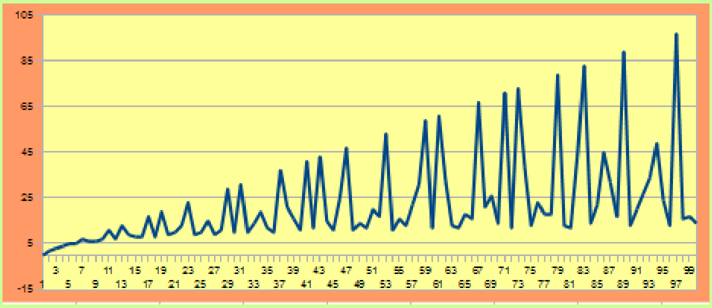
Sigmas y omegas



Edición 2024

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

El tema de contar los divisores de un número o sumarlos ha dado siempre lugar a propiedades muy interesantes y retos atractivos. El que cada divisor d de N se corresponda con su complementario N/d añade más variedad a sus propiedades. El carácter de retículo del conjunto de divisores da también unidad a todas ellas.

Por otra parte, el carácter aditivo o multiplicativo de algunas de las funciones definidas sobre los divisores de N las enlaza con cuestiones mucho más profundas de la Teoría de Números y permite encontrar fórmulas prácticas para todas ellas.

Como advertiremos en todos los documentos de esta colección, el material presentado no contiene desarrollos sistemáticos, ni pretende ser un manual teórico. En cada tema se incluirán cuestiones curiosas o relacionadas con las hojas de cálculo, con la única pretensión de explicar algunos conceptos de forma amena.

Tabla de contenido

DEFINICIONES PREVIAS

FUNCIONES SIGMA

Llamamos función sigma-k(N) a la suma de todos los divisores de N elevados al exponente k

$$\sigma_k(N) = \sum_{d \vdots n} d^k$$

Todos los casos particulares son interesantes:

Si k=0 obtenemos el número de divisores de N, o función DIVISOR, ***d(N)***, también llamada ***función TAU***.

Para k=1 se suele omitir el subíndice, por lo que el nombre de ***sigma*** a secas, σ(N), se refiere a la suma de los divisores de un número.

Abundancia: Es el cociente entre sigma(N) y el propio N. En los números perfectos vale 2.

SUMA ALÍCUOTA *S(N)*

Se refiere a la suma de los divisores de N excluido él mismo (divisores propios). Por tanto, s(N)= σ(N)-N. Tradicionalmente se ha nombrado como *parte alícuota*.

Funciones sobre factores primos

Existen funciones que cuentan o suman los factores primos:

Omega ω(N): La función omega cuenta los factores primos distintos de N (sin tener en cuenta los exponentes)

Bigomega Ω(N): La función bigomega cuenta los factores primos distintos de N teniendo en cuenta las multiplicidades. Equivale a la suma de los exponentes de los factores primos.

SOPF(N): Suma los factores primos distintos de N

Logaritmo entero o función SOPFR (o SOFPR): Suma los factores primos con multiplicidad, teniendo en cuenta los repetidos.

Divisores unitarios

Llamamos divisor unitario **d** de **n** a aquel que es coprimo con **n/d**. Valen para ellos la misma definición de función sigma, pero se le añade un asterisco para distinguirla $\sigma^*_k(N)$ o bien se la nombra como ***u-sigma***. Su fórmula es

$$\sigma^*(N) = \prod \left(1 + p_i{}^{k_i}\right)$$

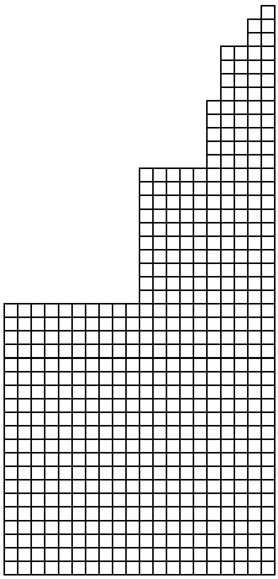
También se pueden contar los divisores unitarios (función **ud**)

$$ud(n) = 2^{omega(n)}$$

SIGMA, OMEGA Y TAU

LA FAMILIA DE LAS SIGMAS

Observa esta imagen, construida con 546 cuadraditos



Está formada por cuadrados que guardan una cierta relación y su altura es de 42 cuadrados. Tiene una propiedad de la que carecen otras construcciones similares y es que se pueden reordenar los cuadrados para formar un rectángulo con la misma altura.

Esta figura está construida sobre una base de 20. Si la base hubiera sido de 25, también se habría podido transformar en un rectángulo.

¿De qué estamos hablando?

La imagen está construida con los cuadrados de todos los divisores del número 20. Es lo que llamaremos ***función sigma_2*** del número 20, mientras que reservamos la palabra ***sigma*** a secas (o sigma_1) a la suma de todos los divisores.

Todo esto es una parte de la definición general:

$$\sigma_k(N) = \sum_{d:n} d^k$$

Es decir, que Sigma_k es la suma de las potencias k-ésimas de todos los divisores de N. En la imagen propuesta N=20. La altura de la imagen es 42, suma de todos los divisores de 20, y los cuadrados forman el número 546, que equivale a sigma_2(20)

En la teoría elemental de la Divisibilidad estudiamos una fórmula práctica para el cálculo de sigma_1:

$$\sigma(N) = \prod \frac{{p_i}^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

donde p_i son los factores primos de N.

Y es fácil demostrar con el mismo proceso que la fórmula para sigma_k es

$$\sigma_k(N) = \prod \frac{{p_i}^{(e_i+1)k} - 1}{{p_i}^k - 1}$$

Si deseas usar una hoja de cálculo, las funciones sigma se programan con unas pocas líneas:

```
public function sigma(n,k)
dim i,s

s=0
for i=1 to n
if n/i=n\i then s=s+i^k
next i
sigma=s
End function
```

Existen otras formas más rápidas de calcularlo, pero la que presentamos es la más simple.

¿Qué números tienen la propiedad de que la pila de cuadrados de sus divisores se puede convertir en un rectángulo?

Por una parte basta observar la figura para comprender la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sigma_2(N)}{\sigma_1(N)} < N$$

Luego el rectángulo ha de tener una base menor que N.

Si programamos el cociente entre sigma_2 y sigma_1, nos encontraremos algunos números en los que el cociente es un número entero menor que N y esos serán los que presenten la propiedad pedida:

N	Sigma_1	Sigma_2	Cociente
1	1	1	1
2	3	5	1,67
3	4	10	2,5
4	7	21	3
5	6	26	4,33
6	12	50	4,17
7	8	50	6,25
8	15	85	5,67
9	13	91	7
10	18	130	7,22
11	12	122	10,17
12	28	210	7,5
13	14	170	12,14
14	24	250	10,42
15	24	260	10,83
16	31	341	11
17	18	290	16,11
18	39	455	11,67
19	20	362	18,1
20	42	546	13
21	32	500	15,63
22	36	610	16,94

23	24	530	22,08
24	60	850	14,17
25	31	651	21

En la tabla hemos destacado los números con cociente entero: 1, 4, 9, 16, 20, 25…

La lista se completa así:

1, 4, 9, 16, 20, 25, 36, 49, 50, 64, 81, 100, 117, 121, 144, 169, 180, 196, 200, 225, 242, 256, 289, 324, 325, 361, 400…(http://oeis.org/A020487)

Reciben el nombre de ***números antiarmónicos***.

En ella están los cuadrados perfectos. Puedes intentar demostrar que en todo cuadrado perfecto el cociente entre las sigmas es entero.

Basta reducirlo a cocientes y productos de diferencias de potencias pares que son siempre divisibles, y se desemboca en un cociente de sumas de potencias impares que también presenta divisibilidad. No indicamos más.

Los restantes elementos de la lista son números que no están libres de cuadrados, pero no todos, porque por ejemplo $63=3^2*7$ y no está. No parece haber en la lista ningún número libre de cuadrados.

Soluciones

En un cuadrado perfecto, todos los exponentes e_i de sus factores primos son pares. Así que el cociente entre las dos sigmas contendrá, para cada factor p_i los factores siguientes:

$$\frac{\sigma_2(N)}{\sigma_1(N)} = M = \frac{\left(p_i^{(e_i+1)2} - 1\right)(p_i - 1)}{(p_i^2 - 1)(p_i^{e_i+1} - 1)} = \frac{p_i^{e_i+1} + 1}{p_i + 1}$$

El último es un cociente de una suma de potencias impares entre la suma de sus bases, luego serán divisibles y su cociente un número entero.

REDONDEZ DE UN NÚMERO

Paul Hoffman, en su libro "El hombre que sólo amaba los números" define los números redondos como aquellos que poseen más divisores primos (iguales o distintos) que los demás de su misma magnitud. Parece ser que esta acepción de la palabra "redondo" es original de Hoffman. Hardy dio otra muy parecida.

Esta definición, tal como está en el libro, es algo ambigua y prescindiremos de ella. Usaremos mejor la de "redondez", que se limita a contar factores primos uno a uno. En la práctica la redondez es la suma de los exponentes que aparecen en su descomposición factorial, lo que se conoce también como función BIGOMEGA **Ω(N)** (ver http://oeis.org/A001222)

La redondez de 320 es 7, porque $320=2^6*5$ y 6+1=7, o bien porque los divisores primos tomados de uno en uno son 2 2 2 2 2 2 5. Aquí escribiremos **Ω**(320)=7. Si deseas estudiarla con el Buscador de números naturales puedes usar BIGOMEGA.

Es evidente que los primos tienen redondez 1, los semiprimos 2, y que todos pensamos en múltiplos de 12 que esperamos tengan bastante redondez. En efecto 480 tiene redondez 7 aunque sus vecinos próximos no pasan de 4.

Hemos diseñado para hoja de cálculo la función BIGOMEGA. Con ella hemos estudiado los mil primeros números, para ver cuál es su redondez media. Se ha producido la siguiente tabla:

Redondez	Frecuencia
0	1
1	168
2	299
3	247
4	149
5	76
6	37

7	14
8	7
9	2
Total	1000

En ella aparece sólo una redondez 0 (correspondiente al número 1), 168 unitarias (los primos menores que 1000) y 299 de redondez 2, que es la de los semiprimos, que resulta la más abundante. La redondez media es de 2,88.

Hay dos números, el $512=2^9$ y el $768=2^8*3$ que tienen redondez máxima de 9. Después hay 7 con redondez igual a 8. ¿Qué números son?

Se puede estudiar la media de redondez según la última cifra de los números. Si estás pensando en que ganan los pares llevarás razón, por goleada, del orden del doble, pero si piensas en una de las cifras 2,4, 6, 8 y 0, igual te llevas una sorpresa. ¿Qué última cifra tiene una redondez media mayor?

Soluciones

Solución: Tienen redondez 8: 256, 384, 576, 640, 864, 896 y 960

Vamos probando potencias de 2, 3, 5 y 7.

Con el 2: $2^8=256$

Con 2 y 3 : $2^7*3=384$; $2^6*3^2=576$; $2^5*3^3=864$; 2^4*3^4 se pasa de 1000

Con 2 y 5: $2^7*5=640$; 2^6*5^2 se pasa de 1000

Con 2,3 y 5: Sólo entra $2^6*3*5=960$

Con 2 y 7 entra $2^7*7=896$, muy cerca del 1000, por lo que no lo intentamos con 11 ó 13.

