginas puedes estudiarlo más a fondo:

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_pl%C3%A1stico

http://revistasuma.es/IMG/pdf/57/055-064.pdf

http://cscmates.blogspot.com.es/2010/11/el-numero-de-plastico.html

Recordemos que, como en sucesiones anteriores, todo número de Perrin es combinación lineal de las potencias de las tres soluciones de la ecuación característica, pero las dos complejas tienen módulo menor que la unidad, por lo que sus potencias tenderán a cero en valor absoluto. **Por tanto, X(n) se acercará asintóticamente a ψ^n**

Se puede construir una tabla doble en la que se observe este acercamiento:

Orden	X(n)	ψ^n
0	3	1,000000
1	0	1,324718
2	2	1,754877
3	3	2,324718
4	2	3,079595
5	5	4,079595
6	5	5,404312
7	7	7,159189
8	10	9,483905
9	12	12,563499
10	17	16,643092
11	22	22,047401
12	29	29,206587
13	39	38,690488
14	51	51,253981
15	68	67,897066
16	90	89,944457
17	119	119,151031
18	158	157,841502
19	209	209,095461

A partir de un cierto orden basta redondear la potencia para obtener el número de Perrin correspondiente. Lo puedes comprobar en las últimas filas de la tabla.

Función generatriz

Usando procedimientos similares a los que explicamos para las recurrentes de segundo orden, se puede demostrar que la función generatriz es

$$F(x) = \frac{3 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

Puedes comprobar que esta es la F.G. adecuada efectuando este desarrollo en PARI

write("sucesion.txt",taylor((3-x^2)/(1-x^2-x^3),x,20))

Te escribirá en un archivo *sucesión.txt* su desarrollo, y aparecerán como coeficientes los términos de la sucesión de Perrin:

*3 + 2*x^2 + 3*x^3 + 2*x^4 + 5*x^5 + 5*x^6 + 7*x^7 + 10*x^8 + 12*x^9 + 17*x^10 + 22*x^11 + 29*x^12 + 39*x^13 + 51*x^14 + 68*x^15 + 90*x^16 + 119*x^17 + 158*x^18 + 209*x^19 + O(x^20)*

Sucesión de Perrin y números primos

La propiedad más conocida de estos números es que si **p** es primo, **p** divide a **X(p).** Por ejemplo, X(11)=22, que es múltiplo de 11. Podemos construir una tabla en la que dividamos X(n) entre n y los cocientes enteros se corresponderán con los números primos:

n	X(n)	X(n)/n
0	3	
1	0	0
2	2	1
3	3	1
4	2	0,5
5	5	1
6	5	0,83333
7	7	1
8	10	1,25
9	12	1,33333
10	17	1,7
11	22	2
12	29	2,41667
13	39	3
14	51	3,64286
15	68	4,53333
16	90	5,625
17	119	7
18	158	8,77778
19	209	11

A pesar de su carácter algo extraño, la propiedad ha sido demostrada para todos los números primos. La contraria no es cierta. X(n) puede ser múltiplo de n sin que este sea primo. A estos términos se les suele llamar pseudoprimos de Perrin

(http://oeis.org/A013998):

271441, 904631, 16532714, 24658561, 27422714, 27664033, 46672291, …

Otras propiedades

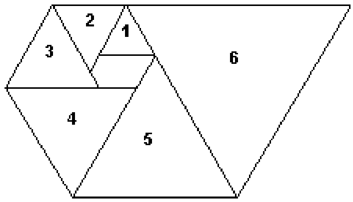
La paridad de X(n) recorre el ciclo {1, 0, 0, 1, 0, 1, 1} Es fácil de ver: las tres primeras vienen determinadas por la definición (en color rojo en la imagen). Las siguientes dependen de dos anteriores. Por tanto, existirá ciclo si se vuelve a repetir el par 1 0, y esto ocurre siete lugares más adelante (color verde):

1	0	0	1	0	1	1	1	0

Para ampliar el tema puedes visitar

http://www.mathpages.com/home/kmath345/kmath345.htm

en el que se incluye la espiral triangular creada con estos números.



Propiedades matriciales

Estas entradas sobre sucesiones recurrentes también se plantean el objetivo de un mayor conocimiento de las hojas de cálculo. Por eso vamos a aprovechar las propiedades matriciales de la sucesión de Perrin para repasar este tipo de funciones.

La primera propiedad matricial se resume en la siguiente fórmula para n>2:

$$P(n) = Traza\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Recuerda que la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada.

Para comprobarlo con una hoja de cálculo organizaremos este esquema:

	Potencia de n-1 de M				M				Potencia n de M			Traza
0	1	0		0	1	0		0	0	1		2
0	0	1		0	0	1		1	1	0		
1	1	0		1	1	0		0	1	1		

Comenzamos escribiendo a la izquierda la matriz M dos veces, y a la derecha las multiplicamos. Para ello usaremos la función matricial MMULT, pero como es de tipo matricial deberás seleccionar la matriz de la derecha (debajo del rótulo “Potencia n de M), después escribir una fórmula similar a esta: **=MMULT(C3:E5;G3:I5)**, tomando como rangos los de las matrices de la izquierda. Cuando escribas la fórmula no termines con **Intro**, sino con la combinación **Ctrl+Mayúsc+Intro**, para indicar que la fórmula es de tipo matricial. Notarás que lo has escrito bien porque la fórmula se verá entre corchetes.

A la derecha de las matrices puedes incluir la traza de la tercera, que en la imagen te da 2. Después copia la tercera sobre la primera matriz con copia *sólo de valores*, y te resultará el siguiente número de Perrin, en este caso 3, porque esta propiedad genera la sucesión a partir del tercer término. Seguirían 2, 5, 5, 7, 10,…

Variante de la anterior expresión

Si en lugar de usar la traza empleamos un producto por la matriz (en vertical) (3, 0, 2), obtenemos tres términos en lugar de uno. La expresión sería ahora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(n) \\ P(n+1) \\ P(n+2) \end{pmatrix}$$

Bastaría borrar la traza en el anterior esquema y sustituirla por otro nuevo producto matricial con la (3, 0, 2). Lo dejamos como ejercicio. Aquí tienes la generación de los términos 5, 7 y 10

	Potencia de n-1 de M				M				Potencia n de M					Términos
1	1	1		0	1	0		1	2	1		3	n	5
1	2	1		0	0	1		1	2	2		0	n+1	7
1	2	2		1	1	0		2	3	2		2	n+2	10

SUCESIÓN DE LAS VACAS DE NARAYANA

Proseguimos nuestro estudio de sucesiones recurrentes de tercer orden con la ideada por el hindú Narayana (siglo XIV), con la que intentaba calcular generaciones de vacas, al igual que Fibonacci lo hacía con conejos. Planteó lo siguiente:

Una vaca tiene anualmente una cría. Cada una de ellas, cuando ya es novilla a los cuatro años, también tiene una cría anual ¿Cuántas vacas habrá a los 20 años?

En libros y webs de Historia de las Matemáticas puedes encontrar cómo lo resolvió a partir de sumas de números consecutivos, pero a nosotros nos interesa en este momento su carácter de sucesión recurrente.

En efecto, supongamos que nace la vaca en el año 1. Se pasará tres años sin parir, por lo que la sucesión deberá comenzar con 1, 1, 1, … Al cuarto año tiene una cría, luego ya serán 2 vacas, y, como pare cada año, los siguientes números serán 3 y 4. Cuando la cría tiene 4 años, tendrá otra a su vez, y serán 6. En general, en cada generación habrá tantas vacas como las que haya actuales, más todas aquellas que ya tengan cuatro años, lo que nos lleva a que $\mathbf{x_n=x_{n-1}+x_{n-3}}$

Según esto, la sucesión de Narayana es recurrente de tercer orden, y entra dentro del ciclo que estamos desarrollando.

Para entender mejor cómo organizaremos el estudio, puedes leer la entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/11/sucesion-de-perrin.html

La definición de la sucesión, como todas las de su clase, se basa en dar la fórmula de recurrencia y las condiciones iniciales. Según lo explicado más arriba, son estas:

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=1}$ $\mathbf{x_1=1}$ $\mathbf{x_2=1}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n=x_{n-1}+x_{n-3}}$

Acudiendo a la herramienta que usamos en esta serie

1
1
1
2
3
4
6
9
13
19
28
41
60
88
129
189

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

tendremos:

Planteamiento:

Coeficientes							
A	1		**B**	0		**C**	1
Valores iniciales							
X0	1		**x1**	1		**x2**	1

Resultado:

Coincide con la sucesión publicada en http://oeis.org/A000930

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745, …

Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será X^3-x^2-1=0. Con el botón ***Resolver*** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

Ecuación característica		**Resolver**	
1ª Raíz real Z1=	**1,465570**		
Discriminante	**-2,51255**		
Dos raíces complejas			
Z2= -0,2328	**0,79255**	**Z3= -0,2328**	**-0,7926**

Con wxMaxima:

```
(%i1) algsys([x^3-x^2-1],[x]);
(%o1) [[x=1.465571205007825],[x=-0.79255199251545 %i-0.23278561593838],[x=0.79255199251545 %i-
0.23278561593838]]
```

Esta situación la hemos visto en sucesiones anteriores, y es que X(n) debe coincidir con la suma de las tres raíces elevadas a n, pero como el módulo de las complejas es menor que 1, X(n) se acercará para valores grandes a 1,46557^n

(ver en http://oeis.org/A000930 una aproximación más precisa), y que también X(n+1)/X(n) se acercará a ese valor 1,46557. Esto segundo lo puedes ver con la hoja creando una columna de cocientes:

13	1,44444444
19	1,46153846
28	1,47368421
41	1,46428571
60	1,46341463
88	1,46666667
129	1,46590909
189	1,46511628
277	1,46560847
406	1,46570397
595	1,46551724
872	1,46554622

Función generatriz

Al igual que en las sucesiones recurrentes que ya hemos estudiado, podemos considerar una función generatriz para esta. Es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^3}$$

La comprobamos con PARI y vemos que su desarrollo contiene la sucesión en los coeficientes.

write("sucesion.txt",taylor(1/(1-x-x^3),x,20))

1 + x + x^2 + 2*x^3 + 3*x^4 + 4*x^5 + 6*x^6 + 9*x^7 + 13*x^8 + 19*x^9 + 28*x^10 + 41*x^11 + 60*x^12 + 88*x^13 + 129*x^14 + 189*x^15 + 277*x^16 + 406*x^17 + 595*x^18 + 872*x^19 + O(x^20)

En cada sucesión que estudiamos nos gusta destacar algún tipo de propiedades. En la de Narayana llaman la atención las de tipo combinatorio.

Relación con los números combinatorios

X(n) equivale al número de composiciones (particiones con orden) del número n en sumandos 1 y 3. Por ejemplo, si X(7)=9, es porque existen 9 particiones ordenadas de este tipo del número 7: {1, 3, 3} {3, 1, 3} {3, 3, 1} {1, 1, 1, 1, 3} {1, 1, 1, 3, 1} {1, 1, 3, 1, 1} {1, 3, 1, 1, 1} {3, 1, 1, 1, 1} {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}

Con nuestra hoja “Cartesius” (no publicada) lo hemos reproducido fácilmente, con las instrucciones siguientes, que no explicaremos ahora:

XRANGO=7
XT=1,3
SUMA=7
REPITE

Aquí tenemos el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	3	3				
3	1	3				
3	3	1				
1	1	1	1	3		
1	1	1	3	1		
1	1	3	1	1		
1	3	1	1	1		
3	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1

Es otra forma de ver la recurrencia: estas nueve composiciones han resultado de añadir un 3 a las correspondientes a n=4, que son : {1, 3} {3, 1} y {1, 1, 1, 1} y añadir un 1 a las correspondientes a n=6: {3, 3} {1, 1, 1, 3} {1, 1, 3, 1} {1, 3, 1, 1} {3, 1, 1, 1} {1, 1, 1, 1, 1, 1}, con lo que se cumple que C(7)=C(6)+C(4). Esto ocurre para todo valor N, porque siempre podemos repartir sus composiciones entre las que terminan en 1 y las que lo hacen en 3, resultando así C(n-1) y C(n-3).

Desarrollo con binomiales

Si observas la tabla del desarrollo de X(7), entenderás que está formada por permutaciones de dos elementos (1 y 3) tomados 3, 5 o 7 veces. Las permutaciones con repetición de dos elementos equivalen a números combinatorios, por lo que podemos plantear:

$$X(7) = \binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 5 + 3 = 9$$

En general se cumplirá:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{n/3} \binom{n-2i}{i}$$

Esto nos da un procedimiento para calcular directamente cualquier elemento de la sucesión de Narayana. La función en Basic de hoja de cálculo te lo resuelve:

```
Public Function narayana(n)
Dim p, q, t, s, i
 p = 0: q = n: t = 1

While p < q - 1
q = q - 2: p = p + 1 ‘Va incrementando el índice inferior y restando 2 al superior
s = 1: For i = 0 To p - 1: s = s * (q - i) / (p - i): Next i ‘Calcula el número combinatorio
t = t + s ‘Suma los números combinatorios
Wend
narayana = t
End Function
```

Con ella podemos responder a la cuestión de Narayana, y es que a los 20 años habría 1278 vacas.

N	Narayana(N)
20	1278

NÚMEROS "TRIBONACCI"

Los números "tribonacci" son análogos a los de Fibonacci, pero generados mediante recurrencias de tercer orden homogéneas. Existen muchas sucesiones con este nombre, según sean sus condiciones iniciales. Aquí comenzaremos con la contenida en http://mathworld.wolfram.com/TribonacciNumber.html, pero podemos cambiar más tarde si surgen propiedades interesantes para su estudio con hoja de cálculo.