Comenzando con 3 o más ya es inútil probar, porque 38 = 6561

Luego sólo son 7

Distribución por última cifra

1	181
2	361
3	181
4	356
5	273
6	361
7	180
8	359
9	186
0	439

Ganan los terminados en 0

NÚMERO PAR DE DIVISORES

Sabemos que si un número se descompone en factores primos de la forma

$$N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times {p_3}^{a_3} \times \dots {p_k}^{a_k}$$

el número total de divisores de N (función DIVISOR) viene dado por

$$D(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1)\dots(a_k + 1)$$

Así, si 60 = 2^2*3*5, tendrá (2+1)(1+1)(1+1)=12 divisores. Son estos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

¿Cuándo el número D(N) será par?

Sí, lo que estás pensando: **cuando algún a_i sea impar**, porque en ese caso (a_i+1) será par, y su producto por todos los demás factores también lo será. Pero este hecho tiene una consecuencia inmediata: **N no será cuadrado perfecto**, ya que al menos uno de sus factores estará elevado a potencia impar.

Así que los números 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29… tienen en común el no ser cuadrados y el tener un número par de divisores.

Con el Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador) se obtienen fácilmente.

Solución	Detalles
2	2
3	2
5	2
6	4
7	2
8	4
10	4
11	2
12	6
13	2
14	4

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	50

Con estas propiedades:

NO CUADRADO
ES PAR(NUMDIV(N))
EVALUAR NUMDIV(N)

Observamos que el número de factores es siempre par.

Existe una fórmula para generar estos números (los representaremos como NC(n)), independientemente de su carácter de no cuadrados:

$$NC(n) = n + \left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$$

En ella los corchetes significan "parte entera", y al sumar ½ se convertirá en el redondeo de la raíz cuadrada.

Es sencillo implementar esta función en las hojas de cálculo, pues la función REDONDEAR a cero decimales equivale al corchete. La siguiente tabla se ha conseguido con Excel y la fórmula

N+REDONDEAR(RAIZ(N);0)

1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**	8	9	10	11	**12**	**13**	14
2	**3**	**5**	6	7	**8**	**10**	11	12	13	14	**15**	**17**	18

Se puede observar que se engendran todos los números menos los cuadrados. El salto sobre los cuadrados se produce entre los números resaltados en la tabla.

Esto nos da una idea para justificar la fórmula anterior.

Podemos observar que en la fila de abajo los resultados saltan de una en una unidad, salvo en los números en negrita, en los que saltan dos unidades. ¿A qué es debido esto?

Para comprenderlo sustituimos la tabla anterior por otra de raíces cuadradas:

1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**	8	9	10
1	**1,414**	**1,732**	2	2,236	**2,449**	**2,646**	2,828	3	3,162

Observamos que los saltos de 2 unidades se producen cuando la parte decimal de las raíces cuadradas pasan **de ser menores de 0,5 a ser mayores o iguales**. Por eso, al aplicar el redondeo de la fórmula

$$NC(n) = n + \left[\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right]$$

a dos valores consecutivos de **n**, se produce un salto de 1 al pasar de **n** a **n+1,** pero en los números coloreados aparece otra unidad al redondear el corchete.

En efecto, los saltos se producen entre los números del tipo n^2+n y los del tipo n^2+n+1. La demostración de esto se basa en esta cadena de desigualdades:

Si $p<n$ y $q>n$ se tiene:

$$n^2+p<n^2+n<\left(n+{}^1\!/_2\right)^2<n^2+n+1\leq n^2+q$$

Y tomando raíces cuadradas se mantendrán las desigualdades (es función estrictamente creciente)

$$\sqrt{n^2+p}<\sqrt{n^2+n}<n+{}^1\!/_2<\sqrt{n^2+n+1}<\sqrt{n^2+q}$$

Esto nos demuestra que las raíces de la izquierda tienen una parte decimal menor que 0,5 y los de la derecha, mayor, lo que justifica que al redondear aparezca una unidad suplementaria entre n^2+n y n^2+n+1 y el salto sea de 2 en lugar de 1.

Vale, pero ¿por qué los tachados son los cuadrados perfectos y no otros?

Pues aquí se produce una concurrencia de hechos matemáticos (ya se sabe lo aficionados a ellas que somos en este blog). Por una parte sabemos que los cuadrados perfectos son suma de impares consecutivos: 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16 y por otra hemos averiguado que en la fórmula que estamos justificando los cuadrados aparecen entre n^2+n y n^2+n+1. Bastará, pues, demostrar que los saltos se producen siguiendo la pauta de los números impares. En efecto, la diferencia entre dos valores consecutivos de n^2+n es:

$$(n+1)^2+n+1-n^2-n=2n+2=2(n+1)$$

Pero como sabemos que en ese intervalo se produce un salto doble por el redondeo, la diferencia será en realidad 2(n+1)+1= 2n+3

Así, en el intervalo entre el $2=1^2+1$ y $6=2^2+2$ s producirá un incremento igual a 2*1+3=5, lo que justifica que el $4=2^2$ se convierta en $9=3^2$.

Como el tema es intuitivo, lo damos por bueno prescindiendo de pequeños ajustes.

¿No te ha interesado la concurrencia? Pues lo razonamos directamente:

Aplicamos la fórmula

$$NC(n)=n+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]$$

tanto a n^2+n como a n^2+n+1, recordando que la parte decimal del primero no llega a 0,5 y la del segundo se pasa y en el redondeo este segundo producirá una unidad:

$$NC(n^2+n) = n^2+n+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n^2+n}\right] = n^2+n+n = n^2+2n$$

$$NC(n^2+n+1) = n^2+n+1+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n^2+n+1}\right] = n^2+n+1+n+1 = n^2+2n+2$$

Luego el número saltado es n^2+2n+1, que es cuadrado perfecto, por ser igual a $(n+1)^2$.

NÚMEROS DE ORE

Un número entero positivo N se llama **de Ore o armónico** cuando la media armónica de todos sus divisores es un número entero. Por ejemplo, es armónico 140, porque sus 12 divisores son 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70 y 140 y por tanto su media armónica es

$$m_a = \frac{12}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{140}}=5$$

Parece muy pesado este cálculo para números grandes, pero existe una simplificación. Para ello basta observar que cada divisor **d** posee un complementario **d’** tales que **d.d’=N**. Este hecho permite ir sustituyendo cada cociente del tipo **1/d** por **d’/N**, con lo que todos los denominadores resultará iguales a N y se podrán sumar los cocientes con facilidad:

$$m_a = \frac{12}{\frac{140}{140}+\frac{70}{140}+\frac{35}{140}+\frac{28}{140}+\frac{20}{140}+\frac{14}{140}+\frac{10}{140}+\frac{7}{140}+\frac{5}{140}+\frac{4}{140}+\frac{2}{140}+\frac{1}{140}}=\frac{140.12}{336} = 5$$

Este procedimiento es fácilmente generalizable: basta multiplicar N por su número de divisores y dividir después entre la suma de los mismos:

$$m_a = \frac{N.d(N)}{\sigma(N)}$$

Representamos el número de divisores mediante d(N) y su suma por σ(N), o bien como TAU y SIGMA respectivamente. Basta observar la fórmula para poder interpretarla de otra manera: La media armónica de los divisores equivale al cociente entre el número y la media aritmética de dichos divisores.

Este cambio nos permite calcular la media armónica mediante un sencillo algoritmo: Se encuentran los divisores y se van contando y sumando hasta completar el valor de d(N) y σ(N). Si esta media es entera, el número N será armónico.

Incluimos en el Apéndice un listado en Basic que lo logra

La siguiente tabla se ha obtenido con la repetición de este algoritmo:

N	D	S	M
6	4	12	2
28	6	56	3
140	12	336	5
270	16	720	6
496	10	992	5
672	24	2016	8
1638	24	4368	9

También se logra la sucesión de números de Ore con el Buscador de naturales.

Basta usar las condiciones

es entero(N*numdiv(N)/sumdiv(N))
evaluar N*numdiv(N)/sumdiv(N)

Para obtener el resultado

Solución	Detalles
1	1
6	2
28	3
140	5
270	6
496	5
672	8
1638	9

Los primeros números de Ore son: 1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, 1638, 2970, 6200, 8128, 8190,… (http://oeis.org/A001599)¿Qué llama la atención en este listado?

Efectivamente, incluye los números perfectos 6, 28, 496, 8128,…y otros más que no lo son. Todo número perfecto se puede demostrar que también es armónico. Esto es interesante, porque si se lograra demostrar la Conjetura de Ore de que no existen armónicos impares, también se habría logrado demostrar que tampoco hay perfectos impares.

En la tabla anterior vemos que los primeros valores de la media armónica son 2, 3, 5, 6, 5, 8, 9…(http://oeis.org/A001600)En ellos hay valores repetidos como el 5 y ausentes como el 4. Según un teorema de Kanold, para cada entero positivo existe solo un número finito de enteros positivos n tales que su media armónica sea **s**.

RELACIONES ENTRE UN NÚMERO Y SU SIGMA

La función SIGMA(N), en su versión más simple, equivale al resultado de sumar todos los divisores de N. A lo largo de los años de existencia de este blog hemos acudido muchas veces a ella, pero hoy la vamos a relacionar con los números poligonales. Muchos resultados están ya publicados, y otros los presentaremos por primera vez.

Sigma triangular

Es fácil que SIGMA(N) sea un número triangular. Los números que cumplen esto los tienes publicados en http://oeis.org/A045746

1, 2, 5, 8, 12, 22, 36, 45, 54, 56, 87, 95, 98, 104, 116, 152, 160, 200, 212, 258, 328, 342, 356, 393, 427, 441, 473, 492, 531, 572, 582, 588, 660, 668, 672, 726, 740, 800, 843, 852, 858, 879, 908, 909, 910, 940, 962, 992,…

Es un estudio curioso el ver cómo son los números cuya sigma es triangular. Encontrando sus factores primos descubrimos que pueden ser de muchos tipos. Vemos algunos casos:

N número primo

Sólo existen dos casos de número primo con sigma triangular, el 2 y el 5. No hay más. Analizamos:

En el caso de P primo, SIGMA(N)=P+1. Si esta expresión es triangular, se deberá cumplir que t=m(m+1)/2 -1 debe ser primo, es decir: t=(m^2+m-2)/2=(m-1)(m+2)/2, con m>1, ha de serlo. En ese caso debe quedar un solo factor en el producto del numerador.

Puede ocurrir uno de estos hechos: (a) m-1=1, m=2 y t=1*4/2=2, que sería el primer caso. (b) m-1=2, m=3, t=2*5/2=5, que sería la otra solución (c) Cualquier otro valor positivo de m, 4, 5, 6,…produciría dos factores mayores que 2, uno de ellos par, que al dividir entre 2, seguirían teniendo dos factores y t no sería primo.

Puedes comprobarlo con este programa en PARI:

{n=2;while(n<10^8,if(ispolygonal(sigma(n,1),3),print(n);n=nextprime(n+1))}

Esto no demuestra nada, pero sólo obtendrías como soluciones 2 y 5.

N número triangular

Se han encontrado muchas soluciones de este caso, en el que un número triangular produce una sigma también triangular. Están publicadas en http://oeis.org/A083674

1, 36, 45, 23220, 105111, 135460, 2492028, 5286126, 6604795, 14308575, 45025305, 50516326, 54742416, 99017628,…

Entre ellos se presenta un caso muy curioso, y es que los números triangulares 2492028=2232*2233/2 y 6604795=3634*3635/2 tienen la misma suma de divisores, el triangular 8386560=4095*4096/2

Puedes reproducir la sucesión con PARI:

{(for (n=1,n=10^8,if(ispolygonal(n, 3) && ispolygonal(sigma(n), 3),print(n))))}

N número cuadrado

Este caso no estaba publicado, y lo hemos hecho en https://oeis.org/A256149 . Estos son los cuadrados cuya sigma es triangular:

1, 36, 441, 5625, 6084, 407044, 8444836, 17388900, 35070084, 40729924, 57790404, 80138304, 537822481, 588159504, 659821969, 918999225, 1820387556, 2179862721, 2599062361, 5110963081, 28816420516, 36144473689, 46082779561, 55145598561, 147225690000, 163405126756, 216560860321, 406452151296, 919585102500,…

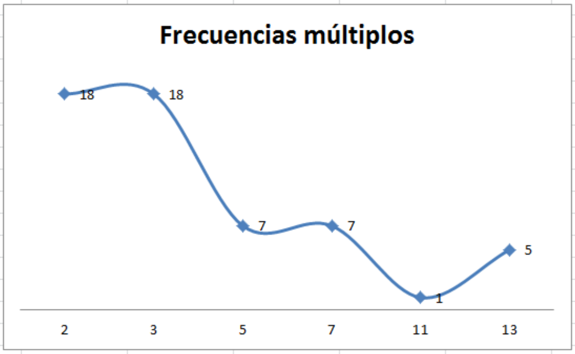
Por ejemplo, el cuadrado 441=21^2 tiene como suma de divisores el triangular

741=441+147+63+49+21+9+7+3+1=38*39/2.

Hemos comprobado los primeros con Excel y después completado con este programa PARI

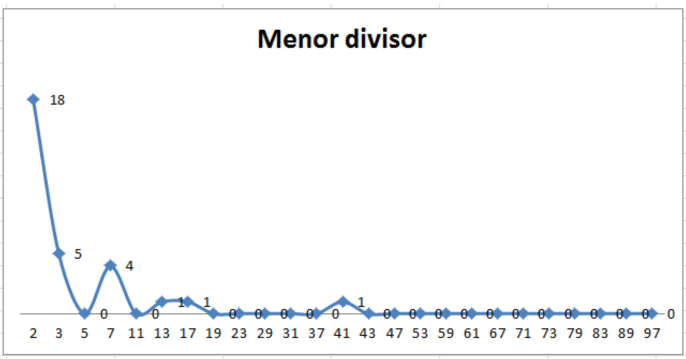
{for(i=1,10^6,n=i*i;if(ispolygonal(sigma(n), 3),print1(n,", ")))}

Un comentario de Alonso del Arte a propósito de la abundancia de múltiplos de 3 me dio la idea de tratar los distintos tipos de múltiplos como un perfil de frecuencias, como se obtiene, por ejemplo al estudiar la distribución de proteínas o de los genes. He aquí el resultado para los seis primeros primos:



Vemos que los más abundantes son los múltiplos de 2 y de 3, con sólo un caso para el 11. Interpreto que esta es una configuración típica de cuando el resultado es casual en gran parte. Cuanta menos teoría lo respalde, más abundarán los factores pequeños, que se prestan más a casualidades.

Una situación similar nos descubre la gráfica de los divisores mínimos de cada elemento:



En este caso llama la atención el valor de 41, 36144473689=41^2*4637^2, cuya suma de divisores es el triangular 272233*272234/2. Son hechos que aparecen porque todos los factores encajan, sin que nosotros podamos adivinarlo.

N número oblongo

Esta posibilidad tiene su interés, porque nos encontraremos con los dobles de los números perfectos. No estaba publicada y la hemos presentado en https://oeis.org/A256150.

2, 12, 56, 342, 992, 16256, 17822, 169332, 628056, 1189190, 2720850, 11085570, 35599122, 67100672, 1147210770, 1317435912, 1707135806, 7800334080, 11208986256, 13366943840, 17109032402, 17179738112, 46343540900, 58413331032, 83717924940, 204574837700, 274877382656, 445968192672, 589130699852, 632523563282, 718650391556, 772888018740,…

Hemos comprobado los primeros con Excel y después ampliado con este programa PARI porque resultan números demasiado grandes para una hoja de cálculo.

{for (i=1,i=10^6,n=i*(i+1);if(ispolygonal(sigma(n), 3),print(n)))}

Es rápido por la forma de generar los oblongos n=i*(i+1) durante el proceso.

Entre ellos están los dobles de los perfectos, 12, 56, 992, 16256, 67100672,…que tienen la forma $2^k(2^k-1)$ con el paréntesis un primo de Mersenne, y son oblongos. Para calcular su función sigma basta recordar que es una función multiplicativa y que al ser el paréntesis primo, su único divisor propio es 1:

$$\sigma(2^k) = 1 + 2 + 4 + \cdots 2^k = 2^{k+1} - 1$$

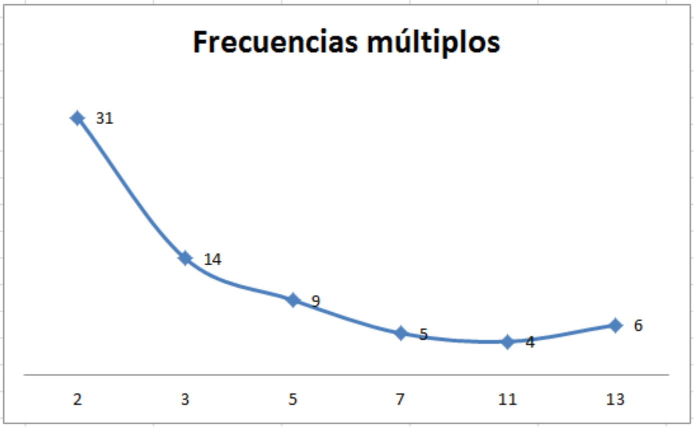
$$\sigma(2^k - 1) = 2^k - 1 + 1 = 2^k$$

Como ambos paréntesis representan primos entre sí, podemos multiplicar:

$$\sigma\left(2^k(2^k - 1)\right) = 2^k \times (2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} \times (2^{k+1} - 1)/2$$

Este resultado es triangular, luego pertenecerán a esta sucesión todos los dobles de perfectos.

Les hemos hecho el análisis de los múltiplos de los primeros primos con este resultado:



Los valores están de acuerdo con un proceso fuertemente influido por el azar. El valor para el 2 es lógico, porque todos los oblongos son pares.

Seguimos con otros casos:

Sigma cuadrada

Busquemos ahora los casos en los que SIGMA(N) sea un número cuadrado.

La lista de todos ellos ya está publicada en https://oeis.org/A006532. Son estos:

1, 3, 22, 66, 70, 81, 94, 115, 119, 170, 210, 214, 217, 265, 282, 310, 322, 343, 345, 357, 364, 382, 385, 400, 472, 497, 510, 517, 527, 642, 651, 679, 710, 742, 745, 782, 795, 820, 862, 884, 889, 930, 935, 966, 970, 1004, 1029, 1066, 1080, 1092,…

Por ser SIGMA una función multiplicativa, y como el producto de dos cuadrados es otro cuadrado, se cumplirá (ver A006532) que si dos términos de esta sucesión son primos entre sí, su producto pertenecerá también a la sucesión. Por ejemplo, 3 y 70 son primos entre sí, y su producto, 210, también pertenece a las sucesión.

Nosotros ahora distinguiremos algunos casos y presentaremos sucesiones no publicadas.

En primer lugar nos preguntaremos si un número cuadrado puede tener su sigma también cuadrada. La respuesta es afirmativa.

Números cuadrados con sigma cuadrada

Se conocen todos los casos, que están recogidos en https://oeis.org/A008848

1, 81, 400, 32400, 1705636, 3648100, 138156516, 295496100, 1055340196, 1476326929, 2263475776, 2323432804, 2592846400, 2661528100, 7036525456, 10994571025, 17604513124, 39415749156, 61436066769, 85482555876, 90526367376, 97577515876, 98551417041,…

Aquí se ve que son muy escasos, porque estamos exigiendo una condición fuerte.

En esta sucesión no hay cuadrados de números primos. Todos tienen al menos dos factores distintos. La razón es la siguiente: Si **p** es primo, SIGMA(p^2)=p^2+p+1. Si esta expresión ha de ser un cuadrado, se cumplirá $p^2+p+1=m^2$, con m>p. De ahí deducimos que $p+1=m^2 - p^2 = (m+p)(m-p)$, pero esto es imposible porque con tomar sólo m+p ya es mayor que p+1.

El caso contrario sí se puede dar: la sigma de 81 es 11^2 y la de 400, 31^2. Es probable que sólo se den esos dos casos.

Tal como procedíamos en la anterior entrada, intentaremos buscar términos de la sucesión que sean triangulares, oblongos o de otro tipo. Primos no pueden ser porque sigma(p)=p+1 si es primo, y tendríamos

$p+1=m^2$ y $p=m^2-1=(m+1)(m-1)$ y no sería primo salvo el caso de 3.

Triangulares con sigma cuadrada

Este caso no estaba publicado y hemos procedido a ello en https://oeis.org/A256151

1, 3, 66, 210, 820, 2346, 4278, 22578, 27966, 32131, 35511, 51681, 53956, 102378, 169653, 173755, 177906, 223446, 241860, 256686, 306153, 310866, 349866, 431056, 434778, 470935, 491536, 512578, 567645, 579426, 688551, 799480, 845650, 893116, 963966, 1031766, 1110795, 1200475, 1613706, 1719585, 1857628, 1991010,…

Los hemos obtenido con Excel y con este programa de PARI:

{for(i=1,2*10^3,n=i*(i+1)/2;if(issquare(sigma(n)),print1(n,", ")))}

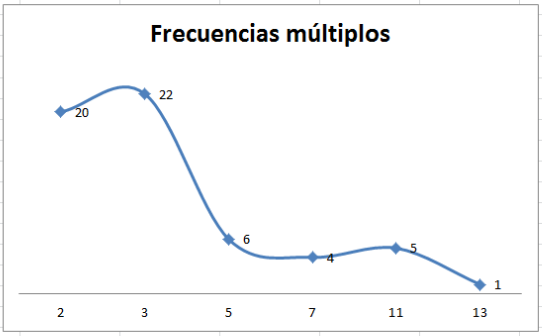
Algunos de ellos son libres de cuadrados

3	[3,1]	
66	[2,1][3,1][11,1]	
210	[2,1][3,1][5,1][7,1]	

Como SIGMA es una función multiplicativa y todos los factores son primos, si un número es el producto de primos N=p*q*r*s*…, SIGMA(N)=(p+1)(q+1)(r+1)(s+1)… y deberá tener los factores primos “emparejados”, a fin de que se forme un cuadrado. Lo vemos con un ejemplo:

210=2*3*5*7,
SIGMA(N)=(2+1)(3+1)(5+1)(7+1)=3*4*6*8=3*3*2*2*2*2*2*2=24^2

Casi todos ellos son múltiplos de 2 o de 3, e incluso de ambos, como puedes ver en su perfil para los primeros primos:



Un caso curioso que no es múltiplo de estos dos primos es el de 32131, producto de los primos 11, 23 y 127, que es triangular porque

32131=11*23*127=253*127=253*254/2,

y su sigma, por la propiedad multiplicativa, será Sigma(32313)=12*24*128=2^{12}*3^2, número cuadrado. Se produce el emparejamiento de factores que vimos en anteriores párrafos.