En estos números la fórmula de recurrencia posee todos sus coeficientes iguales a la unidad

$\mathbf{x_n= A*x_{n-1}+B*x_{n-2}+C*x_{n-3}}$ se convertiría en $\mathbf{x_n= x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}}$

Al igual que en el caso de Fibonacci, los dos valores iniciales también valen 1, y el tercero, 2, pero ya hemos explicado que existen otras variantes. Dejamos los enlaces de algunas de ellas:

http://oeis.org/A000073 comienza con a(0)=a(1)=0, a(2)=1

http://oeis.org/A000213 con a(0)=a(1)=a(2)=1

http://oeis.org/A001590 con a(0)=0, a(1)=1, a(2)=0

http://oeis.org/A081172 comienza con 1,1,0.

Y hay más.

Como ya hemos indicado, nosotros comenzaremos con:

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=1}$ $\mathbf{x_1=1}$ $\mathbf{x_2=2}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n= x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}}$

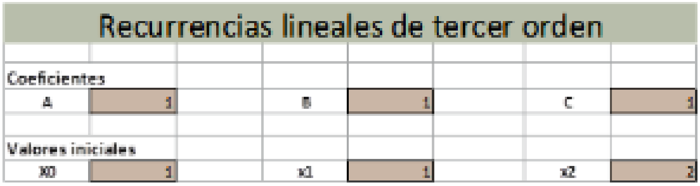
Los primeros términos son:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744, … http://oeis.org/A000073

Como en otras entradas sobre el mismo tema, podemos acudir a nuestra herramienta de hoja de cálculo para sucesiones recurrentes

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

En la imagen puedes identificar los coeficientes y valores iniciales:



Recurrencias lineales de tercer orden							
Coeficientes							
A	1		B	1		C	1
Valores iniciales							
X0	1		x1	1		x2	2

Con el botón “Ver sucesión” podremos obtener el listado de estos números:

Ecuación característica

Al igual que en otras sucesiones recurrentes, su ecuación característica se formará a partir de sus coeficientes, en este caso todos iguales a 1, luego será $\mathbf{x^3-x^2-x-1=0}$

Con nuestra herramienta podemos encontrar sus raíces:

1
1
2
4
7
13
24
44
81
149
274
504
927
1705
3136
5768
10609
19513
35890

Ecuación característica **Resolver**

1ª Raíz real Z1= **1,839290**

Discriminante **-1,47038**

Dos raíces complejas

Z2= -0,41965 0,606297 **Z3= -0,41965 -0,6063**

La misma solución obtenemos con WxMaxima

```
(%i1) algsys([x^3-x^2-x-1],[x]);

(%o1) [[x=1.839286758257819],[x=-0.6062907292072 %i -0.41964337760708],[x=0.6062907292072 %i -
0.41964337760708]]
```

Recordemos que los elementos de las sucesiones recurrentes se pueden expresar como suma de potencias de las tres soluciones, pero con estos números ocurre como con algunos similares (los de Fibonacci, Perrin o Narayana), y es que las raíces complejas, al tener módulo inferior a la unidad, tienden a cero si prolongamos la sucesión. Por ello, las potencias de la raíz real, 1,839286…generan con bastante aproximación los números Tribonacci, y, lo que es lo mismo, esta constante coincidirá aproximadamente con el cociente entre dos de estos números consecutivos. Lo vemos con hoja de cálculo:

7	1,75
13	1,85714286
24	1,84615385
44	1,83333333
81	1,84090909
149	1,83950617
274	1,83892617
504	1,83941606
927	1,83928571
1705	1,83926645
3136	1,83929619
5768	1,83928571
10609	1,83928571
19513	1,8392874
35890	1,83928663
66012	1,83928671

Por ello, al número 1,839286…se le llama Constante Tribonacci.

Función generatriz

Todas las variantes de las sucesiones Tribonacci comparten los mismos coeficientes de recurrencia, y por tanto también el denominador de su función generatriz. La que estamos estudiando en esta entrada, de inicio 1, 1, 2, se genera con la siguiente:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2 - x^3}$$

Al igual que con otras sucesiones, la comprobaremos con PARI:

write("sucesion.txt",taylor((x)/(1-x-x^2-x^3),x,20))

Te escribirá en un archivo *sucesión.txt* su desarrollo (este archivo lo deberás tener vacío en la misma carpeta que PARI), y aparecerán como coeficientes los términos de la sucesión Tribonacci:

x + x^2 + 2*x^3 + 4*x^4 + 7*x^5 + 13*x^6 + 24*x^7 + 44*x^8 + 81*x^9 + 149*x^10 + 274*x^11 + 504*x^12 + 927*x^13 + 1705*x^14 + 3136*x^15 + 5768*x^16 + 10609*x^17 + 19513*x^18 + 35890*x^19 + O(x^20)

Una excursión por la hoja de cálculo

Podemos usar la versión matricial de la generación de estos números para recordar algunos detalles sobre hojas de cálculo.

Es elemental comprobar que las ternas de números consecutivos de Tribonacci. T(n), T(n+1), T(n+2) pueden engendrar matricialmente la terna siguiente T(n+1), T(n+2), T(n+3), mediante la siguiente fórmula matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T(n) \\ T(n+1) \\ T(n+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(n+1) \\ T(n+2) \\ T(n+3) \end{pmatrix}$$

Esta fórmula es adecuada para repasar las fórmulas matriciales de las hojas de cálculo. Comenzamos construyendo un esquema como el de la imagen:

	Matriz			Tres elementos		Tres elementos	
				a(n), a(n+1), a(n+2)		a(n+1), a(n+2), a(n+3)	
0	1	0		1		1	
0	0	1	×	1	=	3	
1	1	1		3		5	

Para efectuar el producto matrical deberemos usar la función MMULTI, con parámetros la primera matriz y la columna de la primera terna:

{=MMULT(D4:F6;H4:H6)}

Observa que como multiplicamos rangos de celdas, usamos el separador:

Para que la hoja entienda que se trata de una multiplicación matricial, cuando termines de escribir la fórmula, en lugar de terminar con INTRO, usaremos ***Ctrl+Mayúscula+INTRO***. La aparición de las llaves es la señal de que la fórmula ha sido introducida correctamente.

Una vez efectuado el cálculo sobre una terna, basta que copies el resultado como dato, usando **Copiar** y **Pegado especial** como valores, y proseguirán apareciendo ternas nuevas.

Uno de los autovalores de la matriz que hemos usado es la constante de Tribonacci, 1,839286…La razón es que el polinomio característico de la matriz es el mismo que el de la ecuación característica de la recurrencia, $\mathbf{x^3\text{-}x^2\text{-}x\text{-}1=0}$.

Curiosidades

En esta serie sobre sucesiones recurrentes solemos presentar en cada una de ellas propiedades curiosas, no todas las conocidas, que llenarían libros, sino las que más nos llamen la atención o se adapten mejor a las herramientas que usamos. Para la de Tribonacci presentaremos una propiedad combinatoria.

Particiones de un número en sumandos no mayores que 3

Los números de Tribonacci (salvo los iniciales) cumplen que T(N) coincide con las particiones de N-1 en sumandos que se pueden repetir, en cualquier orden y con los sumandos menores o iguales a 3. Por ejemplo, T(5)=7, que coincide con las particiones del número 4 en partes no superiores a 3:

Lo comprobamos con el listado obtenido con nuestra hoja no publicada "Cartesius":

	X1	X2	X3	X4
1	1	3		
2	2	2		
3	3	1		
4	1	1	2	
5	1	2	1	
6	2	1	1	
7	1	1	1	1
8				
9				

Observamos que resultan 7 particiones distintas.

Para T(4)=4 obtenemos el mismo resultado con particiones del número 3:

	X1	X2	X3	X4
1	3			
2	1	2		
3	2	1		
4	1	1	1	
5				

La razón de que esto funcione así es que cualquier partición de este tipo con N elementos ha resultado a adjuntar un 1 a las particiones de N-1, un 2 a las de N-2 y un 3 a las de N-3, con los que se cumple $\mathbf{x_n = x_{n-1}+x_{n-2}+x_{n-3}}$. Para que lo entiendas mejor hemos coloreado estos tres sumandos para el caso de T(6)=13:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
2	**3**							
3	**2**							
1	**1**	**3**				2	T(n-3)	
1	**2**	**2**				4	T(n-2)	
1	**3**	**1**				7	T(n-1)	
2	**1**	**2**			**Total**	**13**	T(n)	
2	**2**	**1**						
3	**1**	**1**						
1	**1**	**1**	**2**					
1	**1**	**2**	**1**					
1	**2**	**1**	**1**					
2	**1**	**1**	**1**					
1	**1**	**1**	**1**	**1**				

SUCESIÓN DE PADOVAN

En una entrada anterior estudiamos la sucesión de Perrin (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/11/sucesion-de-perrin.html). La de hoy, de Padovan, es muy parecida, por lo que se recomienda leer antes la entrada enlazada. Recordamos:

La sucesión de Perrin es recursiva de tercer orden homogénea, por lo que necesita tres valores iniciales y que X(n) dependa de los tres valores anteriores X(n-1), X(n-2) y X(n-3) mediante la relación

$\mathbf{x_n= A*x_{n-1}+B*x_{n-2}+C*x_{n-3}}$

En este caso particular sólo depende de los dos últimos, y no de X(n-1):

Condiciones iniciales: $\mathbf{x_0=3}$ $\mathbf{x_1=0}$ $\mathbf{x_2=2}$ Ecuación de recurrencia: $\mathbf{x_n=x_{n-2}+x_{n-3}}$

Pues bien, la sucesión de Padovan es similar, pero con distintos valores iniciales:

$\mathbf{x_0=1}$ $\mathbf{x_1=1}$ $\mathbf{x_2=1}$

Como con la anterior, podemos construirla con nuestra herramienta de hoja de cálculo adaptada a las sucesiones recurrentes de tercer orden.

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2)

Escribimos los coeficientes 0, 1,1 y los valores iniciales 1, 1, 1:

Recurrencias lineales de tercer orden					
Coeficientes					
A	0	**B**	1	**C**	1
Valores iniciales					
X0	1	**x1**	1	**x2**	1

Y obtenemos:

1
1
1
2
2
3
4
5
7
9
12
16
21
28
37
49
65
86
114
151

Son los números espirales de Padovan contenidos en http://oeis.org/A134816. Existen otras variantes de esta sucesión, pero nos dedicaremos en esta entrada a la que comienza con 1, 1, 1. Por el carácter de este blog, omitiremos propiedades gráficas, como la espiral de triángulos, que puedes consultar en otras páginas.

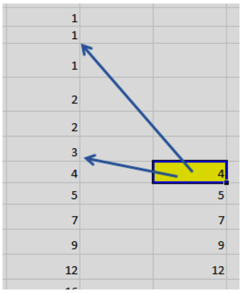
Relaciones recurrentes

Para abreviar a los términos de esta sucesión los identificaremos como P(n).

En muchas páginas web podrás encontrar otras relaciones recurrentes además de la de la definición, P(n)=P(n-2)+P(n-3). Aquí sólo comentaremos alguna dejando como ejercicio el análisis de las demás.

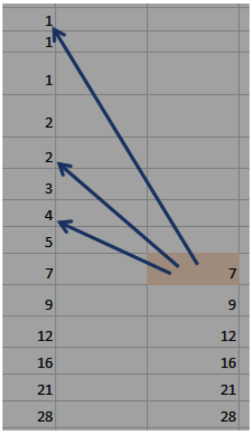
(1) P(n)=P(n-1)+P(n-5)

Se puede verificar por inducción: Se cumple en los primeros términos, como puedes comprobar con la misma hoja de cálculo:



Extensión a P(n+1)

P(n+1)=P(n-1)+P(n-2)=P(n-2)+P(n-6)+P(n-3)+P(n-7)=P(n)+P(n-4), luego se cumple la inducción completa.



(2) P(n)= P(n-2)+P(n-4)+P(n-8)Sólo veremos los primeros términos con hoja de cálculo y dejaremos la demostración por inducción como ejercicio.

Hay más relaciones de este tipo. Las tienes en http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Padovan

Una interesante es la que relaciona la sucesión de Perrin con la de Padovan:

Perrin(n)=P(n+1)+P(n-10)

Con nuestra hoja hemos construido este esquema para que compruebes que se cumple para los primeros términos. El justificarlo por inducción es fácil por compartir ambas sucesiones la misma fórmula de recurrencia.

Padovan	Perrin	PAV(n+1)+PAV(n-10)
1	3	
1	0	
1	2	
2	3	
2	2	
3	5	
4	5	
5	7	
7	10	
9	12	
12	17	17
16	22	22
21	29	29
28	39	39
37	51	51
49	68	68
65	90	90
86	119	119
114	158	158
151	209	209

Ecuación característica

La ecuación característica correspondiente será $x^3-x-1=0$, es decir, la misma que para la sucesión de Perrin.

Con el botón ***Resolver*** de esa hoja obtienes las tres soluciones de la ecuación, una real y dos complejas

Ecuación característica			Resolver	
1ª Raíz real	1,324718			
Discriminante	-1,26463			
	Dos raíces complejas			
Z1=	-0,6624	0,56228	Z2= -0,6624	-0,5623

La solución real 1,32471… es el ***número plástico*** ψ, que ya presentamos en el estudio de la sucesión de Perrin. También la sucesión de Padovan se acerca progresivamente a las potencias de este número, como puedes ver en este cálculo realizado con nuestra hoja:

2	1,7549
2	2,3247
3	3,0796
4	4,0796
5	5,4043
7	7,1592
9	9,4839
12	12,5635
16	16,6431
21	22,0474
28	29,2066
37	38,6905
49	51,2540
65	67,8972
86	89,9446
114	119,1512

Función generatriz

Usando procedimientos similares a los que explicamos para las recurrentes de segundo orden, se puede demostrar que la función generatriz es

$$F(x) = \frac{x + x^2}{1 - x^2 - x^3}$$

Puedes comprobar que esta es la F.G. adecuada efectuando este desarrollo en PARI

write("sucesion.txt",taylor((3-x^2)/(1-x^2-x^3),x,20))

Crea un archivo de texto "sucesión.txt" en la misma carpeta de PARI y verás cómo te reproduce la sucesión:

x + x^2 + x^3 + 2*x^4 + 2*x^5 + 3*x^6 + 4*x^7 + 5*x^8 + 7*x^9 + 9*x^10 + 12*x^11 + 16*x^12 + 21*x^13 + 28*x^14 + 37*x^15 + 49*x^16 + 65*x^17 + 86*x^18 + 114*x^19 + O(x^20)

Los coeficientes del polinomio reproducen la sucesión de Padovan, con el índice desfasado en 1 porque hemos comenzado con el valor 0.