Semiprimos con sigma cuadrada

Si los semiprimos tienen los dos factores primos iguales, no presentan interés, ya que son cuadrados y hemos estudiado ese caso. Si sus factores son distintos, N=p*q y SIGMA(N)=(p+1)(q+1) ha de ser un cuadrado. Esto exige que las partes libres de cuadrados de p+1 y q+1 sean iguales.

Los números que cumplen esto son:

22, 94, 115, 119, 214, 217, 265, 382, 497, 517, 527, 679, 745, 862, 889, 1174, 1177, 1207, 1219, 1393, 1465, 1501, 1649, 1687, 1915, 1942, 2101, 2159, 2201, 2359, 2899, 2902, 2995, 3007, 3143, 3383, 3401, 3427, 3937, 4039, 4054, 4097, 4315, 4529, 4537, 4702, 4741, 5029, 5065, 5398, 5587, 5729, 6167, 6169, 6457, 6539, 6739, 6769, …

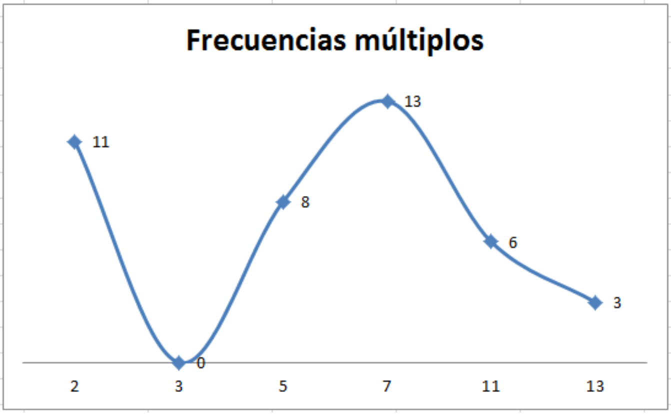
Se pueden reproducir con PARI

{for(i=1,10^4,if(omega(i)==2&&issquarefree(i)&&issquare(sigma(i)),print1(i,", "))))}

También se encuentran con Excel si se dispone de las funciones adecuadas.

Los hemos publicado en https://oeis.org/A256152

En su gráfico de múltiplos vemos que ningún elemento lo es de 3.



Ningún término es múltiplo de 3, por las razones que expondremos en el siguiente párrafo. Llama la atención el predominio de los múltiplos de 7. Una causa probable es que su sigma es 50, el doble de un cuadrado.

Esto nos invita a definir un primo asociado de otro si es el primero que multiplicado por él da un producto con sigma cuadrada. El 3 no tiene asociado, porque es el único primo del tipo k^2-1, ya que otro primo de ese tipo sería el producto de dos factores (k+1)(k-1) ambos mayores que 1. Esto nos lleva a que sigma(3) es cuadrada, y su único asociado sería él mismo, pero entonces el semiprimo 3*3 no entrarían en nuestro estudio.

Aquí tienes los primeros (el 3 no tiene y se ha asignado un 1)

2	11
3	1
5	23
7	17
11	47
13	223
17	31
19	79
23	53
29	269
31	71
37	151
41	167
43	1583
47	107
53	149
59	239
61	557
67	271
71	97
73	2663
79	179
83	2099
89	359
97	127
101	2549
103	233
107	191
109	439
113	1823
127	199
131	1187
137	2207
139	1259
149	293
151	607
157	631
163	4099
167	1049
173	4349
179	499
181	727
191	431
193	6983
197	3167
199	241
211	1907
223	349
227	911
229	919
233	1663

Hemos probado a encontrar otro más además del 3 que no tenga asociado. Hemos usado PARI y nos ha resultado que hasta 10000 todos tienen asociado algún primo. Aquí tienes algunos cuyo asociado sobrepasa 10^6:

```
1753, 1185703
2473, 1091033
3083, 1233599
3853, 2605303
4273, 1094143
5233, 1339903
5573, 2229599
5653, 2261599
5953, 1524223
6113, 1198343
6197, 1791221
6203, 3573503
6833, 1339463
7213, 2604253
7369, 1061279
7477, 2161141
7603, 15398099
7691, 3392171
8363, 1012043
8389, 1208159
8779, 1062379
8933, 1751063
```

Llama la atención el asociado a 7603

Es probable que sea cierta la conjetura de que todo primo mayor que 3 posee un asociado tal que su producto tenga sigma cuadrada.

Podemos intentar buscar situaciones nuevas. Nosotros no lo haremos, pero aquí tienes alguna propuesta por si deseas completarla y publicarla en OEIS:

Oblongos con sigma cuadrada

210, 930, 2652, 26082, 34782, 42642,…

Triangulares con sigma oblonga

6, 28, 55, 496, 666, 780, 1540, 2145, 6441, 6903, 8128,…

Entre ellos están los números perfectos.

Intenta completarlas a más términos.

LA FUNCIÓN SIGMA Y SUS TRASLADOS

En esta entrada investigaremos los números enteros positivos tales que al sumarles k unidades, el valor de su función sigma (suma de divisores) no cambia, es decir:

$$\sigma(n) = \sigma(n + k)$$

Existen muchos ejemplos según los valores de k, y recorreremos algunos para destacar sus propiedades.

Será de utilidad repasar la fórmula de esta función según la descomposición factorial del número. Es la siguiente:

$$\sigma(N) = \prod \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

donde $\mathbf{p_i}$ son los factores primos de N y $\mathbf{e_i}$ sus exponentes. Cada factor también se puede interpretar como la suma de potencias del número primo correspondiente desde p^0 hasta p^e:

$$\sigma(N) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots p_1^{e_1})\,(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots p_2^{e_2})\ldots$$

Una implementación sencilla (para Excel o Calc) de esta función es la siguiente, escrita en código VBasic, aunque en este blog se usa otra basada en la descomposición factorial:

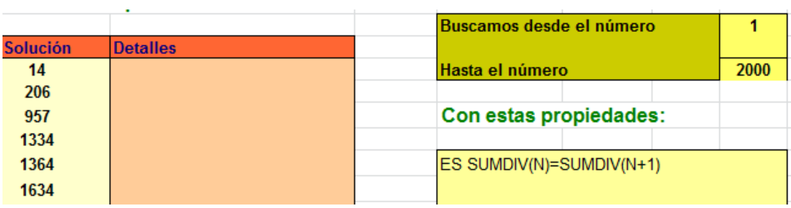
Public Function sigma(n)
Dim i, s
i = 1
s = n ‘La sigma se inicia con el valor de **n**
For i = 1 To n / 2 ‘El máximo divisor propio posible es n/2
If n / i = n \ i Then s = s + i ‘Si es divisor, se suma
Next i
sigma = s
End Function

Caso K=1

No es difícil construir un bucle de búsqueda de números consecutivos con la misma sigma. Los primeros son estos:

N	N+1	Sigma coincidente
14	15	24
206	207	312
957	958	1440
1334	1335	2160
1364	1365	2688
1634	1635	2640
2685	2686	4320
2974	2975	4464
4364	4365	7644
14841	14842	22932
18873	18874	28314
19358	19359	29040

La imagen siguiente está tomada del Buscador:



Están publicados en http://oeis.org/A002961

A002961 Numbers n such that n and n+1 have same sum of divisors.

14, 206, 957, 1334, 1364, 1634, 2685, 2974, 4364, 14841, 18873, 19358, 20145, 24957, 33998, 36566, 42818, 56564, 64665, 74918, 79826, 79833, 84134, 92685, 109214, 111506, 116937, 122073, 138237, 147454, 161001, 162602, 166934

En esta página se comenta que para valores de n < 2*10^10 el valor de sigma(n)/n está entre 1,5 y 2,25. No se sabe si esta sucesión es infinita.

Parece ser que 14 y 15 son los únicos semiprimos de la sucesión, y la sigma coincidente es 24 porque

$\sigma(14)= \sigma(2*7)=(1+2)(1+7)=3*8=24$

y

$\sigma(15)=\sigma(3*5)=(1+3)(1+5)=4*6=24$

Ni **p** ni **p+1** pueden ser primos en esta sucesión. Si **p** fuera primo, sería $\sigma(p)=1+p$, con lo que no podría alcanzar el valor de $\sigma(p+1)$. Si el que es primo es **p+1**, tendríamos $\sigma(p+1)=p+2$, con lo que los divisores propios de p deberían sumar 2, lo que no ocurre nunca.

206 y 207 son los siguientes (no semiprimos en este caso), porque

$\sigma(206)= \sigma(2*103)=(1+2)(1+103)=3*104=312$ y

$\sigma(207)= \sigma(3^2*23)=(1+3+9)(1+23)=13*24=312$

El código PARI que figura en la publicación citada no es el más compacto. Se puede usar preferiblemente este otro:

for(p=1,20000, if(sigma(p)==sigma(p+1), print1(p,", ")))

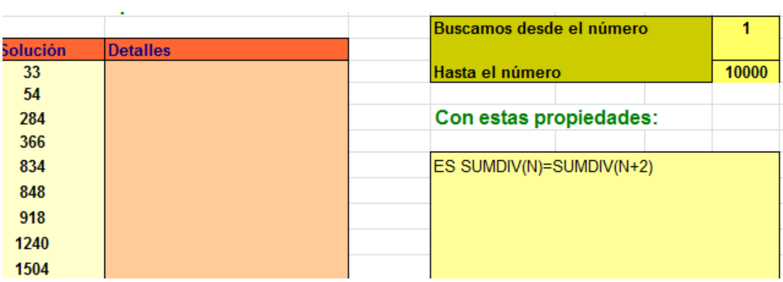
Hasta donde hemos explorado, la sigma común es múltiplo de 6.

Caso k=2

Aplicando la función sigma a dos números que se diferencien en dos unidades, resultan con resultados iguales los siguientes (primeras soluciones):

N	N+2	Sigma
33	35	48
54	56	120
284	286	504
366	368	744
834	836	1680
848	850	1674
918	920	2160
1240	1242	2880
1504	1506	3024
2910	2912	7056
2913	2915	3888
3304	3306	7200
4148	4150	7812
4187	4189	4320
6110	6112	12096
6902	6904	12960
7169	7171	7344

Con el Buscador:



Como en el caso anterior, era de esperar que estuviesen ya publicados:

A007373 Numbers n such that sigma(n+2) = sigma(n).

33, 54, 284, 366, 834, 848, 918, 1240, 1504, 2910, 2913, 3304, 4148, 4187, 6110, 6902, 7169, 7912, 9359, 10250, 10540, 12565, 15085, 17272, 17814, 19004, 19688, 21410, 21461, 24881, 25019, 26609, 28124, 30592, 30788, 31484, 38210, 38982, 39786, 40310,

En esta sucesión, al igual que en la anterior, no hay primos, y parece que tampoco cuadrados. Las sigmas comunes que aparecen, también son múltiplos de 6 en este caso.