Relación con cuestiones combinatorias

Todas las sucesiones recurrentes suelen tener relación con particiones y composiciones (particiones con orden), porque su generación a partir de elementos anteriores puede coincidir. En el caso de la sucesión de Padovan también existen esas relaciones. Veamos:

P(n) coincide con las composiciones de n+2 en sumandos 2 y 3

En efecto, P(0)=P(1)=P(2) valen 1, que son las formas de descomponer 2, 3 y 4 en sumandos ordenados 2 y 2. P(3)=2 porque 5=2+3=3+2. P(4)=2, ya que 6=3+3=2+2+2.

Con nuestra hoja Cartesius (aún no publicada) se pueden comprobar estos desarrollos. Por ejemplo, para el caso de 8, plantearíamos:

```
XRANGO=8
XT=2,3
SUMA=8
REPITE
```

Aunque no conozcas su sintaxis, basta explicarte que hemos pedido que desde 1 hasta 8, usando el conjunto {2,3} busque todas las sumas iguales a 8 con repetición.

Efectivamente, resultan 4=P(6)

X1	X2	X3	X4	X5
2	3	3		
3	2	3		
3	3	2		
2	2	2	2	

En general, cualquier suma correspondiente a N resultará de añadir un 2 a las composiciones de N-2 y un 3 a las de N-3, por lo que su generación es idéntica a la de la sucesión de Padovan. Tal como nos ocurrió con la sucesión de Narayana

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2015/01/sucesion-de-las-vacas-de-narayana.html), esta descomposición da lugar a la expresión de los números de Padovan como suma de números combinatorios. En http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence tienes uno de ellos:

$$\sum_{2m+n=k} \binom{m}{n} = P(k-2).$$

Así, por ejemplo, en el desarrollo para k=11 con Cartesius vemos clara la descomposición en números combinatorios (recuerda que las permutaciones con repetición y dos elementos equivalen a esos números)

X1	X2	X3	X4	X5
2	3	3	3	
3	2	3	3	
3	3	2	3	
3	3	3	2	
2	2	2	2	3
2	2	2	3	2
2	2	3	2	2
2	3	2	2	2
3	2	2	2	2

$$\binom{5}{4} + \binom{4}{3} = \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 9 = P(9) = P(11-2)$$

Para quienes apreciáis las técnicas de programación, insertamos esta función por si queréis implementarla en vuestra hoja de cálculo:

```
Public Function padovan(n)
Dim p, q, t, s, i, nn

 nn = n + 2: p = Int(nn / 2): q = nn - 2 * p: t = 0
While p >= q
s = 1: For i = 0 To q - 1: s = s * (p - i) / (q - i): Next i
'Calcula el número combinatorio
t = t + s 'Suma los números combinatorios
p = p - 1: q = q + 2
Wend
padovan = t
End Function
```

UNAS RECURRENCIAS MUY ÚTILES

Quienes usamos a menudo los números poligonales nos encontramos con esta relación de recurrencia de tercer orden:

$x_n= 3x_{n-1}-3x_{n-2}+x_{n-3}$

El origen de esta presencia es que se pueden generar con ella los números naturales y sus cuadrados:

Números naturales

Se pueden generar mediante

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_n= 3x_{n-1}-3x_{n-2}+x_{n-3}$

En efecto, aquí x_n es **n**, x_{n-1}, **n-1**, luego

$3(n-1)-3(n-2)+n-3=3n-3-3n+6+n-3=n$

Esto demuestra que la recurrencia con estos coeficientes es verdadera.

Constantes

Una constante K sometida a esa recurrencia sigue teniendo el valor de K: 3*K-3*K+K=K

Números cuadrados

En ellos también es válida esta recurrencia. Lo vemos:

$x_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1=x_n+2n+1$

$x_{n+2}=(n+2)^2=(n+1)^2+2(n+1)+1=x_{n+1}+2n+3$

Luego, despejando:

$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1}- x_n +2$

$x_{n+2} = 2x_{n+1}- x_n +2$

De igual forma

$x_{n+3} = 2x_{n+2}- x_{n+1} +2$

Restamos las dos igualdades y agrupamos:

$x_{n+3} - x_{n+2} = 2x_{n+2}- x_{n+1} +2 -2x_{n+1}+ x_n -2$

Despejando:

$x_{n+3} = 3x_{n+2} -3x_{n+1}+ x_n$

Con esto se demuestra la validez de la recurrencia. Por ejemplo:

$11^2=121=3*10^2-3*9^2+8^2=300-243+64=364-243=121$

También nos vale un desarrollo directo:

$(n+3)^2=3(n+2)^2-3(n+1)^2+n^2=3n^2+12n+12-3n^2-6n-3+n^2$

$n^2+6n+9=n^2+6n+9$

Identidad que demuestra la recurrencia.

Números oblongos

Siguen la fórmula $n(n+1)=n^2+n$, y al ser la recurrencia propuesta de tipo lineal, también será válida en esa suma de un cuadrado con un natural.

Lo podemos comprobar con los primeros oblongos: 2, 6, 12, 20, 30, 42, …Por ejemplo, 30=3*20-3*12+6=60-36+6=24+6=30

Números triangulares

Al tener un número triangular la fórmula $n(n+1)/2=(n^2+n)/2$, es la mitad de un oblongo, luego admitirá la misma recurrencia. Lo vemos con un ejemplo tomado de la sucesión de números triangulares:

1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21, 28 , 36 , 45 , 55, …

45=3*36-3*28+21=108-84+21=129-84=45

Polinomios de segundo grado

También se generarán de la misma forma. Lo vemos con $P(x)=2x^2-3x+2$:

P(1)=1, P(2)=4, P(3)=11, P(4)=22, P(5)=37, P(6)=56 y P(7)=79

Observamos que P(7)=3*56-3*37+22=168-111+22=190-111=79

Números poligonales

Todo número poligonal es suma de triangulares. Basta ver la imagen:

Esta descomposición hace válida la recurrencia en ellos. En mi publicación sobre estos número se incluye una demostración con la fórmula general, que es un polinomio de segundo grado sin término independiente: $P(n,k)=((k-2)n^2-(k-4)n)/2$

https://www.hojamat.es/publicaciones/poligonales.pdf

En esa publicación figuran otras recurrencias que a veces son más rápidas que la propuesta.

También siguen esta recurrencia los poligonales centrados, de fórmula $POLC(n,k)=(kn^2-kn+2)/2$, por ser también polinomio de segundo grado.

Números piramidales

Si a esta recurrencia que estamos estudiando le aplicamos la fórmula de la suma que se presentó anteriormente, nos permitirá encontrar una recurrencia para números piramidales, que son sumas de poligonales.

Tomamos a1=3, a2=-3 y a3=1 para aplicarlo a la fórmula de la suma

$s_{n+h+1}=(1+a_1)s_{n+h}+(a_2-a_1)\, s_{n+h-1}+ \ldots +(a_h-a_{h-1})\, s_{n+1}-a_h s_n$

$s_{n+4}=4s_{n+3}-6s_{n+2}+4s_{n+1}-s_n$

Lo aplicamos a los números piramidales pentagonales, 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405, 550, ...

550=4*405-6*288+4*196-126=550

PROLONGACIÓN DE UNA RECURRENCIA

En la confección de sucesiones, que es una de las tareas más frecuentes en este blog, aparecen con cierta frecuencia algunas de las que se sabe o sospecha que pueden generarse mediante una fórmula de recurrencia respecto a sus primeros términos. Así ocurre, por ejemplo, con los números poligonales, que ocupan una buena parte de nuestros estudios, o con aquellas cuestiones que se resuelven con la ecuación de Pell o similares (ecuaciones Pell-like).

Las ecuaciones de recurrencia más frecuentes en estos temas son las lineales, en las que existe una relación de este tipo entre un elemento y varios de sus anteriores. Las llamaremos homogéneas si no intervienen términos independientes. Comenzaremos por ellas.

Sistema de ecuaciones de una recurrencia

Si cada elemento depende de los anteriores, pongamos por ejemplo, de cuatro, y de forma lineal, se dará la siguiente situación:

$a(n)=c_1a(n-1)+c_2a(n-2)+c_3a(n-3)+c_4a(n-4)$

Si elegimos los ocho primeros términos de la sucesión podremos plantear (en el caso homogéneo)

$a(8)=c_1a(7)+c_2a(6)+c_3a(5)+c_4a(4)$

$a(7)=c_1a(6)+c_2a(5)+c_3a(4)+c_4a(3)$

$a(6)=c_1a(5)+c_2a(4)+c_3a(3)+c_4a(2)$

$a(5)=c_1a(4)+c_2a(3)+c_3a(2)+c_4a(1)$

Esto constituye un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas c_1, c_2, c_3, c_4, que, al resolverse, nos descubre la ecuación de recurrencia. Con los instrumentos de cálculo disponibles en la actualidad es una tarea fácil de sobrellevar.

Pongamos un ejemplo. Los números hexagonales se generan con una ecuación de recurrencia de orden 3. Para encontrarla, ya lo habrás descubierto, necesitamos el doble de elementos, en este caso 6. Buscamos cualquier listado de ellos y seleccionamos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66. Por comodidad, llamamos a los coeficientes A, B, C, y queda

66=45A+28B+15C

45=28A+15B+6C

28=15A+6B+C

Resolvemos el sistema y obtenemos A=3, B=-3, C=1, luego los números hexagonales se generan mediante H(n)=3H(n-1)-3H(n-2)+H(n-3). Puedes comprobarlo en la entrada correspondiente en este blog (https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/02/numeros-hexagonales-1.html)

Automatización del proceso

Desde hace años ofrezco en mi página web una calculadora matricial para Excel y Calc (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#matrices)

Esta herramienta es de propósito general, con varias opciones y posibilidad de programar operaciones. Para no confundir con excesivo material, la he adaptado al problema que nos ocupa, y he situado esa versión en la carpeta propia de este blog.

http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm

En el caso de los hexagonales marcamos como orden 3, y escribimos en la fila correspondiente los primeros términos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66.

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	6	15	28	45	66
1,703125	-2,34375	0,890625				1
-2,34375	2,8125	-0,96875				-3

Después pulsamos en el botón “Homogénea” y se construirá el sistema de ecuaciones correspondiente:

Sucesión	1	6	15	28	45	66
1	6	15				28
6	15	28				45
15	28	45				66

Finalmente, pulsamos el botón “Resolver” y obtendremos los coeficientes:

No homogénea	Resolver	
45	66	91
	1	
	-3	
	3	

Como es una adaptación de otra herramienta, **se aconseja no tocar nada más de la hoja**. Si todo se viene abajo, volveremos a iniciar Excel.

Caso no homogéneo

Hay recurrencias lineales que poseen un término independiente. Estos mismos números hexagonales del ejemplo admiten otra recursión de tercer orden con término independiente 4.

$a(3)=K+c_1a(1)+c_2a(2)$
$a(4)=K+c_1a(2)+c_2a(3)$
$a(5)=K+c_1a(3)+c_2a(4)$

Resolvemos y nos resultan los coeficientes como en el caso homogéneo.

En nuestra hoja de cálculo basta pulsar sobre el botón “No homogéneo” y después sobre “Resolver”. En el caso de los hexagonales:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	6	15	28	45	66
1	1	6				15
1	6	15				28
1	15	28				45

No se debe olvidar rellenar el Orden, en este caso, 3. La solución, después de resolver, queda:

4
-1
2

La interpretamos como a(n)=2a(n-1)-a(n-2)+4. En efecto:

15=2*6-1+4

28=2*15-6+4

45=2*28-15+4

Otros ejemplos

La recurrencia homogénea que hemos descubierto para los números hexagonales es una propiedad general de todos los poligonales, en los que P(n)=3P(n-1)-P(n-2)+P(n-3). Lo vemos en los octogonales: 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936,…

Aquí se inserta la captura de pantalla en la que comprobamos que los coeficientes:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	8	21	40	65	96
1,087963	-1,481481	0,560185				1
-1,481481	1,740741	-0,592593				-3
0,560185	-0,592593	0,199074				3

Puedes probar con otros tipos de poligonales, como estos cuadrados centrados, 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145,…y te resultarán los mismos coeficientes 3, -3 y 1.

Triangulares cuadrados

Los triangulares que también son cuadrados (los hemos estudiado en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html)

también admiten una recurrencia homogénea de tercer orden. Tomamos su listado y lo volcamos en nuestra hoja de cálculo: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, 63955431761796,

2172602007770041, …y resulta:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	36	1225	41616	1413721	48024900
1155,986	-1189,5	34,01389				1
-1189,5	1207	-34,5				-35
34,01389	-34,5	0,986111				35

Efectivamente, $TC(n)=35TC(n-1)-35TC(n-2)+TC(n-3)$, tal como hemos comprobado con los siguientes términos.

Así podríamos recorrer más ejemplos. Como esto es una presentación de una herramienta, con lo explicado basta.

SUCESIONES CURIOSAS

SUCESIÓN DE RECAMÁN

Estudiamos hoy una original sucesión que Bernardo Recamán Santos envió a N. J. A. Sloane en 1991 para su colección, y que desde entonces ha originado múltiples desarrollos, incluso musicales

(ver https://www.youtube.com/watch?v=h3qEigSSuF0).