Sí figuran semiprimos en esta sucesión (las dos últimas columnas son los factores primos de las dos primeras. Al ser semiprimos, los exponentes de cada corchete son iguales a 1):

33	35	48	[3,1][11,1]	[5,1][7,1]
4187	4189	4320	[53,1][79,1]	[59,1][71,1]
7169	7171	7344	[67,1][107,1]	[71,1][101,1]
24881	24883	25200	[139,1][179,1]	[149,1][167,1]
25019	25021	25344	[127,1][197,1]	[131,1][191,1]
59987	59989	60480	[223,1][269,1]	[239,1][251,1]
77057	77059	77616	[251,1][307,1]	[263,1][293,1]

Por ejemplo, $\sigma(4187)=(1+53)(1+79)=4320$ y $\sigma(4189)=(1+59)(1+71)=4320$

Abreviamos. Para el siguiente caso tenemos:

CASO K=3

N	N+3	Sigma
382	385	576
8922	8925	17856
11935	11938	18432
31815	31818	63648
32442	32445	64896
61982	61985	98496

Aquí el Buscador se ralentiza demasiado.

También están publicados.

A015861 Numbers n such that sigma(n) = sigma(n + 3).

382, 8922, 11935, 31815, 32442, 61982, 123795, 145915, 186615, 271215, 442362, 554715, 560382, 580635, 964535, 1191575, 1243375, 1369302, 1539942, 1642795, 2616702, 3141215, 3299062, 3556035, 3716895, 4201015, 5148294 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Por último el caso de diferencia 4:

No añadimos detalles.

N	N+4	Sigma
51	55	72
66	70	144
115	119	144
220	224	504
319	323	360
1003	1007	1080
2585	2589	3456
4024	4028	7560
4183	4187	4320
4195	4199	5040
5720	5724	15120
5826	5830	11664
5959	5963	6120
8004	8008	20160

A015863 Numbers n such that sigma(n) = sigma(n + 4).

51, 66, 115, 220, 319, 1003, 2585, 4024, 4183, 4195, 5720, 5826, 5959, 8004, 8374, 11659, 12367, 12561, 13581, 14338, 15365, 16116, 17840, 18718, 20541, 25130, 29393, 30170, 32665, 36516, 39913, 40660, 42423, 42922, 47841, 49762 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Los casos k=5 y k=6 estàn también publicados. Dejamos esta primera cuestión.

Caso k=5 http://oeis.org/A015865

Caso k=6 http://oeis.org/A015866

Para investigar otros casos (por ejemplo, el 22) puedes construir un bucle (lo desarrollamos en VBasic) similar al siguiente:

For n=1 to 10000 ‘Hemos escrito 10000 como ejemplo
K=22 ‘El 22 también es un ejemplo
If sigma(n)=sigma(n+k) then msgbox(n) ‘Si coinciden las sigmas, lo presentamos
Next n

Ordenando la búsqueda nos ha resultado

N	N+22	Sigma coincidente
57	79	80
85	107	108
213	235	288
224	246	504
354	376	720
476	498	1008
568	590	1080
594	616	1440
812	834	1680
1218	1240	2880

Así puedes proceder en otros casos.

Diferencias que no se dan

Podemos investigar si desde **1** hasta **m** existen números que no cumplan la propiedad para un valor de k. Podría ser esta, que devuelve las diferencias que no se dan:

```
Public Function norepitesigma(m, k)
Dim i, s
Dim norepe As Boolean

i = 1: norepe = True: s = 0
While i <= m And norepe
If fsigma(i, 1) = fsigma(i + k, 1) Then norepe = False:
s = i
i = i + 1
Wend
norepitesigma = s
End Function
```

Para valores menores que 10000 estas son las primeras diferencias que no se dan (hay más):

1879
2111
2287
2520
2669
2700
2760
2820
2880
2894
2940
2978
3000
3054

Probamos con 100000 y las diferencias de la tabla anterior inferiores a 5000 desaparecen. Esto nos hace sospechar que, dada una diferencia entre números con sigmas iguales, se alcanza siempre un valor para el que es válida esa diferencia. Para verlo mejor podríamos invertir el punto de vista: dada una diferencia, averiguar en qué número se da. Este problema no tiene cota de búsqueda, por lo que la efectuaremos con cotas fijadas por nosotros. Podemos usar:

Public Function tienesigmacomun(n, c)

'Para una diferencia n, creamos un bucle con cota c hasta que aparezca esa diferencia

Dim k, s
Dim notiene

k = 1: notiene = True: s = 0
While notiene And k < c ‘Avanzamos si no aparece o llegamos a la cota
If fsigma(k, 1) = fsigma(n + k, 1) Then notiene = False: s = k
k = k + 1
Wend
tienesigmacomun = s
End Function

Diferencia D	Aparece en K	K+D	sigma(K)	sigma(K+D)
1879	14390	16269	25920	25920
2111	13630	15741	25920	25920
2287	16172	18459	30576	30576
2520	12597	15117	20160	20160
2669	13618	16287	22320	22320
2700	10010	12710	24192	24192
2760	10332	13092	30576	30576
2820	10528	13348	24192	24192
2880	10556	13436	23520	23520
2894	12040	14934	31680	31680
2940	11781	14721	22464	22464
2978	10010	12988	24192	24192
3000	10395	13395	23040	23040
3054	10180	13234	21420	21420

Con esta función podemos desechar las diferencias de la tabla anterior. Todas ellas aparecen con una cota de 100000:

Esto nos hace sospechar que todas las diferencias que planteemos terminarán por aparecer para algún valor.

Lo puedes investigar en PARI:

tiene(n)=local(c=100000,nr=1,k=1,s=0);while(nr==1&&k<c,if(sigma(k)==sigma(k+n),nr=0;s=k);k+=1);s

for(i=1,50000,if(tiene(i)==0,print(i))

Este código recorre desde 1 hasta 50000 para encontrar números que no puedan ser diferencias de sigmas con cota 100000. Descubre dos casos en los que no aparecen con esa cota 100000, que son 20160 y 22680, pero aparecen en los números 100776 y 113373 respectivamente. Esto nos hace sospechar que todos los números, buscando lo suficiente, podrán ser diferencias de otros números con sigmas equivalentes.

Cambiando los parámetros 1000000 y 5000 puedes intentar descubrir si alguna diferencia no aparece nunca para una cota de 1000000 o mayor. Con esta cuestión abierta terminamos el tema.

RELACIONES ENTRE PHI(N) Y TAU(N)

Función TAU

Las funciones PHI y TAU, aplicadas a un número entero positivo, tienen algo de complementarias. La segunda, TAU, cuenta los divisores de un número N. También es llamada función *divisor*, o D(x). En el caso de un número primo *p*, es claro que los divisores son *1* y *p*, luego la función TAU valdrá 2 en este caso. Igualmente, es fácil deducir que para potencias de un número primo, p^k, $TAU(p^k)=1+k$

Puedes acudir a nuestra publicación *Funciones multiplicativas* (http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf)

para consultar la fórmula general.

$TAU(N)=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$

a_1, a_2, …a_k son los exponentes de los factores primos de N.

Por ejemplo, TAU(24)=TAU(2^3*3)=(1+3)(1+1)=8

Efectivamente, los divisores de 24 son ocho: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Función PHI

La función φ(n) (indicatriz o indicador de Euler) es **el cardinal del conjunto de elementos inversibles en Z_n** o bien el conjunto de números coprimos con n y menores que él contando el 1. Esta segunda versión es más clara y adecuada al estudio que vamos a iniciar: cuenta los números primos con N y menores que N, con el añadido del 1.

La función indicatriz de Euler es multiplicativa, porque si m y n son coprimos, se cumple que

φ(m). φ(n) = φ(m.n)

Su fórmula explícita es

$$\boldsymbol{\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}$$

(p_i son sus factores primos)

Por ejemplo, el número 18=3^2*2 posee un valor de PHI igual a 18(1-1/2)(1-1/3)=6, Podemos comprobar que los números coprimos con 18 y menores que él son: 1, 5, 7, 11, 13 y 17. En total 6.

En los números primos ***p*** el valor de PHI(***p***)=***p-1***, como es fácil deducir.

En algunos lenguajes de programación recibe el nombre de función *totient.*

Relaciones entre TAU y PHI

Para cualquier número natural N, los números comprendidos entre 1 y N pertenecen a uno de estos tres conjuntos:

{A} Divisores de N: los cuenta la función TAU

{B} Coprimos con N incluido el 1: los cuenta la función PHI. En ambos conjuntos se encuentra el 1, lo que hace que no sean disjuntos.

{C} Resto de números: son aquellos números ***r*** que no son divisores de N ni coprimos con él: tienen un m.c.d con N que es mayor que 1 y menor que ***r***.

Por ejemplo, en el número 30, los conjuntos serían:

{A} = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, pues 30=2*3*5 y TAU(30)=(1+1)(1+1)(1+1)=8

{B} = {1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}, y PHI(30)=30(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)=1*2*4=8

{C} = {4, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28}, que son 15 elementos.

La suma de los cardinales de los tres conjuntos es 31, porque el 1 está repetido, y 8+8+15=31.

Con este planteamiento se adivina que pueden existir varias relaciones distintas entre los tres cardinales. El primero lo recoge TAU y el segundo PHI. El tercero lo dejamos como complemento de los otros dos.

PHI=TAU

Según lo publicado en http://oeis.org/A020488, solo existen estos casos: 1, 3, 8, 10, 18, 24, 30.

Por ejemplo, en

N=10, TAU(10)=TAU(2*5)=(1+1)(1+1)=4

y

PHI(10)=10(1-1/2)(1-1/5)=1*4=4.

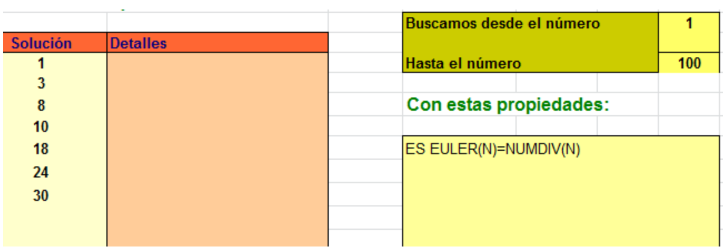
No debemos conformarnos con lo publicado. Puedes comprobarlo con las dos versiones sencillas para el cálculo de ambas funciones que hemos preparado con el Basic de las hojas de cálculo. Para no interrumpir el estudio, las incluimos en un Anexo.

Jud McCranie da razones en esa página de por qué no hay más soluciones, y lo probó A. P. Minin 1894. Lo comprobamos con nuestras funciones de hoja de cálculo:

N	PHI(N)	TAU(N)
1	1	1
3	2	2
8	4	4
10	4	4
18	6	6
24	8	8
30	8	8

El único número primo de la lista es 3, pues TAU(p)=2 para cualquier primo, y PHI(p)=p-1. Luego ha de ser 2=p-1 y p=3.

Con el Buscador (con palabras más sencillas,como EULER y NUMDIV) queda:



PHI doble de TAU

También existen pocos casos (http://oeis.org/A062516):

5, 9, 15, 28, 40, 72, 84, 90 y 120.