Su definición es la siguiente (versión con a_1=1):

a_1=1

$a_n = a_{n-1} - n$, si este valor es positivo y no figura ya en la sucesión

$a_n = a_{n-1} + n$, en caso contrario.

Sus primeros términos son: 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, 23, 9, 24, 8, 25, 43, 62, 42, 63, 41, 18, 42, 17, 43, 16, 44, 15, 45, 14, 46, 79, 113, 78, 114, 77, 39, 78, 38, 79, 37, 80, 36, 81, 35, 82, 34, 83, 33, 84, 32, 85, 31, 86, 30, 87, 29, 88, 28, 89, 27, 90, 26, 91, 157,… (existe otra versión que comienza en 0, idéntica a esta en todo lo demás http://oeis.org/A005132)

El punto clave, y que nos permitirá estudiar su programación con hoja de cálculo es el de no figura ya en la sucesión, pues esto obliga a mantener en memoria un registro de los valores anteriores ¿Cómo solucionarlo en una hoja de cálculo? Intentaremos varias posibilidades.

Desarrollo de la sucesión mediante celdas

Las celdas de una hoja sirven de memoria en cualquier proceso, por lo que comenzaremos el estudio por ahí. En la imagen verás la formación de la sucesión de Recaman en la columna E, junto a otra auxiliar D que hemos añadido por simple comodidad:

D	E
	1
-1	**3**
0	**6**
2	**2**
-3	**7**
1	**13**
6	**20**
12	**12**
3	**21**
11	**11**
0	**22**
10	**10**
-3	**23**
9	**9**
-6	**24**
8	**8**
-9	**25**

La columna D contiene, simplemente, la diferencia $a_{n-1} - n$, que se obtiene con las expresiones =E2-FILA(),=E3-FILA(),=E4-FILA(), …aprovechando la función FILA, que aquí representará el valor de n en la definición. Por eso hemos creado la sucesión a partir de la primera fila. Si ese valor en la columna D es positivo y no ha salido ya, será el valor del siguiente término de la sucesión. Por eso no extrañará que algunos de estos valores figuren en la columna E que estudiaremos a continuación.

En dicha columna E hemos construido una fórmula un poco compleja. Esta es la correspondiente a la celda E3:

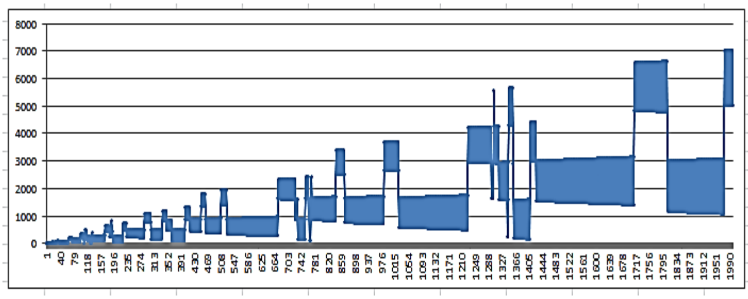
=SI(Y(D3>0;CONTAR.SI(E$1:E2;D3)=0);D3;FILA()+E2)

Recuerda que D3 contiene $a_{n-1} – n$, que en este caso sería $a_2 – 2$.

La fórmula comienza con un SI, puesto que la definición se basa en una alternativa. Después una Y, ya que existen dos condiciones: una que D3 sea positiva, y otra que no figure ya en la columna E. La primera se resuelve con D3>0 y la segunda con CONTAR.SI(E$1:E2;D3)=0. Usamos CONTAR.SI para ver si D3 ha salido ya. Si el CONTAR da cero, es que no ha salido, y se admite. Observa que se busca desde la primera celda E$1 (referencia absoluta) hasta la anterior E2.

Si ambas condiciones se cumplen, la función SI devuelve D3, como era de esperar, y, en caso contrario, FILA()+E2, es decir, $a_{n-1} +n$.

Rellenando esta fórmula hacia abajo obtendremos la sucesión hasta el término que deseemos. Lo hemos efectuado hasta 2000 términos, para crear un gráfico similar al que figura en las publicaciones que tratan esta sucesión, en este caso de tipo lineal:

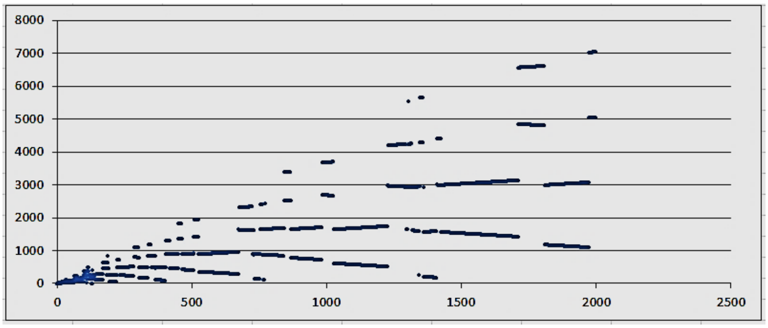


Llaman la atención en el mismo las fuertes oscilaciones que se producen en algunos intervalos, en los que los términos sufren incrementos alternativamente positivos y negativos, como en este:

1108	1108
-849	3065
1107	1107
-852	3066
1106	1106
-855	3067
1105	1105
-858	3068
1104	1104
-861	3069
1103	1103
-864	3070
1102	1102
-867	3071
1101	1101
-870	3072
1100	1100

En este tramo, las diferencias positivas decrecen de uno en uno y las negativas de tres en tres.

Si hubiésemos usado un gráfico de dispersión entre n y a_n obtendríamos



Pertenencia de todos los enteros positivos

N. J. A. Sloane conjeturó que cualquier entero positivo terminará apareciendo en la sucesión, y de hecho, estas son las posiciones en las que figuran los primeros términos: 1, 4, 2, 131, 129, 3, 5, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 31, 29, 27, 25, 23, 99734, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 64, 62, 60, 58, 56, … https://oeis.org/A057167

Nosotros podemos construir esta sucesión con la función COINCIDIR. Observa la imagen:

E	F	G
1	1	1
3	2	4
6	3	2
2	4	131
7	5	129
13	6	3
20	7	5
12	8	16
21	9	14
11	10	12
22	11	10
10	12	8
23	13	6
9	14	31
24	15	29
8	16	27
25	17	25
43	18	23
62	19	#N/A
42	20	7

Se han reproducido los valores de las posiciones de 1, 2, 3, … salvo la del 19, que al ser 99734 excedía nuestro ámbito de estudio. Como uno de los objetivos de este documento es el aprendizaje de las técnicas de la hoja de cálculo, reproducimos la fórmula usada. La columna F contiene los primeros números naturales, y recuerda que E contiene la sucesión. Bastará, pues, usar la función COINCIDIR, para ver si el número dado figura o no en la sucesión, y en qué posición, que es lo que nos devuelve esa función COINCIDIR. Por ejemplo, para el 5 usamos esta fórmula:

=COINCIDIR(F5;E$1:E$2000;0).

En ella F5 es el valor 5 y E$1:E$2000 el rango de búsqueda (hemos llegado a 2000 elementos). El 0 final indica que buscamos valores exactos, y la función nos devuelve 129, que es la posición en la que aparece el 5, como puedes ver en este recorte de la tabla:

134	128
5	129
135	130
4	131
136	132

En ella también aparece el 131, número de orden del 4.

Si hubiéramos creado una tabla de muchos más términos terminaríamos por encontrar en ella todos los números naturales. Eso es lo que conjetura Sloane.

Función RECAMAN(n)

El desarrollo anterior puede ser más o menos interesante, pero, como hemos procedido en casos parecidos, sería muy útil obtener un valor de la sucesión por cálculo directo (en realidad, en su interior sería recursivo), de forma que dado un número de orden, existiera una función que nos devolviera el término correspondiente de la sucesión de Recaman. Esto choca con el mismo inconveniente que en el caso del cálculo progresivo, y es el almacenamiento de los valores anteriores. Esa función debería contener un vector o tabla que memorizara dichos valores. En el Basic de las hojas de cálculo no existe un dimensionamiento dinámico de un vector en función de n, por lo que no sería práctico. Por ello hemos pensado almacenar los valores previos en un string o cadena de caracteres, que crece dinámicamente sin problemas.

La función cuya codificación presentamos ahora almacena los valores previos de la sucesión en el string prev$, pero para que no se den ambigüedades, rodea cada número de dos almohadillas #, es decir, almacenamos un 12 como #12#, para evitar que se confunda con 112, que sería #112# en nuestro sistema. Es un truco que nos evitará muchos problemas. También deberemos suprimir el espacio en blanco que las hojas añaden a los números, pues, si no, el 12 se podría codificar como # 12# y no ser detectado. Este cambio lo efectuará la función AJUSTA, que es la siguiente (quien no tenga interés en esto puede pasar a la función principal):

Public Function ajusta(a$) As String
If Mid(a$, 1, 1) = " " Then a$ = Right$(a$, Len(a$) - 1)
ajusta = "#" + a$ + "#"
End Function

Disponiendo de esta función auxiliar ya podemos describir la función RECAMAN(n). Es esta:

Public Function recaman(n)
Dim prev$, sd$
Dim d, ant, reca, i

prev$ = " #1# "
ant = 1 ‘Inicia los valores de la sucesión de Recaman
If n = 1 Then
reca = 1 ‘Caso en el que n=1
Else
For i = 2 To n
d = ant – i ‘Calculamos la diferencia a_{n-1} - n
If d > 0 Then
sd$ = ajusta(Str$(d)) ‘Si la diferencia es positiva, vemos si ya figura en la sucesión
If InStr(prev$, sd$) = 0 Then ‘Usamos InStr para ver si la diferencia figura en el string
reca = d ‘Si no está, la admitimos como nuevo valor

Else
reca = ant + i ‘Si ya figura en la sucesión, usamos la definición alternativa
End If
Else
reca = ant + i ‘Si es negativa, también usamos la definición alternativa
End If
sd$ = Str$(reca) ‘Incorporamos el nuevo término al string que los recuerda
prev = prev + ajusta(sd$)
ant = reca
Next i
End If
recaman = reca
End Function

Copia, si así lo deseas, estas dos funciones en tu hoja de cálculo, y así podrás jugar un poco con esta sucesión. Por ejemplo, puedes descubrir estas curiosidades o ampliarlas:

Elementos repetidos

El primer caso de términos repetidos en la sucesión de Recaman es el 42, que aparece en el índice 20 y en el 24: recaman(20)=recaman(24)=42. Dado un término, no es difícil encontrar el siguiente con el mismo valor. Hemos señalado que el primer repetido es el 42, en los lugares 20 y 24 Dado otro valor, ¿existirá otro con el mismo valor? ¿cuál será la siguiente aparición?

Esta cuestión y otras parecidas podemos resolverla con esta función:

```
Public Function sig_recaman(indi)
Dim v, j, v1

v = recaman(indi)
j = indi
v1 = 0
While v <> v1
j = j + 1
v1 = recaman(j)
Wend
sig_recaman = j
End Function
```

En ella, dado un número de orden, se busca la siguiente aparición del término correspondiente a ese número de orden. Se le incluye un tope de 10^4 para evitar el bloqueo de la función. Como esta última situación es la más frecuente, sólo destacaremos los casos contenidos en http://oeis.org/A064284

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1,…

En ellos se descubre que repeticiones hay pocas, y casi siempre de sólo dos elementos. Con nuestra función sig_recaman se pueden comprobar algunas:

			Recaman
Término inicial		20	42
Siguiente		24	42

Recaman(20)=recaman(24)=42

Otros casos tardan mucho en aparecer y no merece la pena seguir por este camino.

Términos iguales a su número de orden

También existen muy pocos. Se puede plantear que recaman(n)=n y ver qué pasa. Sólo encontraremos recaman(1)=1, recaman(1520)=1520,

recaman(9317)=9317 y alguno más. Los demás, si existen, sobrepasan nuestra capacidad de cálculo, ya que pertenecerían a esta sucesión

http://oeis.org/A064568

3, 11, 21, 39, 76, 248, 844, 1520, 2752, 9317, 17223, 31221, 57071, 99741, 589932, 58056875, en los que el término es múltiplo del número de orden.

El mismo caso, pero con una unidad de diferencia

¿Pueden ser n y recaman(n) número consecutivos en cualquiera de los dos sentidos?

Podemos plantear la condición ABS(RECAMAN(N)-N)=1 y hemos encontrado recaman(2)=3 y recaman(10)=11. Entre los números menores que 3000 no hay más.

A continuación incluimos la tabla de los números N menores que 1000 cuya diferencia con RECAMAN(N) es menor que 10

N	RECAMAN(N)
1	1
2	3
3	6
4	2
5	7
6	13
8	12
10	11
12	10
14	9
15	24
16	8
17	25
23	18
25	17
42	33
185	181
187	180

Una vez que tienes a tu disposición la función RECAMAN puedes emprender tus propias búsquedas.

SUCESIÓN DE GOLOMB

Ya estudiamos en 2010 conjuntos relacionados con este matemático

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Hoy lo hacemos con una de sus sucesiones. Se trata de esta:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, …

http://oeis.org/A001462

También se la conoce como sucesión de Silverman. Como ves, es no-decreciente.

Tiene una definición muy curiosa, y es que a(n) representa el número de veces que aparece n en la sucesión, si además definimos a(1)=1 e implícitamente aceptamos que cada valor de n ocupa el mínimo número de orden posible.

Lo verás mejor si acompañamos cada valor con su índice:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																
a(n)	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	10

La imagen de 1 es 1 por definición. La de 2 es 2 porque en la sucesión figura ese valor dos veces. También el 3 aparece repetido, por lo que a(3)=2. A(4)=3 debido a que aparecen tres cuatros, y así con todos.

Este es un ejemplo muy elegante de autorreferencia, pues se define un objeto como si ya estuviera construido, pero sólo lo podemos formar si seguimos la definición.

Si aceptamos la condición de que cada valor ocupe el primer número de orden que esté libre, y que cada nueva imagen es la menor que cumple a(n)>=a(n-1), esta sucesión es única. En efecto, nos ponemos a razonar:

A(1)=1 por definición, luego sólo existirá un 1 en la sucesión, por lo que la imagen de 2 no podrá ser 1. Según las condiciones, ha de ser 2, luego en la sucesión deberá haber un par de 2. Como hemos quedado en que se ocupan los menores números de orden, deberá quedar:

1	2	3
1	2	2

Esto significa que a(3)=2, luego también repetiremos el 3 dos veces:

1	2	3	4	5
1	2	2	3	3

Obligamos así a que el 4 y el 5 figuren tres veces:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5

Ya podrás seguir tú el razonamiento y completar la sucesión, que con las condiciones impuestas será única.

¿Lo podría conseguir una hoja de cálculo? La respuesta es afirmativa, y el algoritmo no es muy complejo. Necesitamos dos punteros, indi1, que recorrerá los valores de n, e indi2 que llevará la cuenta de los lugares que van quedando libres en la sucesión. Con indi1 se leen los valores, y con indi2 se escriben. Para evitar celdas vacías en los primeros valores, se rellenan el 1 y el 2. Quedará así con el Basic de las hojas:

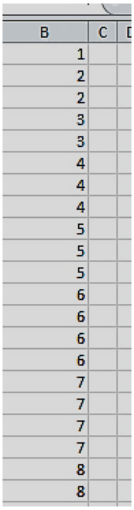
Sub golomb()
Dim indi1, indi2, i, j, v

indi1 = 2 ‘El primer valor que se lee es el 2, en la celda (2,2)
indi2 = 2 ‘El primero que se escribe también es el 2
Cells(1, 2).Value = 1 ‘Rellenamos los dos primeros valores en las celdas (1,2) y (2,2)
Cells(2, 2).Value = 2

For i = 1 To 12 ‘Tomamos 12 valores, pero podían ser muchos más
v = Cells(indi1, 2).Value ‘Leemos el valor indicado por indi1 (que también es fila en la hoja)
For j = 1 To v ‘Escribimos tantos valores nuevos como indique v
Cells(indi2, 2).Value = indi1 ‘Todos los valores serán iguales a indi1

indi2 = indi2 + 1 ‘Avanza la escritura
Next j
indi1 = indi1 + 1 ‘Avanza la lectura
Next i
End Sub

Con esta subrutina se generará la sucesión de Golomb en la columna 2 de una hoja de cálculo:



B	C	D
1		
2		
2		
3		
3		
4		
4		
4		
5		
5		
5		
6		
6		
6		
6		
7		
7		
7		
7		
8		
8		

Para mayor claridad hemos copiado los resultados en varias columnas, manualmente. Observarás que se reproducen fielmente los valores deseados.

B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			7			10			13
2			7			11			13
2			7			11			
3			8			11			
3			8			11			
4			8			11			
4			8			12			
4			9			12			
5			9			12			
5			9			12			
5			9			12			
6			9			12			
6			10			13			
6			10			13			
6			10			13			
7			10			13			

La forma de generación de esta sucesión garantiza que a(n)<=n, ya que los valores de los números naturales aparecen “con retraso”, y cuando aparece el valor, el índice ha crecido más que él. El retraso se puede medir con la diferencia n-a(n):

N	N-A(N)
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	2
7	3
8	4
9	4
10	5
11	6
12	6
13	7
14	8
15	9
16	9
17	10

Vemos que los retrasos a partir de 3 son todos positivos y crecientes.

Una propiedad elemental, pero que hay que pensar en ella un poco, es que las sumas parciales de esta sucesión coinciden con el índice de la última aparición en la sucesión del número de sumandos. Más claro: si sumo tres términos, 1+2+2=5, obtengo que la última aparición del 3 ocurrirá en el término 5. Esto es por la propia definición: el 1 aparece una vez, el 2 dos y el 3 otras dos, luego el último 3 aparecerá en el lugar 5.

La sucesión de sumas parciales es

1, 3, 5, 8, 11, 15, 19, 23, 28, 33, 38, 44, 50, 56, 62, 69, 76, 83, 90, 98, 106, 114, 122, 131, 140, 149, 158, 167, 177, 187, … (http://oeis.org/A001463) y coincide con el lugar de la última aparición de su número de orden. Así, si el quinto término es 11, ahí ocurrirá la última aparición del 5.

Según esto, si llamamos F(n) a los términos de la sucesión de Golomb y G(n) a sus sumas parciales, se cumplirá (estúdialo bien) que

F(G(n)) = n

Fórmula recurrente

Colin Mallows ha ideado una recurrencia muy atractiva para evaluar F(n):

F(1) = 1; F(n+1) = 1 + F(n+1-F(F(n))).

En hoja de cálculo las recurrencias son posibles, pero si se agota la pila de datos se puede bloquear el cálculo. Lo hemos intentado y funciona bien para los primeros términos, pero no va mucho más allá. En Basic sería

Public Function a(n)
If n = 1 Then
a = 1
Else
a = 1 + a(n - a(a(n - 1)))
End If
End Function

Con ella hemos formado esta tabla

N	A(n)
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	4
8	4
9	5
10	5
11	5
12	6
13	6
14	6

En PARI también funciona la recurrencia, pero no merece la pena porque se va ralentizando para números grandes:

```
a(n)=if(n==1,1,1+a(n-a(a(n-1))))
{for(i=1,30,print1(a(i),", "))}
```

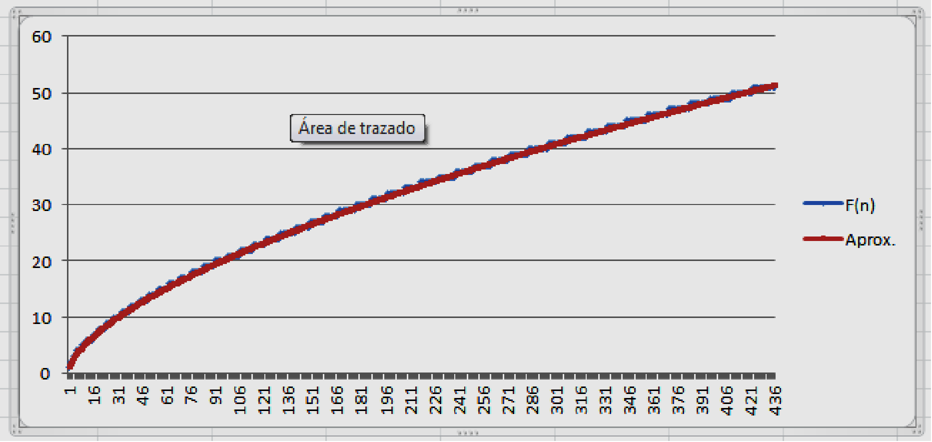
```
? \r ini.txt
%1 = (n)->if(n==1,1,1+a(n-a(a(n-1))))
1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9,
 9, 10, 10,
?
```

Aproximación asintótica

Por lo que hemos leído, no ha sido muy fácil llegar a esta expresión:

$$F(n) = \emptyset^{2-\emptyset} n^{\emptyset-1}$$

La comprobamos gráficamente



Se ve que son prácticamente indistinguibles.

NÚMEROS BELGAS

Estos números han sido introducidos por Eric Angelini y publicados en el año 2005 en http://oeis.org/A106039. Hay varios tipos, por lo que comenzaremos con los 0-Belgas. Estos números tienen la propiedad de que si a partir del número 0 vamos sumando reiteradamente las cifras (por orden) del número dado, se forma una sucesión que contiene a ese número. Por ejemplo, el 18 es 0-belga, porque a partir del 0 vamos a ir sumando sucesivamente 1, 8, 1, 8,…hasta llegar o sobrepasar el 18: 0, 1, 9, 10, 18, resultando que el mismo 18 es término de la sucesión. Sin embargo, el 19 no lo es, porque se forma la sucesión 0, 1, 10, 11, 20, 21, 30, …al ir sumando sucesivamente 1, 9, 1, 9, … y el mismo 19 es sobrepasado sin pertenecer a la sucesión. Se llaman 0-belgas porque la sucesión la comenzamos en 0, y los primeros son estos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 36, 39, … http://oeis.org/A106039

Si un número posee 3, 4 o más cifras, estas se irán también sumando de forma sucesiva y ordenada.

Llamaremos n-belgas a aquellos números que pertenecen a la sucesión formada al sumar cifras, pero comenzando en el número n, siendo n menor que el número dado. Así, estos son los 1-belgas:

1, 10, 11, 13, 16, 17, 21, 23, 41, 43, 56, 58, 74, 81, 91, 97, 100, 101, 106, 110, …

http://oeis.org/A106439

Por ejemplo, el 23, comenzando en 1, genera con las cifras 2 y 3 la sucesión 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, …a la que él mismo pertenece.

Se han publicado también los 2-belgas (A106518), los 3-belgas (A106596) y otros.

Función ESBELGA

Dado un número cualquiera, es posible saber si es 0-belga, 1-belga o de rango superior. Podemos idear una función con dos parámetros, uno, el número dado, y otro, el tipo. Como el objetivo de esta entrada es experimentar y descubrir curiosidades, daremos dos versiones de esta función, una un poco larga, antes de reflexionar sobre la cuestión, y otra simplificada.

En primer lugar, pensamos en lo obvio:

- Deberemos extraer las cifras del número
- Después las iremos sumando ordenadamente a partir del número tipo

- Proseguimos hasta llegar o sobrepasar el presunto número belga
- Si un término de la sucesión coincide con el número dado, es que sí es belga.

Algo así, en el Basic VBA:

Function esbelga(n, t) ‘Los parámetros son el número y el tipo
Dim c(10) ‘Se reserva un vector para almacenar hasta diez cifras (se puede ampliar)
Dim i, nu, a, b, m, p
Dim es As Boolean
‘En primer lugar se extraen las cifras y se almacenan
i = 0: m = n
While m > 0
p = m - 10 * Int(m / 10)
i = i + 1
c(i) = p ‘memorias que guardan las cifras
m = Int(m / 10)
Wend
nu = i

‘Iniciamos la prueba para ver si es belga
es = False
i = 1: a = t ‘La variable a se inicia en el tipo
While a < n ‘Creamos una sucesión hasta n
m = i Mod nu: If m = 0 Then m = nu

a = a + c(nu - m + 1) ‘Se van sumando las cifras a la variable **a**
i = i + 1
If a = n Then es = True ‘Si la sucesión coincide con n, es belga
Wend
esbelga = es
End Function

Esta función resulta lenta para valores grandes de n, ya que contiene demasiados ciclos de suma de cifras. Sería más práctico eliminar todo esos ciclos dividiendo de forma entera n-t (siendo t el tipo de belga) entre la suma de sus cifras. Para números pequeños no se advierte diferencia en la rapidez del algoritmo, pero siempre debemos intentar simplificar. También se puede usar la función MOD para acelerar la extracción de cifras. Quedaría así:

Function esbelga(n, t) As Boolean
Dim c(10)
Dim i, nu, a, m, p, s
Dim es As Boolean

i = 0: m = n: s = 0
While m > 0
p = m Mod 10
i = i + 1

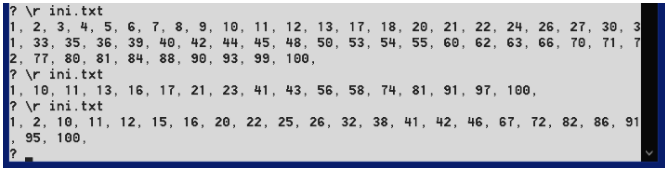
c(i) = p: s = s + p ‘Extracción de cifras en orden inverso
m = Int(m / 10)
Wend
nu = i
a = (n - t) Mod s ‘Se eliminan los ciclos de suma de cifras
i = 1
If a = 0 Then ‘Si el número es múltiplo de la suma de cifras, es belga
es = True
Else
es = False
For i = 1 To un ‘Se eliminan cifras de la suma para ir probando
If Abs(a - s) < 1 Then es = True ‘Debería escribirse a=s, pero así eliminamos problemas de coma flotante
If Not es Then s = s - c(i)
Next i
End If
esbelga = es
End Function

Por si deseas experimentar, esta es la versión de la función para PARI:

esbelga(n,p)={s=0;k=0;x=n;while(x>0,s+=x%10;x=(x-x%10)/10;k++);
r=(n-p)%s;t=s;x=n;e=0;for(j=0,k,if(r==t,e=1);t-=x%10;x=(x-x%10)/10;);

return(e);}

En la imagen se han generado con esta función los belgas de tipo 0, 1 y 2:



Algunas propiedades

Esta idea de eliminar previamente todos los ciclos de suma de cifras permite afirmar algo más:

Si un número es divisible entre la suma de sus cifras, será 0-belga.

En efecto, al sumar n ciclos de suma de cifras llegamos a n sin tener que recorrer la sucesión. Estos números son los llamados Números Harshad o de Niven: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, … http://oeis.org/A005349

Aplícale a cualquiera de ellos la función ESBELGA con parámetro 0 y deberá devolverte siempre VERDADERO.

El número de k-belgas, para cualquier valor de k, es infinito

Bastará sumar a k todos los múltiplos de la suma de cifras de cualquier otro número.

Todo número es k-belga para algún valor de k

Porque k puede ser el resto de dividir n entre la suma de sus cifras.

Números autobelgas

Puede darse la casualidad de que un número que comienza por la cifra k, sea también k_belga. Por ejemplo, el 25 tiene como primera cifra el 2, y 2-belga.