Con nuestras funciones tenemos:

N	PHI(N)	TAU(N)
5	4	2
9	6	3
15	8	4
28	12	6
40	16	8
72	24	12
84	24	12
90	24	12
120	32	16

Solución	Detalles
5	
9	
15	
28	
40	
72	
84	
90	
120	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	150

Con estas propiedades:

ES EULER(N)=2*NUMDIV(N)

TAU doble de PHI

Sólo hay dos casos:

N	PHI(N)	TAU(N)
2	1	2
6	2	4

Otros casos

Con PHI=TAU+1 parece que no hay ninguno, y con PHI+1=TAU, solo dos casos:

N	PHI(N)	TAU(N)
2	1	2
4	2	3

PHI múltiplo de TAU

Si solo tenemos en cuenta múltiplos propios, cuyo cociente es mayor que 1, nos aparecen muchas soluciones. Las primeras son:

N	PHI(N)	TAU(N)	COCIENTE
5	4	2	2
7	6	2	3
9	6	3	2
11	10	2	5
13	12	2	6
15	8	4	2
17	16	2	8
19	18	2	9
21	12	4	3
23	22	2	11
26	12	4	3
28	12	6	2
29	28	2	14
31	30	2	15
33	20	4	5
34	16	4	4

Si la relación de múltiplo es a la inversa, solo aparecen las soluciones ya vistas en las que TAU es el doble de PHI.

Por último, una curiosidad:

Pitagóricos

PHI y TAU son ambos catetos de una terna pitagórica. Solo se encuentran cinco soluciones:

20, 36, 60, 100, 300

Según el siguiente cuadro, en las ternas formadas sus elementos son múltiplos de las primitivas {3, 4, 5} o {9. 40, 41}.

	Factores(N)	TAU(N)	PHI(N)	SUMA	HIPOTENUSA
20	[2,2][5,1]	6	8	100	10
36	[2,2][3,2]	9	12	225	15
60	[2,2][3,1][5,1]	12	16	400	20
100	[2,2][5,2]	9	40	1681	41
300	[2,2][3,1][5,2]	18	80	6724	82

Esta sucesión estaba inédita, y la hemos publicado en en http://oeis.org/A308664. En esa página podrás leer un razonamiento de Giovanni Resta con el que justifica que la sucesión sea finita.

ANEXO

Listado de la función PHI (Basic de Excel)

Public Function euler(n)
Dim f, a, e
Dim es As Boolean

'Calcula la indicatriz de Euler de un número

a = n ‘Copia el valor de n
f = 2 ‘Inicia el listado de primos
e = n ‘Inicia el valor de PHI
While f <= a ‘Recorre los primos posibles
es = False ‘Variable que indica si hemos llegado a un divisor primo o no
While a / f = a \ f ‘Si es un factor, se va eliminando del valor de ***n***
a = a / f: es = True
Wend
If es Then e = e * (f - 1) / f ‘Si se ha encontrado un factor primo, se incorpora a PHI
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 ‘Busca el siguiente primo
Wend
euler = e
End Function

Listado de TAU

Es muy parecido al anterior

```
Public Function tau(n)
Dim f, a, e, exx


a = n ‘Copia el valor de n
f = 2 ‘Inicia el listado de primos
e = 1  ‘Inicia el valor de TAU
While f <= a ‘Recorre los primos posibles
exx = 0
While a / f = a \ f
a = a / f: exx = exx + 1 ‘Incrementa el exponente del factor primo encontrado
Wend
e = e * (1 + exx) ‘Construye TAU
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
tau = e
End Function
```

NÚMEROS CASI AMIGOS O COMPROMETIDOS

Hoy repasaremos los llamados *números comprometidos o casi amigos*. Son dos números m y n tales que la suma de los divisores no triviales de uno coincide con el valor del otro. Así, son de ese tipo, 48 y 75, ya que la suma de divisores (función SIGMA) de 48 es 48+24+16+12+8+6+4+3+2+1=124, pero si no contamos el 1 y el propio 48 (divisores triviales) nos queda 75, que es el otro número. Recíprocamente, SIGMA(75)=124, y eliminando 75 y 1, nos queda 48.

Esta idea de divisores no triviales se recoge en la función de Chowla, que se puede definir como CHOWLA(n)=SIGMA(n)-n-1. Así que en estos números se cumple

CHOWLA(48)=75 y CHOWLA(75)=48

Es evidente que esta función tiene valor 0 si un número es primo. Esto confirma que estos números que estudiamos son todos compuestos.

Es trivial también que la función SIGMA coincide en ambos números m y n del par (en el ejemplo, 124) y que su valor es m+n+1. Este hecho se toma también como definición de números comprometidos:

$$\sigma(\mathrm{m}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) = \mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{1}$$

Estos números están publicados en varios sitios.

Destacamos la de OEIS, en la que se les da el nombre de “números comprometidos”:

http://oeis.org/A005276

Betrothed (or quasi-amicable) numbers.
48, 75, 140, 195, 1050, 1575, 1648, 1925, 2024, 2295, 5775, 6128, 8892, 9504, 16587, 20735, 62744, 75495, 186615, 196664, 199760, 206504, 219975, 266000, 309135, 312620, 507759, 526575, 544784, 549219, 573560, 587460, 817479, 1000824, 1057595, 1081184,…

Están insertados por pares, por lo que son casi amigos 48 con 75, 140 con 195, y así hasta el final.

Búsqueda de números comprometidos

No es difícil encontrar estos pares de números. En la página de OEIS enlazada más arriba podéis consultar un procedimiento en PARI, pero, es tan sintético, que es preferible desarrollar una función en VBasic de

Excel, aunque se traduce fácilmente a otro lenguaje de programación.

Para cada número N, calcularemos la función SIGMA, suma de divisores y analizaremos si es mayor que N+1. Si lo es, la diferencia M=SIGMA(N)-N-1 es un candidato a pareja de N

Si SIGMA(M)=M+N+1, hemos dado con un número N del tipo buscado y M será su pareja.

La función SIGMA es muy popular. Una versión sencilla la tienes en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/10/la-funcion-sigma-y-sus-traslados.html

Con ella construimos una función que nos devuelva un 0 si el número no es comprometido, o su pareja M si lo es.

Function comprometido(n)

Dim m, s, c

s = sigma(n)
If s > n + 1 Then ‘Sigma suficientemente grande
‘Si m cumple la reciprocidad, vale, Si no, devuelve un cero

m = s - n - 1: If sigma(m) = m + n + 1 Then c = m Else c = 0
End If
comprometido = c
End Function

Esta función permite reproducir fácilmente las parejas comprometidas ya publicadas. Basta organizar una búsqueda y publicar solo las que presentan un resultado distinto de cero. En Excel las primeras serían:

M	N
48	75
75	48
140	195
195	140
1050	1925
1575	1648
1648	1575
1925	1050
2024	2295
2295	2024
5775	6128
6128	5775
8892	16587
9504	20735

Era previsible que las parejas aparecieran duplicadas, por la reciprocidad interna en ellas. Se puede programar que solo se publique uno de los miembros de la pareja.

De esta función deducimos un listado sencillo en PARI:

```
for(n=1,500,a=sigma(n)-n-1;if(a>1,if(sigma(a)-a-1==n,
print1(n, ", "))))
```

Se confirma el listado:

48, 75, 140, 195, 1050, 1575, 1648, 1925, 2024, 2295, 5775, 6128, 8892, 9504, 16587, 20735,…

Cuestiones derivadas

Todos los pares conocidos, hasta 10^{10}, tienen distinta paridad.
Con esta función podemos preguntarnos cuál es el primer par de comprometidos a partir de un número, por ejemplo, un millón. Hemos organizado la búsqueda y resultan

1000824 y 1902215

También podemos interpretar esto como una secuencia cíclica de dos pasos:

CHOWLA(CHOWLA(N))=N

Existen números en los que estos ciclos son de más de dos pasos. Son los casi sociales, estudiados por Mitchell Dickerman, como 1215571544, que da lugar a un ciclo de ocho pasos:

1215571544
1270824975
1467511664
1530808335
1579407344
1638031815
1727239544
1512587175
1215571544

Por último, estos números parecen no poseer otras propiedades, aparte de ser compuestos. Entre los primeros no hemos encontrado cuadrados, ni triangulares, o semiprimos., por ejemplo. Así que los dejamos aquí.

DIVERSOS ÓRDENES DE LA FUNCIÓN TAU

Una extensión de la definición de la función TAU, que es la que cuenta los divisores de un número, puede ser la que resuma las descomposiciones en dos factores, N=x*y, o, ya puestos, las de tres factores N=x*y*z, o cuatro. Así podríamos definir TAU_1, TAU_2, TAU_3,…según el número de esos factores.

En este blog hemos aludido alguna vez a la descomposición de un número en tres factores, pero sin tener en cuenta el orden de los mismos, que elegíamos ordenados en orden creciente.

Por ejemplo, se tratan en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/04/productos-de-tres-divisores-13.html y siguientes

En este estudio dedicaremos una pequeña referencia a TAU_2, que en realidad es la función TAU tradicional, para después dedicarnos a TAU_3 y TAU_4. A partir de ellas no es difícil estudiar las siguientes.

Función TAU_2(n)

Si buscamos todos los pares ordenados de divisores de N cuyo producto es N, en realidad estamos contando los divisores simples, porque cada divisor posee un complementario (N/d) respecto a N que también es divisor de N, lo que duplica su presencia en los productos.

En síntesis: **TAU_2(N) = TAU(N)**

Es lo único que estudiaremos de esta función, muy conocida y también muy usada en este blog.

Según el razonamiento anterior, contar divisores de un número N equivale a contar soluciones ordenadas de la ecuación **N=x*y** con **x** e **y** positivos.

Lo podemos comprender mejor con un ejemplo concreto. Hemos elegido el número 84:

El número de divisores de 84, o TAU(84), se calcula a partir de la descomposición factorial: $84=2^2*3*7$, aplicando la conocida fórmula del producto de exponentes incrementados en una unidad:

TAU(84)=(1+2)(1+1)(1+1)=12.

Los doce divisores son: 84, 42, 28, 21, 14, 12, 7, 6, 4, 3, 2 y 1

Viene bien recordar que el valor de TAU sólo depende de la signatura prima, que es el conjunto de exponentes, y no de los factores primos.

Por otra parte, las soluciones de 84=x*y se pueden encontrar con nuestra herramienta Cartesius (http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Con ella podemos usar el siguiente planteo:

xtotal=2
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

Se sigue fácilmente: Combinar dos números, entre 1 y 84, que sean ambos divisores de 84, y que su producto sea también 84. Resultan las soluciones:

X1	X2
1	84
2	42
3	28
4	21
6	14
7	12
12	7
14	6
21	4
28	3
42	2
84	1

Como cada divisor **d** p

osee un único complementario **N/d** para conseguir el 84, es evidente que resultarán también 12 soluciones, con lo que comprobamos que esta forma de definir TAU es válida.

Función TAU_3(n)

Ya se indicó más arriba que la descomposición en tres factores ya se ha abordado en este blog, pero ahora consideraremos todas las ordenaciones posibles de las tres soluciones de la ecuación **N=x*y*z**. No es difícil razonar cómo encontrar el número de soluciones. Basta considerar que **z** ha de tomar todos los valores posibles de divisores de **N**, y que **x*y** serían entonces todos los productos posibles del complementario de z, **N/z**. Por tanto, cada valor de z se combinará con las soluciones de **N/z=x*y**, que vimos más arriba que coinciden con el número de divisores de N/z. Por tanto TAU_3(N) se encuentra sumando ***los números de divisores de cada divisor de N***.

Lekraj Beedassy lo expresa muy bien en OEIS: *“Number of divisors of n's divisors”*.

Lo comprobaremos de varias formas con el mismo ejemplo del 84. Comenzaremos con Cartesius:

xtotal=3
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

El mismo plantamiento que con dos factores, adaptándolo a tres. Resultan entonces 54 soluciones.