Esto no pasa de ser un divertimento, como todo el tema, pero nos permite crear una función:

Function autobelga(n)
Dim c, l

l = Len(Str$(n)) – 1 ‘Extrae el número de cifras
If l = 1 Then c = n Else c = Int(n / 10 ^ (l - 1)) ’Extrae la oprimera cifra
If esbelga(n, c) Then autobelga = True Else autobelga = False ‘Comprueba si es belga
End Function

Con ella es fácil crear listados de autobelgas. En la imagen se han listado los comprendidos entre 10 y 30:

10
11
13
16
17
20
22
25
26
30

Están publicados en http://oeis.org/A107062

Estos números se llaman autobelgas de primer tipo. Hay otros de segundo, en los que además de coincidir la primera cifra con el tipo, también lo hace la segunda con la primera cifra del segundo término. No merece el tema tanta complicación. Te dejamos que busques información y experimentes.

SUCESIÓN DE MIAN-CHOWLA

Esta sucesión se define por recurrencia de dos formas equivalentes:

(a) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las sumas a(i)+a(j) con i, j ≤n son distintas.

(b) a(1) = 1, a(n) es el menor número mayor que a(n-1) tal que todas las diferencias a(i)-a(j) con i,j≤n i>j son distintas.

Aquí trabajaremos con la primera.

Pertenece al rango de problemas y conjuntos de Sidon, matemático que estudió las cuestiones sobre sumas o diferencias todas distintas, Puedes leer nuestra entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/03/jugamos-con-sidon-y-golomb.html

Los primeros elementos son 1, 2 , 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, ... http://oeis.org/A005282

Comprobemos la definición con el 8: Los términos anteriores (1, 2, 4) producen las siguientes sumas 2, 3, 4, 5, 6, 8. Deberíamos ahora probar con el siguiente número, el 5, pero este produce la suma 1+5=6, que ya está en la lista, luego no es válido. Probamos el 6, y la suma 2+6=8 lo invalida. El 7 tampoco pertenece a la sucesión, ya que 1+7=8 pertenece a la lista de sumas. Probamos el 8, que produce las sumas 9, 10 y 12, no incluidas en la lista, luego el 8 es válido y se incorpora a la lista.

Generación con hoja de cálculo

Para generar esta sucesión necesitamos definir una matriz en la que almacenar las distintas sumas que hay que considerar. Se puede aprovechar el hecho de que una vez calculadas las sumas para a(n-1), se pueden usar también para a(n), con lo que en cada iteración aparecerán n sumas nuevas. Esto nos puede llevar a usar una columna de hoja de cálculo como matriz que almacene las sumas previas a cada elemento. Así lo hemos implementado, como puedes ver en la imagen (más adelante explicaremos cómo conseguimos que aparezcan):

Lista de sumas	Lista de elementos
2	1
3	2
4	4
5	8
6	
8	
9	
10	
12	
16	

En la columna de la izquierda hemos ido acumulando sumas, y en la de la derecha, elementos de la sucesión. Así, la suma 2 pertenece al elemento 1. Al incorporar un nuevo elemento, en este caso el 2, se incorporan las sumas 3 y 4. Con el elemento 4, las sumas 5, 6 y 8, y por último, con el 8, las restantes 9, 10, 12 y 16.

¿Cómo conseguimos la aparición automática de elementos y sumas nuevas? Hemos diseñado un botón que en cada pulsación incorpora un elemento nuevo en la columna (o matriz) de elementos y las correspondientes sumas en la columna de la izquierda.

La idea es esta:

Comenzamos con a(1)=1 s(1)=1

Para cada posible elemento nuevo, ensayamos en primer lugar el valor a(n-1)+1. Si ese valor produce sumas distintas a las ya existentes, lo aceptamos e incorporamos a la lista. En caso contrario, probamos con a(n-1)+2, a(n-1)+3,…hasta que lleguemos a un número que produzca un conjunto de sumas todas distintas.

Si deseas practicar con ese botón, puedes descargarte la hoja alojada en esta dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/teoria/apunarit.htm#mian

Si te gusta la programación, sigue esta rutina en VBA, contenida en la hoja enlazada:

```
Sub nuevo()
Dim sumas, elem, x, x1, i, j, x0, s
Dim vale, dasuma As Boolean

sumas = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(7, 4).Value
'Lee los primeros elementos
elem = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(7, 7).Value
x1 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + elem, 7).Value

vale = False
x = x1 + 1
```

While Not vale ‘Se recorre un bucle mientras no aparezcan sumas distintas

dasuma = False ’Esta variable controla si una suma se repite

i = 1

While i <= elem And Not dasuma ‘Bucle de búsqueda de sumas no repetidas

x0 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + i, 7).Value

j = 1

While j <= sumas And Not dasuma

s = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + j, 4).Value

If x1 + x0 = s Then dasuma = True ‘Una suma se ha repetido, y se rechaza el nuevo elemento

j = j + 1

Wend

i = i + 1

Wend

If dasuma Then

x1 = x1 + 1

Else

vale = True

elem = elem + 1 ‘Se ha encontrado un elemento válido y se incorpora a la columna

ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + elem, 7).Value = x1

For j = 1 To elem ‘Se incorporan las sumas nuevas

x0 = ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + j, 7).Value

```
ActiveWorkbook.Sheets(3).Cells(8 + sumas + j, 4).Value = x1 + x0
Next j
End If
Wend
End Sub
```

Hemos aprovechado la estructura de la hoja de cálculo para no tener que definir matrices o vectores de datos.

Curiosidades sobre esta sucesión

En la hoja arriba enlazada hemos copiado los primeros términos de la sucesión en la hoja “Propiedades”. Como en OEIS sólo figuran 50 elementos y algunas curiosidades implican muchos términos, hemos adaptado el algoritmo anterior para convertirlo en una función MIAN(N), tal que dado el número de términos, devuelva una cadena de caracteres (string) con los primeros términos de la sucesión de Mian-Chowla. Después, con la técnica de “Texto en columna” se pueden organizar en fila o columna. Hay que advertir que según el número de términos, la función puede ser lenta. Al ser este algoritmo muy parecido, remitimos al código VBA de la hoja enlazada.

Número de términos	7
Sucesión	1 2 4 8 13 21 31 45

Con esta lista de la hoja “Propiedades” podemos comprobar algunas de las afirmaciones que se han hecho sobre esta sucesión. Por ejemplo:

El límite de la suma de los inversos de esta sucesión está entre 2.158435 y 2.158677

Creamos una columna paralela a la lista que contenga los inversos, y al lado otra que recoja la sumas parciales. Con los términos que hemos identificado, la lista termina así:

80309	1,2452E-05	2,157350043
83179	1,2022E-05	2,157362066
84345	1,1856E-05	2,157373922

Como vemos, se queda a una milésima aproximada de lo conjeturado, pero con hoja de cálculo no se puede afinar más sin un enorme gasto de tiempo.

2).-La suma de los cuadrados de los inversos converge a 1.33853369

Con un par de columnas, una de cuadrados de inversos, y otra de sumas parciales, llegaremos a

80309	1,5505E-10	1,338564346
83179	1,4453E-10	1,338564346
84345	1,4057E-10	1,338564347

Es más aproximado que el anterior, porque los sumando son más pequeños.

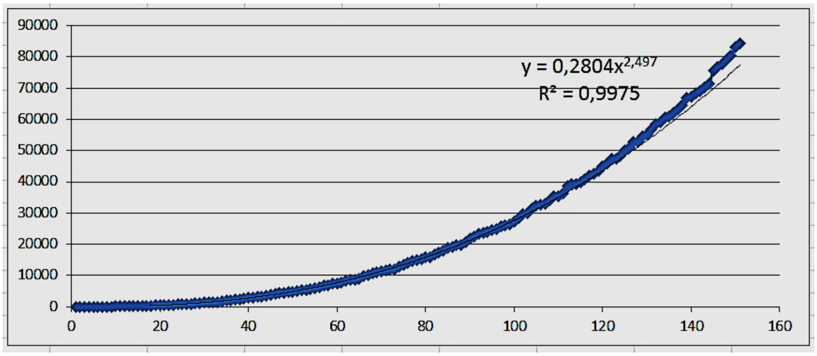
3).- Los valores de la sucesión, a partir de n=4, están comprendidos entre $n^2/2$ y $n^3/3$

Aquí tienes el cálculo para los términos 401, 475 y 565:

401	180,5	2286,333333
475	200	2666,666667
565	220,5	3087

Ajuste

Se han dado otros varios ajustes de esta sucesión, pero no ha sido posible comprobarlos con la hoja. Así que, como una práctica, ajustaremos mediante una función potencial:



No está mal, un R^2=0,9975, que nos aproximaría a una potencial de exponente 2,5 aproximadamente, pero es un cálculo no muy exacto.

LA PERMUTACIÓN YELLOWSTONE

En los últimos meses nos hemos acostumbrado a estudiar sucesiones con definiciones muy originales, como las incluidas en el documento de N.J.A. Sloane "My Favorite Integer Sequences"

http://arxiv.org/abs/math/0207175

En esta de hoy se comienza con los valores a(1)=1, a(2)=2 y a(3)=3, y los siguientes a(n) son los números naturales más pequeños que aún no hayan aparecido en la sucesión y que tengan algún factor común con a(n-2) y ninguno con a(n-1). Para entenderlo bien podemos ir generando términos según la definición. A 1, 2 y 3 le debe seguir el 4, que es el más pequeño que comparte factores primos con el 2 pero no con el 3. Tenemos ya 1, 2, 3 y 4.

El siguiente no puede ser 5, 6, 7 ni 8. Deberá ser el 9, que comparte el factor 3 con el 3 y ninguno con el 4. Así podemos seguir generando, hasta completar:

1, 2, 3, 4, 9, 8, 15, 14, 5, 6, 25, 12, 35, 16, 7, 10, 21, 20, 27, 22, 39, 11, 13, 33, 26, 45, 28, 51, 32, 17, 18, 85, 24, 55, 34, 65, …(http://oeis.org/A098550)

Esta sucesión no es creciente, y algunos números tardan en aparecer, como el 10. Se llama permutación porque se ha demostrado que todos los números naturales aparecen una vez

(Ver https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL18/Sloane/sloane9.pdf)

Más adelante comentaremos sus propiedades. Puedes consultar también el documento

http://arxiv.org/pdf/1501.01669v2.pdf

Ahora, como siempre intentamos en este blog, la intentaremos reproducir con hoja de cálculo.

Generación con hoja de cálculo

Aprovecharemos las columnas de una hoja de cálculo para simplificar el problema. La parte más pesada de la generación es averiguar si el siguiente número pertenece o no a la sucesión ya formada por k términos. Deberíamos recorrer los ya aparecidos y compararlos con el candidato nuevo. Se tarda bastante cuando ya existen muchos términos, y es conveniente simplificar.

1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	9
6	1	8
7		15
8	1	14
9	1	5
10		6
11		
12		
13		
14	1	
15	1	

Para que las comparaciones sean más rápidas dedicaremos la primera columna A de una hoja a llevar cuenta de los términos que ya han salido. Escribiremos un 1 en la fila k si ya ha aparecido un término con valor k, y la dejamos en blanco si aún no ha aparecido. Así, si analizamos un nuevo candidato, no hay que recorrer un conjunto, sino ir a su fila directamente. En la imagen vemos en la columna B los términos que van saliendo, y en la columna A un 1 en las filas correspondientes a dichos elementos:

Como el 14 y el 15 ya pertenecen a la sucesión, en las filas 14 y 15 figura un 1. La 10 está vacía porque aún no ha aparecido el 10 como término válido. Analiza bien los distintos valores de ambas columnas.

El averiguar si ya ha salido un número o no se puede resolver con esta función:

Function esta(m)
If ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1 Then esta = True Else esta = False
End Function

Si en la celda Cells(m, 1) hay escrito un 1, declaramos esta = True y false en caso contrario. Esto simplifica mucho el proceso y le da más rapidez.

La segunda parte, el que posea factores comunes con a(n-2) y no los posea con a(n-1) se resuelve con el MCD. Si este es mayor que 1, existen factores comunes y si es 1, no, y los términos son primos entre sí.

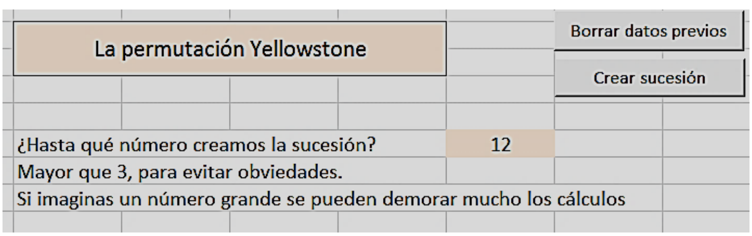
El Basic VBA lo resolvemos así: mcd(m, a) > 1 And mcd(m, b) = 1

Teniendo en cuenta estas dos consideraciones, el resto del algoritmo se reduce a borrados de celdas, estructuras de control y demás. Lo puedes estudiar en nuestra hoja Yellowstone.xlsm, alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/yellowstone.xlsm

En ella, para comprobar que esta sucesión recorre todos los números naturales (por eso la llamamos permutación además de sucesión), permitimos que se escriba un entero (no debe ser muy grande por la limitada velocidad del algoritmo) y la sucesión se desarrolle hasta llegar a ese número.

En la imagen hemos deseado llegar hasta el 12:



Disponemos de un botón para borrar datos previos y otro para iniciar la sucesión. En efecto, al pulsar este, en la columna B aparece la sucesión Yellostone hasta el 12:

A	B
1	1
1	2
1	3
1	4
1	9
1	8
	15
1	14
1	5
	6
	25
1	12
1	
1	

Los términos aparecen en la columna B y los lugares ya ocupados, mediante un 1, en la A.

Descarga la hoja si te apetece y busca valores algo mayores, para descubrir en qué número de orden aparecen en la sucesión y observarás que la columna A se va llenando de unos.

Por ejemplo, el 540 no aparece hasta el término 590

589	1	271
590		540
591	1	

Esto significa que han aparecido unos 50 términos mayores que él antes de que se incorpore él mismo. Para quienes no deseen descargar la hoja y sólo estudiar el proceso, incluimos el código utilizado. En otras entradas comprobaremos algunas otras propiedades de esta sucesión.