Total
54

Ahora lo resolveremos con una función para Excel o Calc:

Public Function tau_3(n)
Dim i, j, s

s = 0 ‘Inicio del contador
For i = 1 To n
If n / i = n \ i Then ‘Recorre los divisores de N
For j = 1 To i
If i / j = i \ j Then s = s + 1 ’Aumenta el contador con “divisores de divisores”
Next j
End If

Next i
tau_3 = s
End Function

Si lo aplicamos al número 84, se confirma que TAU_3(84)=54

En https://oeis.org/A007425 están publicados los valores para los primeros números:

A007425 d_3(n), or tau_3(n), the number of ordered factorizations of n as n = r s t.

1, 3, 3, 6, 3, 9, 3, 10, 6, 9, 3, 18, 3, 9, 9, 15, 3, 18, 3, 18, 9, 9, 3, 30, 6, 9, 10, 18, 3, 27, 3, 21, 9, 9, 9, 36, 3, 9, 9, 30, 3, 27, 3, 18, 18, 9, 3, 45, 6, 18, 9, 18, 3, 30, 9, 30, 9, 9, 3, 54, 3, 9, 18, 28, 9, 27, 3, 18, 9, 27, 3, 60, 3, 9, 18, 18, 9, 27, 3, 45, 15, 9, 3, 54, 9, 9, 9, 30,…

Puedes comprobar valores con Cartesius o nuestra función.

Los códigos PARI publicados en esta página son tan ingeniosos, que es prferible copiar alguno. Por ejemplo:

a(n)=sumdiv(n, x, sumdiv(x, y, 1)) \\ Joerg Arndt, Oct 07 2012

Pide sumar, para cada divisor de N, un 1 por cada uno de sus divisores, lo que equivale a contarlos. Lo probamos en la página web de PARI:

for(i=1, 200, print1(sumdiv(i, x, sumdiv(x, y, 1)),", "))

```
? for(i=1, 200, print1(sumdiv(i, x, sumdiv(x, y, 1 )),", "))
1, 3, 3, 6, 3, 9, 3, 10, 6, 9, 3, 18, 3, 9, 9, 15, 3, 18, 3, 18, 9, 9, 3, 30, 6, 9,
10, 18, 3, 27, 3, 21, 9, 9, 9, 36, 3, 9, 9, 30, 3, 27, 3, 18, 18, 9, 3, 45, 6, 18,
9, 18, 3, 30, 9, 30, 9, 9, 3, 54, 3, 9, 18, 28, 9, 27, 3, 18, 9, 27, 3, 60, 3, 9, 1
8, 18, 9, 27, 3, 45, 15, 9, 3, 54, 9, 9, 9, 30, 3, 54, 9, 18, 9, 9, 9, 63, 3, 18, 1
8, 36, 3, 27, 3, 30, 27, 9, 3, 60, 3, 27, 9, 45, 3, 27, 9, 18, 18, 9, 9, 90, 6, 9,
9, 18, 10, 54, 3, 36, 9, 27, 3, 54, 9, 9, 30, 30, 3, 27, 3, 54, 9, 9, 9, 90, 9, 9,
18, 18, 3, 54, 3, 30, 18, 27, 9, 54, 3, 9, 9, 63, 9, 45, 3, 18, 27, 9, 3, 90, 6, 2
7, 18, 18, 3, 27, 18, 45, 9, 9, 3, 108, 3, 27, 9, 30, 9, 27, 9, 18, 30, 27, 3, 84,
3, 9, 27, 36, 3, 54, 3, 60,
```

Coincide, como era de esperar, con los publicados.

Intervienen los números triangulares

Todos los resultados son productos de números triangulares y dependen de la signatura prima de N, y no de los valores de los factores primos.

Introducimos el tema con algunos ejemplos:

N es primo

En ese caso Tau_3(N)=3, porque los productos *xyz* posibles serían 11p,1p1, y p11, es decir T(1+1)=3, representando por T el triangular correspondiente. También podemos acudir a una partición plana que represente la segunda definición que hemos dado (https://en.wikipedia.org/wiki/Plane_partition)

1 p

1

Es un esquema triangular de lado 2

*N es semiprimo N=p*q con factores primos diferentes*

Los productos xyz serían

N11, 1N1, N11, 1pq, 1qp, qp1, q1p, pq1, p1q son nueve, que coincide con T(1+1)T(1+1)=3*3=9

Como partición plana:

N p q 1
p 1
q 1
1
Resulta TAU_3(pq)=9

Para un semiprimo cuadrado

Los productos serían 11n,1n1, n11, 1pp, p1p, pp1 son seis: T(2+1)=T(3)=6

En representación de dos dimensiones:

N p 1
p 1
1
TAU_3(p^2)=6

Para exponentes 2 y 1, como el 12:

Los productos serían 1(12)1, 11(12), (12)11, 143, 134, 413, 431, 314, 341, 223, 232, 322, 126, 162, 216, 261, 612, 621 son 18, T(2+1)T(1+1)=6*3=18

En un esquema de partición plana se organizarían así:

12 6 4 3 2 1
6 3 2 1
4 2 1
3 1
2 1
1
TAU_3(p^2q)=18

Los divisores de los divisores resultan ser 18, ordenados.

Aquí nos detenemos. Hemos comprobado que para un factor el TAU_3(N) es un triangular, y para dos factores, un producto de triangulares. Pues bien, ese esquema se conserva, y si un número posee varios factores primos con diferentes exponentes, bastará sustituir en la fórmula de la función TAU los paréntesis por números triangulares

$$\mathbf{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \ldots (1 + a_k)}$$

$$\mathbf{TAU_{3(N)} = T(1 + a_1)T(1 + a_2)T(1 + a_3) \ldots T(1 + a_k)}$$

Lo podemos razonar descomponiendo la partición plana en diversas zonas cuando se añade un factor nuevo. Tomaremos el 12 como ejemplo y realizaremos un producto cartesiano entre los datos del 4 con los del 3

			TAU_3(3)		
		1	1	3	
	4	4	4	12	
TAU_3(4)	2	2	2	6	Divisores de 12
	1	1	1	3	
	2	2	2	6	Divisores de 6
	1	1	1	3	
	1	1	1	3	Divisores de 3
		TAU_3(12)			

Hemos representado en colores distintos las zonas en las que se divide el producto cartesiano de seis filas y tres columnas:

En rojo figuran los elementos de TAU_3(4), los que había antes de incorporar el 3. En la tercera columna figuran los divisores en los que interviene el nuevo factor 3. Las zonas horizontales de distinto color representan los "divisores de divisores", que son fundamentales en este estudio.

Es fácil comprender que obtendríamos un esquema similar si el nuevo factor estuviera elevado a un exponente mayor que 1. Ahí lo dejamos y nos creemos sin desarrollarlo que también se obtendría un producto de triangulares.

Sólo comprobaremos la fórmula con nuestras funciones. Por ejemplo, $72=2^3*3^2$, luego según la fórmula sugerida, tendríamos

TAU_3(72)=T(1+3)T(1+2)=10*6=60

Con nuestra función

N	72
TAU_3(N)	60

Con el código PARI de Joerg Arndt

print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1)))

```
? print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1 )))
60
```

```
print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1 )))
```

Función TAU_4(n)

El estudio de TAU_3 nos ha abierto caminos y los hemos aprovechado con calma. Ahora sólo resumiremos algunos de ellos en los demás casos.

Si definimos TAU_4(N) como como el número de productos *xyzu* de cuatro factores (con ordenación) cuyo producto es N, podremos comenzar como en el caso de 3, con nuestra herramienta Cartesius. Sería así en nuestro ejemplo del 84:

xtotal=4
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

Al combinar cuatro factores, el proceso es más lento, pero no excesivamente, y nos da un resultado de 160:

Total
160

Algunas ideas sobre TAU_3(N) se pueden ampliar a TAU_4(N). La primera es que la frase "divisores de divisores" habrá que cambiarla por "Valores de TAU en divisores", ya que, al añadir un factor nuevo en el producto xyzv, este no se combina con divisores, sino con productos que vimos al principio que representaban a TAU. Así, el esquema bidimensional no se rellenará con divisores, sino con su número de divisores. Recordemos que en TAU_3 usábamos este esquema

12 6 4 3 2 1
6 3 2 1
4 2 1
3 1
2 1
1

Ahora deberíamos sustituir cada divisor por el valor de TAU (número de divisores) en cada uno. Lo hemos efectuado en Excel relacionando los dos esquemas:

	Cuenta los divisores de divisores				
12	6	4	3	2	1
6	3	2	1		
4	2	1			
3	1				
2	1				
1					
TAU_3		Cuenta		18	

Suma el número de divisores de todos los divisores					
6	4	3	2	2	1
4	2	2	1		
3	2	1			
2	1				
2	1				
1					
TAU_4		SUMA			40

Como podemos observar, TAU_4(12)=40.

Podíamos añadir un bucle a nuestra función en VBasic para TAU_3, pero resultaría algo lenta. Por otra parte, no es difícil la comprobación con Cartesius, cambiando datos en las condiciones que usamos para el 84. Sin embargo, parece más útil comprobar el cálculo recordando la fórmula para TAU_3 que usa números triangulares

$$\mathbf{TAU_{3(N)} = T(1 + a_1)T(1 + a_2)T(1 + a_3) \ldots T(1 + a_k)}$$

En efecto, para TAU_4 se pueden sustituir por tetraedros, pirámides triangulares, ya que las posibilidades dependen de tres dimensiones. Esta idea es correcta y se puede aplicar en este caso. Hay que recordar que la fórmula del tetraedro de orden n es ***TE(n)=n(n+1)(n+2)/6*** (ver nuestra publicación Números piramidales:

http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf)

En el caso de 12 quedaría:

$12=2^2*3$

TAU4_(12)=TE(1+2)*TE(1+1)=3*4*5/6*2*3*4/6=10*4=4
0

Con ello queda comprobada esta técnica, que se amplía a TAU_5, TAU_6,…aumentando dimensiones a las pirámides.

Puedes repasar todo en la sucesión https://oeis.org/A007426, en la que están publicados los primeros valores de TAU(N):

1, 4, 4, 10, 4, 16, 4, 20, 10, 16, 4, 40, 4, 16, 16, 35, 4, 40, 4, 40, 16, 16, 4, 80, 10, 16, 20, 40, 4, 64, 4, 56, 16, 16, 16, 100, 4, 16, 16, 80, 4,…

Con esto, podemos seguir ampliando productos, pero con lo que tenemos ya se comprende la esencia de estas funciones TAU.

COMO UNA FUNCIÓN INVERSA

Hace tiempo publicamos unas entradas dedicadas a investigar si un número es el resultado de aplicar una función aritmética a otro. No llamamos función inversa a este proceso porque normalmente cada número puede provenir de varios orígenes distintos.

Dado un número natural N cualquiera se intenta encontrar otro número M natural tal que al aplicarle una cierta función aritmética, nos resulte el primero, es decir F(M)=N.

Como en teoría de números suelen existir varias soluciones, **elegiremos siempre la menor de ellas**. La representaremos con el prefijo MF seguido del nombre de la función.

En este regreso al tema prescindiremos de algunos detalles, e intentaremos generalizar los procesos. Lo efectuaremos mediante una función que nos devuelva el menor número M tal que F(M)=N. Nos basaremos en un esquema mínimo, tanto en VBasic como en PARI, dejando bien destacadas dos líneas en las que modificaremos la función y la cota de búsqueda.