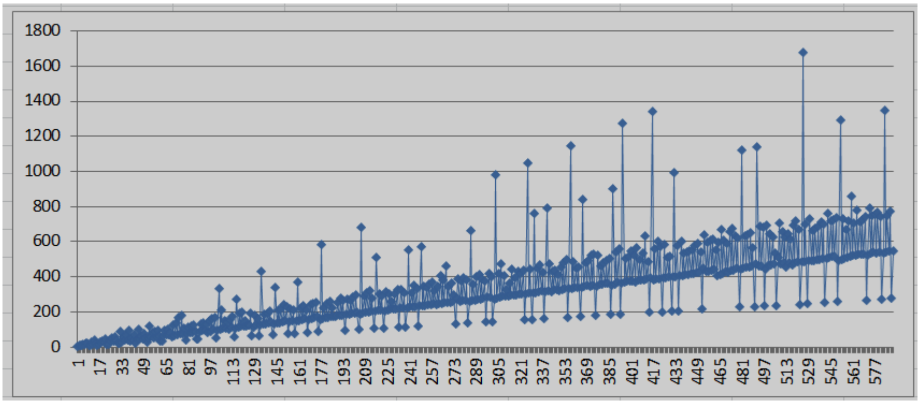
```
Public Function mcd(a1, b1)
Dim a, b, r

'Halla el MCD de a1 y b1

r = 1
a = a1
b = b1
If b = 0 Then b = 1
If a = 0 Then a = 1
While r <> 0
r = a - b * Int(a / b)
If r <> 0 Then a = b: b = r
Wend
mcd = b
End Function

Function esta(m)
If ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1
Then esta = True Else esta = False
End Function

Sub sucesion()
Dim n, k, b, c, m, i
```

```
Call borrado
n = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 9).Value
a = 2: b = 3:  k = 3
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 2).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 2).Value = 2
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(3, 2).Value = 3
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 1).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 1).Value = 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(3, 1).Value = 1
While k < 10 ^ 5 And b <> n
m = 3
While esta(m): m = m + 1: Wend

While Not (mcd(m, a) > 1 And mcd(m, b) = 1) And m <
10 ^ 5
m = m + 1
While esta(m): m = m + 1: Wend
Wend

a = b: b = m: k = k + 1
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(k, 2).Value = m
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(m, 1).Value = 1
Wend

End Sub
```

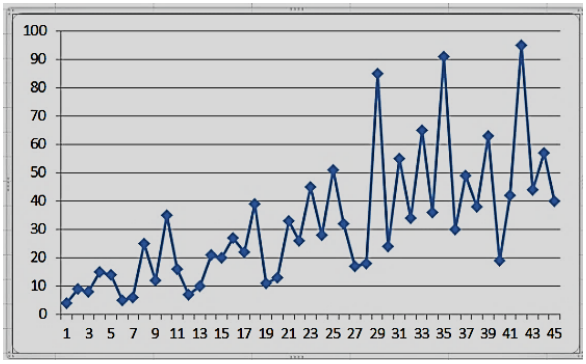
Curiosidades

Ya conocemos la definición de esta sucesión y cómo generarla con hoja de cálculo. Ahora desarrollaremos algunas propiedades, la mayoría tomadas de la página http://oeis.org/A098550

En primer lugar, bueno será el estudio gráfico de la evolución de esta sucesión:



Los datos están tomados del ejemplo de la entrada anterior, términos hasta que aparezca el 540. Vemos una línea de tendencia lineal clara (en realidad, se ha visto que no es lineal), un poco por debajo de los números de orden, con otra línea de más pendiente algo difusa, además de casos aislados situados superior e inferiormente. Si esta sucesión recorre todos los valores, cada uno elegido en la escala del eje Y se corresponderá con un punto del gráfico. Parece ser que el nombre de Yellowstone proviene de este gráfico, en el que las imágenes más pequeñas corresponden a los números primos, el núcleo central contiene bastantes alternancias entre pares e impares, mientras que surgen picos semejantes a los chorros aleatorios de materia de un geyser. Muchos de estos picos aparecen dos unidades más tarde que los primos. Vemos un corte con más detalle:



Aquí los mínimos se sitúan en los valores primos 5, 7, 11 (junto al 13) y 19, mientras que los "chorros" o picos corresponden a 85, 91 y 95. Nos referimos a valores, no a números de orden.

Infinitud de la sucesión

Para demostrar que la serie es infinita bastará mostrar que dados un a(n-2) y a(n-1), el conjunto de candidatos a ser el siguiente número, no está vacío. En efecto, basta elegir el valor a(n-2)*p, siendo p un número primo mayor que a(n-1). Si ese conjunto no está vacío, siempre existirá un término posterior a los dados, y la sucesión será infinita. Por una razón similar, en cada tres términos consecutivos ha de haber al menos un número compuesto, pues tres primos consecutivos no cumplirían la definición.

Dentro de esta sucesión infinita los primeros primos aparecen en su orden natural, como podemos comprobar en esta lista

1, 2, 3, 4, 9, 8, 15, 14, 5, 6, 25, 12, 35, 16, 7, 10, 21, 20, 27, 22, 39, 11, 13, 33, 26, 45, 28, 51, 32, 17, 18, 85, 24, 55, 34, 65, 36, 91, 30, 49, 38, 63, 19, 42, 95, 44, 57, 40, 69, 50, 23, 48, …

No se ha podido demostrar esta conjetura para todos los primos.

Puntos fijos

Una cuestión curiosa es averiguar qué números aparecen en un número de orden igual a ellos, es decir, que a(n)=n. Hasta ahora sólo se han encontrado estos:

1, 2, 3, 4, 12, 50, 86 (http://oeis.org/A251411)

Se ha intentado hasta 10^8 sin conseguir otro más. Con nuestra hoja de cálculo podemos comprobar alguno. En la imagen tienes el correspondiente al 86:

¿Hasta qué número creamos la sucesión?	86
Mayor que 3, para evitar obviedades.	
Si imaginas un número grande se pueden demorar mucho los cálculos	
Ese número aparece en la posición	86

HIPOTENUSEANDO

En mis exploraciones por la página OEIS (Enciclopedia On-line de sucesiones de números enteros, http://oeis.org/?language=spanish), me encontré con la sucesión http://oeis.org/A104863

10, 30, 31, 43, 53, 68, 86, 109, 138, 175, 222, 282, 358, 455, 578, 735, 935, 1189, …

En ella, a partir de los valores a(1)=10 y a(2)=30, se van formando los siguientes como **la parte entera de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los dos anteriores**.

Así, el tercer elemento es igual a

ENTERO(RAIZ(10^2+30^2))=ENTERO(RAIZ(1000))=ENTERO(31,62)=31.

Prueba a justificar que el siguiente es 43.

Esta definición equivale a que cada término es la hipotenusa truncada correspondiente a los términos anteriores tomados como catetos. Por eso le hemos llamado a esta sucesión la de "hipotenusear". Su expresión recurrente sería:

$$a_n = Int\left(\sqrt{{a_{n-2}}^2 + {a_{n-1}}^2}\right)$$

Esta sucesión presenta algunas características que le hacen merecer esta entrada:

(1) El uso de la parte entera obliga a renunciar a las fórmulas teóricas. De hecho, en términos avanzados de la sucesión, el cumplimiento del Teorema de Pitágoras es deplorable. Observa este ejemplo, en el que a(n-2)=8348, a(n-1)= 10618 y a(n)=13506. Si elevamos al cuadrado obtenemos:

13506^2=182412036

8348^2+10618^2=182431028

Restamos y nos queda un error de 18992 unidades. Así que las hipotenusas que obtengamos con esta recurrencia no son tales, aunque seguiremos llamándolas así.

(2) Como también ocurre en las recurrencias lineales, el cociente entre dos términos consecutivos se va estabilizando y tiende a un límite. Esto nos permite “razonar en el límite”, aunque sepamos que es una técnica aproximada, que sólo nos valdrá para explicar (y no demostrar) algunas conjeturas que se han afirmado para esta sucesión y otras similares.

(3) La sucesión presentada es sólo un caso particular de toda una familia en la que podemos fijar a(1) y a(2) como deseemos. La mayoría de las propiedades se mantendrán. Vemos la primera:

Conjetura: El límite del cociente a(n+1)/a(n) es la raíz cuadrada del número áureo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\emptyset} = 1{,}27201965\ldots$$

La llamamos conjetura por causa de la parte entera, que nos impide mejores razonamientos. Esta cuestión, de manejarnos entre aproximaciones y conjeturas, es uno de los objetivos de esta entrada.

Podemos comprobar lo anterior con hoja de cálculo. Escribimos dos catetos uno debajo de otro, como 2 y 5, y después, en columna rellenamos la fórmula

=ENTERO(RAIZ(CATETO1^2+CATETO2^2)).

No es difícil de organizar. Después, en la columna de la derecha calculamos los cocientes entre dos términos consecutivos. Algo así:

A(N)	Cociente A(N+1)/A(N)
2	
5	2,5
5	1
7	1,4
8	1,142857143
10	1,25
12	1,2
15	1,25
19	1,266666667
24	1,263157895
30	1,25
38	1,266666667
48	1,263157895
61	1,270833333

Al llegar al término 14 ya se adivina el valor deseado. Si seguimos bajando, la aproximación mejora mucho

709028	1,272018141
901897	1,272018877
1147230	1,272018867
1459299	1,27201956
1856257	1,272019648
2361195	1,272019446

Podemos razonarlo en el límite. Llamamos k al cociente a(n+1)/a(n). Por tanto, en la expresión de a(n) podemos escribir:

$$a_n = a_{n-1} Int\left(\sqrt{1+1/k^2}\right)$$

O bien, pasando a(n-1) al primer miembro,

$$k \cong \sqrt{1+1/k^2}$$

Elevando al cuadrado y agrupando, tenemos que k se debe aproximar a la solución de la ecuación $k^4 - k^2 - 1 = 0$, una bicuadrada cuya solución es el límite sugerido, la raíz cuadrada del número áureo.

Incluimos las cuatro soluciones tal como las da WolframAlpha:

Real solutions:

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Complex solutions:

$$x = -i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$x = i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Elegimos la real positiva, y, efectivamente, resulta 1,27201964951407…

Manteniendo el razonamiento en el límite, si a(n-1) y a(n) se comportan como cateto e hipotenusa respectivamente con esa razón dada, el otro cateto, a(n-2), se podrá aproximar (también en el límite) de esta forma:

$$a_{n-2} = \sqrt{{a_n}^2 - {a_{n-1}}^2} = a_n\sqrt{1 - {}^{1}/_{\emptyset}} = \frac{a_n}{\emptyset}$$

Plantéate como ejercicio demostrar el último paso. Recuerda que φ-1=1/φ

En esta sucesión a(n) tiende en el límite a a(n-2)*φ

Lo hemos demostrado en el párrafo anterior. También lo podemos razonar mediante la idea de que si el cociente entre dos términos consecutivos se aproxima a la raíz del número áureo, el correspondiente a a(n) y a(n-2) será dicho número φ.

Por tanto, en el límite, cada tres términos consecutivos forman un triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a (1, 1,272019…, 1,618033…) y cuyo ángulo menor es de 38,17º

Un ejercicio: ¿Cuál es, en el límite, el cociente entre el área del triángulo (a(n+1), a(n), a(n-1)) y el correspondiente a (a(n), a(n-1), a(n-2))?

Para quienes conozcáis el lenguaje PARI, con una línea de código similar a esta podéis estudiar la sucesión hasta términos más avanzados:

a=1;b=7;for(i=1,30,c=truncate(sqrt(a^2+b^2));a=b;b=c;print1(c,", "))

Podéis estudiar los cocientes añadiendo el código adecuado.

Conjetura: A partir de un término mínimo, a(n) se diferencia de a(n-2)+a(n-4) en a lo sumo una unidad.

Esta conjetura está publicada en la página OEIS citada para el caso a(1)=10 y a(2)=30, en el que la diferencia se estabiliza en 1. Su verificación no depende de los términos iniciales, salvo, quizás, el tope inferior de 1. Por ejemplo, lo comprobaremos con hoja de cálculo y los términos iniciales a(1)=4 y a(2)=7:

a(n)	a(n-2)+a(n-4)
4	
7	
8	
10	
12	12
15	17
19	20
24	25
30	31
38	39
48	49
61	62
77	78
98	99

En este caso vemos que a(n) tiende a coincidir con a(n-2)+a(n-4)-1

En el límite se puede justificar usando todos los cocientes presentados más arriba:

$a(n-2)+a(n-4) = a(n)/\varphi+a(n)/\varphi^2 = a(n)*(\varphi+1)/\varphi^2 = a(n)$

Así que en el límite la coincidencia es exacta: a(n-2)+a(n-4) = a(n), y la unidad como error aparece por los truncamientos.

Puedes cambiar la función ENTERO por la de REDONDEAR. Así lo hacen las sucesiones A104803, A104804, A104805 y A104806, con resultados similares.

NUMERADORES DE LOS NÚMEROS ARMÓNICOS

Un número armónico H_n es un número racional formado mediante la suma de los inversos de los números naturales hasta n, es decir

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

La sucesión de los números armónicos tiene límite infinito, por ser divergente la serie armónica a la que pertenecen los sumandos. Es fácil ver que los denominadores de los números armónicos son, salvo simplificaciones, los primeros factoriales, pero aquí nos van a interesar los numeradores.

Con hoja de cálculo no es difícil encontrarlos, pues situamos en columna los distintos valores hasta n y en otra columna vamos dividiendo n! entre 1, 2, 3, … para después sumar la columna de cocientes (que serán todos enteros). Aquí tienes el desarrollo para n=6

	k	n!/k
	1	720
	2	360
	3	240
	4	180
	5	144
n=	6	120
	Numerador	**1764**

Se ha dividido el factorial de 6, 720, entre 1,2, …6, sumando los cocientes hasta conseguir 1764, luego el sexto número armónico tendrá la expresión 1764/720. Nos basamos en este cálculo en la operación de sacar el denominador común.

Si nos atenemos a la definición primera, vemos que H(n+1)=H(n)+1/(n+1). Si imaginamos mentalmente el resultado de esa suma entenderemos que el numerador de H(n) quedará multiplicado por n+1 con la suma posterior del primitivo denominador, es decir, n!. Esto nos lleva a una fórmula de recurrencia fácil para los numeradores: a(n+1)=a(n)*(n+1)+n!

Si aplicamos la fórmula de recurrencia al 1, obtenemos la sucesión 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, …que coincide con los números de Stirling de primera clase, publicados en http://oeis.org/A000254 y que puedes estudiar allí. Nosotros simplificaremos las fracciones de los números armónicos, con lo que los valores anteriores se verán sustituidos por 1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993, ... Estos son los numeradores que consideraremos en principio. Están también publicados

(http://oeis.org/A001008)

Según las ideas contenidas en los párrafos anteriores, la primera suma que consideramos y la operación de simplificar, el algoritmo adecuado para generar estos numeradores simplificados puede ser el siguiente, que lo hemos orientado a una función de VBA:

Public Function numearmonico(n)
Dim i, v, f
v = 0
f = 1
For i = 1 To n: f = f * i: Next i ‘Se construye el factorial
For i = 1 To n
v = v + f / i ‘Se suman los cocientes del factorial con 1..n
Next i
v = v / mcd(v, f) ‘Simplificación de la fracción
numearmonico = v
End Function

Con esta función es fácil reproducir de nuevo los valores de los numeradores:

N	Numerador Hn
1	1
2	3
3	11
4	25
5	137
6	49
7	363
8	761
9	7129
10	7381

Todo lo anterior tenía por objeto que practicáramos un poco con cálculos y algoritmos, pero si hubiéramos acudido al lenguaje PARI, la generación de los numeradores es tan sencilla que se limita a su definición:

for(n=1,30,print1(numerator(sum(i=1, n, 1/i)),", "))

Obtenemos así rápidamente los primeros 30 términos:

```
? \r ini.txt
1, 3, 11, 25, 137, 49, 363, 761, 7129, 7381, 83711, 86021, 1145993, 1171733, 119
5757, 2436559, 42142223, 14274301, 275295799, 55835135, 18858053, 19093197, 4443
16699, 1347822955, 34052522467, 34395742267, 312536252003, 315404588903, 9227046
511387, 9304682830147,
? 
```

Propiedades

Estos numeradores son también interesantes por sus propiedades. Algunas sorprenden, como que el primo **p** al cuadrado divide al término **a(p-1)** para p>3 (teorema de Wolstenholme)

Lo vemos en la tabla:

a(n)	Primo p^2	Cociente
1		
3		
11		
25	25	1
137		
49	49	1
363		
761		
7129		
7381	121	61
83711		
86021	169	509
1145993		
1171733		
1195757		
2436559	289	8431

En ella se observa cómo los cuadrados de 5, 7, 11, 13 y 17 dividen a los términos de orden 4, 6, 10, 12 y 16 respectivamente. Sorprendente.

En http://oeis.org/A001008 puedes leer otras propiedades similares.

Desarrollo por Taylor

La función generatriz de los números armónicos es **log(1-x)/(x-1)**. Podemos aprovecharla para generar de nuevo estos numeradores mediante PARI. Basta desarrollar la F.G usando el desarrollo de Taylor:

print(taylor(log(1-x)/(x-1),x,20))

Obtenemos:

```
x + 3/2*x^2 + 11/6*x^3 + 25/12*x^4 + 137/60*x^5 + 49/20*x^6 + 363/140*x^7 + 761/
280*x^8 + 7129/2520*x^9 + 7381/2520*x^10 + 83711/27720*x^11 + 86021/27720*x^12 +
 1145993/360360*x^13 + 1171733/360360*x^14 + 1195757/360360*x^15 + O(x^16)
```

Y basta leer los denominadores.

Números armónicos generalizados

Todo lo que hemos estudiado se puede extender al caso en el que la suma de fracciones se efectúe con potencias en los denominadores:

$$H_{n,m=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots\frac{1}{n^m}}$$

Si repetimos el algoritmo que hemos usado, pero con potencias, resultarían los numeradores generalizados, que se obtienen cambiando los sumandos 1/n por 1/n^m en el algoritmo presentado más arriba.

En Hoja de Cálculo:

Public Function numearmonico(n, m) ‘Valores de **n** y el exponente **m**

Dim i, v, f

v = 0

f = 1

For i = 1 To n: f = f * i ^ m: Next i

For i = 1 To n

v = v + f / i ^ m

Next i

v = v / mcd(v, f)

numearmonico = v

End Function

Y en PARI:

for(n=1,30,print1(numerator(sum(i=1, n, 1/i^m)),", "))

Resultan una serie de sucesiones, a las que OEIS da el nombre de “Wolstenholme numbers”, y que tienen propiedades similares a los numeradores estudiados. Las primeras, según su exponente son:

Con el 2 http://oeis.org/A007406

1, 5, 49, 205, 5269, 5369, 266681, … y en ellas el primo p divide a a(p-1). Por ejemplo, el 5 divide a a(4)

Con el 3, http://oeis.org/A007408

1, 9, 251, 2035, 256103, 28567, 9822481, …

Con 4 http://oeis.org/A007410

1, 17, 1393, 22369, 14001361, 14011361, …

Con 5 http://oeis.org/A099828

1, 33, 8051, 257875, 806108207, 268736069 ,…

Todos tienen propiedades similares, según puedes consultar en los enlaces. Podemos resumir todos en una tabla de hoja de cálculo usando la función antes definida. Aquí tienes los primeros:

		Exponentes				
		1	2	3	4	5
Números	1	1	1	1	1	1
	2	3	5	9	17	33
	3	11	49	251	1393	8051
	4	25	205	2035	22369	257875
	5	137	5269	256103	14001361	806108207
	6	49	5369	28567	14011361	268736069
	7	363	266681	9822481	33654237761	4,51691E+12
	8	761	1077749	78708473	5,385894E+11	6,58584E+15

NÚMEROS DE ULAM

Se llaman *números de Ulam* a los que forman una sucesión construida de la siguiente forma:

Se declara u(1)=1 y u(2)=2 (veremos que esto se puede alterar) y después definiremos u(n+1) como el primer número que se pueda expresar como **suma de dos números de Ulam anteriores distintos, de forma única**.

Los creó el matemático polaco Stanislaw Ulam y los publicó en SIAM Review en 1964.

Puedes ampliar este concepto en las páginas

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_de_Ulam

http://www.grupoalquerque.es/mate_cerca/paneles_2014/221_Numeros%20de%20Ulam.pdf

https://www.gaussianos.com/feliz-ano-2012/

El 1 y el 2 se toman de forma arbitraria. El siguiente deberá ser el 3, ya que 3=1+2 de forma única. También está claro que el cuarto debe ser 4=1+3, pues 4=2+2 no sería válido por ser iguales los sumandos.

Deberíamos rechazar el 5, pues 5=1+4=2+3. El 6 sí nos vale, pues 6=2+4, siendo no válida la suma 6=3+3.

Por tanto, los primeros términos de la sucesión de Ulam serán 1, 2, 3, 4, 6. Es sencillo buscar los siguientes: 8, 11, 13, 16, 18, 26, …

Tienes más elementos en http://oeis.org/A002858, junto con una gran cantidad de comentarios sobre estos números. Aquí nos interesarán aspectos algorítmicos. Veamos alguno:

Encontrar el número de Ulam de orden N

Resolveremos la cuestión a través de una función que nos devuelva el término enésimo de la sucesión. Esto tiene el inconveniente de que hay que ir tomando nota de los términos anteriores. Los lenguajes avanzados lo resuelven mediante **una lista**, tal como veremos en PARI. En hoja de cálculo se pueden construir fácilmente listas mediante las columnas, usando una variable que recuerde el número de términos de la lista y unos procedimientos para escribir y leer en ella. No es complicado. Ya lo usamos en otra sucesión, la de Mian-Chowla:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2016/03/sucesion-de-mian-chowla.html

Aquí lo implementaremos de forma más simple, dimensionando un vector con 2000 componentes. El inconveniente es que no podremos pasar de esa cantidad, salvo que modifiquemos la dimensión, pero resulta más manejable.

Una vez determinemos la lista, en este caso u(2000), rellenaremos en primer lugar los elementos u(1)=1 y u(2)=2. Después habrá que ir probando los siguientes números hasta ver si proceden de una suma única de elementos distintos o no. Crearemos una variable **m** que cuente las sumas posibles, y si vale 1, incorporamos un nuevo elemento a la lista. Al llegar a **n** elementos, paramos el cálculo y devolvemos ese resultado. El código de la función para Excel y Calc es el siguiente, en el que hemos añadido los parámetros **a** y **b** por si deseamos iniciar la sucesión en otro par de números que no sean 1, 2:

Public Function ulam(a, b, n)
Dim u(2000) ‘Usamos un vector o matriz, pero puede ser una lista
Dim i, j, k, m, uu
Dim noes As Boolean

u(1) = a: u(2) = b ‘Se rellenan los primeros términos
If n = 1 Or n = 2 Then ulam = u(n): Exit Function ‘Primeros dos casos
For i = 3 To n
noes = True
uu = u(i - 1) + 1 ‘La variable ***uu*** recorre los números de Ulam previos

While noes

m = 0

For j = 1 To i - 1

For k = j + 1 To i - 1

If j <> k And u(j) + u(k) = uu Then m = m + 1 ‘Cuenta las sumas distintas

Next k

Next j ‘A continuación actúa cuando la suma es única

If m = 1 Then u(i) = uu: noes = False Else uu = uu + 1

Wend

Next i

ulam = uu

End Function

En la siguiente tabla, mediante esta función, hemos representado los 20 primeros números de Ulam:

N	Ulam(N)
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	8
7	11
8	13
9	16
10	18
11	26
12	28
13	36
14	38
15	47
16	48
17	53
18	57
19	62
20	69

Recuerda que solo podremos actuar sobre los 2000 primeros, tal como hemos definido la función. Este inconveniente no existe si usas lista en el lenguaje PARI. En el siguiente listado observarás que se comienza creando la lista **v**: "***my(v=List(),"*** y, después, para incorporar un elemento a la lista se usa "**lisput**". Lo que sigue es difícil de leer, pero se puede comprobar que contiene las mismas ideas que en la función de Excel, con alguna ligera variante. Esta es la función propuesta:

```
ulam(n)=my(v=List(),i,j,k,o,uu,m);listput(v,1);listput(v,2);for(i=3,n,o=1;uu=v[i-1]+1;while(o==1,m=0;for(j=1,i-1,for(k=j+1,i-1,if(v[j]+v[k]==uu&&j<>k,m+=1)));uu+=1;if(m==1,uu=uu-1;listput(v,uu);o=0)));uu
```

Por no complicar más (ya es bastante oscuro), no hemos implementado la función para n=1 o n=2, por lo que el listado general comenzará en el 3:

```
3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82,
87, 97, 99, 102, 106, 114, 126, 131, 138, 145, 148, 155, 175, 177, 180, 182, 189
, 197, 206, 209, 219, 221, 236, 238, 241, 243, 253,
?
```

Así que con esta función podemos crear la lista de los números de Ulam, pero nos puede interesar también si un número es de Ulam o no. Por ejemplo, ¿Qué número de Ulam sigue al 200?

Para ello disponemos de otra función basada en la anterior. Se podían refundir ambas en una sola, pero no compensaba el esfuerzo. La orientación que se propone aquí es más lenta, pero más fácil de entender.

Ver si un número es de Ulam

Llamaremos ***esulam*** a una función que nos devuelva un 0 si el número propuesto no pertenece a la sucesión de Ulam y que nos dé su número de orden en caso de que pertenezca.

Public Function esulam(a, b, n)
Dim i, uu, k
If n = a Then esulam = 1: Exit Function ‘Caso u(1)
If n = b Then esulam = 2: Exit Function ’Caso u(2)

i = 3: k = 0: uu = 0

While uu <= n 'Busca elementos menores que ***n***

uu = ulam(a, b, i)

If uu = n Then k = i 'Si se llega a ***n***, es que pertenece, y se toma nota del orden ***k***. Si no, k=0

i = i + 1

Wend

esulam = k

End Function

Con esta función averiguamos que el primer número de Ulam posterior al 200 es el 206:

N	ESULAM(N)
200	0
201	0
202	0
203	0
204	0
205	0
206	42
207	0
208	0

Los primeros números de Ulam que son números primos son:2, 3, 11, 13, 47, 53, 97, 131, 197, 241, 409, 431, 607, 673, 739, 751, 983, 991, 1103, 1433, 1489.

Como ejercicio, puedes comprobar los siguientes listados de números de Ulam que cumplen otras condiciones:

Cuadrados: 1, 4, 16, 36, 324, 400, 441, …

Triangulares: 1, 3, 6, 28, 36, 253, …

Capicúas (contando los de una cifra): 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 77, 99, 131, 282, 363, 414, 434, 585, 646, …

Otras sucesiones de Ulam

Podemos cambiar los valores iniciales 1 y 2 por otros (por eso se incluyeron los parámetros a y b en nuestras funciones). A continuación se copian algunas, con indicación de su número en OEIS:

(a,b)	Dirección	Sucesión
(1, 2)	A002858	1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, ...
(1, 3)	A002859	1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 17, 21, ...
(1, 4)	A003666	1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16, 18, 19, ...
(15)	A003667	1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 20, 22, ...
(2, 3)	A001857	2, 3, 5, 7, 8, 9, 13, 14, 18, 19, ...
(2, 4)	A048951	2, 4, 6, 8, 12, 16, 22, 26, 32, 36, ...
(2, 5)	A007300	2, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 19, 23, ...

Con esto terminamos. No parece que este estudio dé para más.