Es muy difícil acotar la búsqueda en general. Una estrategia es la de fijar una cota, por ejemplo 10^4, para números pequeños y tratar luego aparte las excepciones. Si con una cota no aparece el resultado, habrá que ampliarla, y si se sigue obteniendo un resultado negativo, buscar otros métodos teóricos para resolver la cuestión o dejarla como conjetura.

La función que proponemos devuelve un cero si no encuentra resultado, y en caso positivo, devuelve el menor valor que cumpla los requisitos.

En los ejemplos se usan las funciones TAU, SIGMA, PHI, que hemos usado en este blog en algún momento. Puedes buscar ahí sus códigos o definiciones.

Esquema de función

Function mfun(n)
Dim k, a, f, cota
Dim vale As Boolean

'En esta línea concretamos la cota
cota = 10 ^ 4 *‘Para rellenar previamente*

k = 1’Inicio de la búsqueda
a = 0 ‘Variable del resultado
vale = False ‘No hay todavía solución
While Not vale And k < cota
'En esta línea concretamos la función
f = tau(k) *‘Para rellenar previamente*
If f = n Then vale = True: a = k ‘Se encontró la solución
k = k + 1
Wend
mfun = a
End Function

Hemos rellenado como ejemplo la función TAU, o número de divisores. Aplicada a los primeros números nos devuelve las primeras soluciones de MF_TAU, es decir, los menores números cuya función TAU devuelve el número dado.

N	MF_TAU(N)
1	1
2	2
3	4
4	6
5	16
6	12
7	64
8	24
9	36
10	48
11	1024
12	60
13	4096
14	192
15	144
16	120
17	0
18	180
19	0

Es ilustrativo observar los valores que son potencias de 2, los que son libres de cuadrados, y los que dan un cero. En los primeros se puede comprobar contando, como 64=MF_TAU(7), ya que los divisores de 64 son siete: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Los libres de cuadrados, como el 6, se corresponden con soluciones pares, y los que contienen cuadrados, salvo casos particulares, provienen de impares, como 144=MF_TAU(15). El caso del 17 y el 19 es especial, porque lo que ha ocurrido es que la cota se ha quedado corta. La subimos y queda:

N	MF_TAU(N)
17	65536
19	262144

Estos dos ejemplos ilustran el problema con el que nos encontraremos, y es que, a veces, la cota que fijemos se queda pequeña.

Estos valores de MF_TAU están publicados en

http://oeis.org/A005179

1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144, 120, 65536, 180, 262144, 240, 576, 3072, 4194304, 360, 1296, 12288, 900, 960, 268435456

En esta página puedes consultar algunos valores concretos de esta función. Por ejemplo, para **N=p primo**, el resultado es **2^(p-1).** Para un semiprimo de tipo **N=pq** con **p<=q** obtendríamos **3^(p-1)*2^(q-1)**.

Son resultados fáciles de razonar, pero no es nuestro objetivo seguir con ellos.

Observamos que los resultados aparecen de forma irregular y que algunos, como el último, requieren cotas grandes. Esto justifica que pensemos en una versión en PARI, que aporta más velocidad y un rango mayor de valores. Podemos usar este código:

ff(n)=numdiv(n) \\Aquí definimos la función
mfun(n)={my(cota=10^8,k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<cota,f=ff(k);if(f==n,vale=1;a=k);k+=1);a}\\El mismo algoritmo
for(i=1,20,print1(mfun(i),", ")) \\Pedimos resultados en un rango

El código está adaptado a nuestro ejemplo, la función TAU. En la primera línea escribimos la función (aquí *numdiv*). Dentro del código, podemos alterar la cota, si vemos que es excesiva (10^8).

Lo hemos comprobado en la página oficial de PARI (https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html)

```
? ff(n)=numdiv(n) \\Aquí definimos la función
mfun(n)={my(cota=10^8,k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<cota,f=ff(k);if(f==n,vale=
1;a=k);k+=1);a}\\El mismo algoritmo
for(i=1,20,print1(mfun(i),", ")) \\Pedimos resultados en un rango

1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144, 120, 65536, 180, 2621
44, 240,
```

Función SIGMA

Recuerda que la función **SIGMA** suma todos los divisores de un número. Generalizaciones de la misma son las funciones SIGMA_K, que suman los divisores elevados al exponente K

(Ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/la-familia-de-las-sigmas-1.html y la entrada siguiente).

Cualquier valor elegido al azar no tiene por qué ser el resultado de este tipo de sumas. De hecho, se sabe ya qué valores puede tomar **SIGMA(N)** y cuáles no.

En nuestro caso deberíamos cambiar la línea que define la función en VBasic:

'En esta línea concretamos la función
f = sigma(k) ‘Para rellenar previamente

La cota la dejamos en 10^3. Pedimos resultados y nos queda:

N	MF_SIGMA(N)
1	1
2	0
3	2
4	3
5	0
6	5
7	4
8	7
9	0
10	0
11	0
12	6
13	9
14	13
15	8
16	0
17	0
18	10
19	0
20	19

Observamos la abundancia de ceros, lo que significa que para esos números no hay solución. Podemos aumentar la cota, pero ya sabemos, por estar publicados, en qué casos ocurre esto. No tienen solución los incluidos en http://oeis.org/A007369: 2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23… La función SIGMA no puede tener nunca estos valores. No existe ningún número cuya suma de divisores sea 17, 19 o 21.

Sí la tienen estos otros (http://oeis.org/A002191): 1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20…Por ejemplo, el valor 13 se corresponde con la suma de divisores de 9: 9+3+1=13.

Para reproducir esta situación podemos acudir a la siguiente consideración: Para un N dado, SIGMA(N)≥1+N, porque ese sería el valor más desfavorable, que se da cuando N es primo. En cualquier otra situación, aparecerán otros divisores, superando así el valor 1+N. así que, N≤SIGMA(N)-1. Por tanto, si nos dan un valor fijo K=SIGMA(N), bastará buscar N en el rango 1…K-1.

Así que, en este caso, la mejor cota es N

Comprobamos las dos soluciones:

Números que siempre tienen solución:

N	MF_SIGMA
1	1
3	2
4	3
6	5
7	4
8	7
12	6
13	9
14	13
15	8
18	10
20	19
24	14

Coinciden con los publicados:

1, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 20…http://oeis.org/A002191

Observa que cuando la diferencia entre N y MF_SIGMA(N) es 1, el número de la segunda columna es primo.

En la tabla se intuye que los dobles de los perfectos, como el 12, coinciden con la suma de divisores de su mitad, el 6.

Si imponemos la condición de que MF_SIGMA(N) sea nula, obtendremos el conjunto complementario, de los que no presentan solución:

N
2
5
9
10
11
16
17
19
21
22
23
25
26
27
29

También hay coincidencia con lo publicado (https://oeis.org/A007369)

Podemos usar una versión en PARI:

```
ff(n)=sigma(n)
mfun(n)={my(cota=200,k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<cota,f=ff(k);if(f==n,vale=1;a=k);k+=1);a}
for(i=1,50,if(mfun(i)==0,print1(i,", ")))
```

```
? ff(n)=sigma(n)
mfun(n)={my(cota=200,k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<cota,f=ff(k);if(f==n,vale=
1;a=k);k+=1);a}
for(i=1,50,if(mfun(i)==0,print1(i,", ")))
2, 5, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 4
5, 46, 47, 49, 50,
```

Las otras sigmas

Si sumamos los cuadrados de los divisores de un número nos resulta la función SIGMA_2, con los cubos SIGMA_3 y, en general, podemos definir toda la familia para exponentes mayores.

¿Qué números coinciden con la suma de los cuadrados de los divisores de otros?

En este caso bastará usar las funciones predefinidas que ya hemos usado en otra ocasión

(Ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2011/03/la-familia-de-las-sigmas-2.html)

Obtenemos así la lista de números cuya MF_SIGMA_2 está definida:

N	MF_SIGMA_2
1	1
5	2
10	3
21	4
26	5
50	6
85	8
91	9
122	11
130	10
170	13
210	12
250	14
260	15
290	17

Entre ellos están los de la forma $1+p^2$ con p primo.

Figuran en http://oeis.org/A001157, pero con algunos repetidos respecto a nuestra sucesión.

En PARI

Como este lenguaje no tiene implementadas las SIGMAS_K, deberemos introducirlas en la línea de ff:

ff(n)=sumdiv(n, d, d^2)
mfun(n)={my(cota=200,k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<cota,f=ff(k);if(f==n,vale=1;a=k);k+=1);a}
for(i=1,300,if(mfun(i)<>0,print1(i,", ")))

El uso de **sumdiv** es muy potente. Recorremos con él los divisores **d** y sumamos **d^2** (en este caso).

Invitamos a los lectores a ampliar la cuestión, modificando la primera línea, a SIGMA_3, SIGMA_4, y demás. Deben obtener:

Para SIGMA_3: **1, 9, 28, 73, 126, 252, 344, 585, 757**,…(tarda un poco) (https://oeis.org/A001158)

Para SIGMA_4: **1, 17, 82, 273, 626**,…

(https://oeis.org/A001159)

En PARI

mfsigma3(n)={k=0;while(k<=n&&sumdiv(k, d, d^3)<>n, k=k+1);if(k>=n,k=0); return(k)}

Un caso atractivo es el de USIGMA, que suma sólo los divisores unitarios, que son aquellos d primos con N/d. En este caso, la línea de ff(n) en PARI quedaría así:

ff(n)=sumdiv(n, d, d*(gcd(d,n/d)==1))

Podemos traducir como “sumar todos los divisores d que sean primos con N/d”

Los primeros valores de MF_USIGMA, a partir del 2, son: 2, 3, 4, 5, 0, 7, 8, 9, 0, 6, 0, 13, 0, 0, 16, 10, 0, 12, 0, 0, 0, 14, 0, 25, 0, 27, 0, 18, 0, 21, 32, 0, 0, 22, 0, 37, 0, 28 (Ver http://oeis.org/A063972)

Sumamos y contamos factores primos

Vamos a fijarnos en los divisores primos, y en las funciones que los cuentan y suman.

Función Omega

Esta función cuenta los factores primos distintos de un número natural. No se cuentan las repeticiones, sino el número de primos distintos. Así, $\omega(6)= \omega(12)= \omega(18)= \omega(24)=2$, porque todos comparten dos primos distintos, 2 y 3.

Para encontrar MF_OMEGA(N) de un número bastará encontrar el primorial

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/02/el-primorial.html), que contiene tantos factores primos como indique N. Esto es así porque los primoriales tienen como expresión 2*3*5*…*k , y es fácil entender que son los números mínimos que tienen k factores primos distintos.

Para comprobarlo, volvemos a nuestro esquema de búsqueda, usando OMEGA en la línea adecuada:

'En esta línea concretamos la función
f = omega(k) ‘Para rellenar previamente

El resultado es:

N	MF_OMEGA(N)	FACTORES
1	2	[2,1]
2	6	[2,1][3,1]
3	30	[2,1][3,1][5,1]
4	210	[2,1][3,1][5,1][7,1]
5	2310	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1]
6	30030	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1][13,1]
7	510510	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][17,1]
8	9699690	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][17,1][19,1]
9	223092870	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][17,1][19,1][23,1]
10	6469693230	[2,1][3,1][5,1][7,1][11,1][13,1][17,1][19,1][23,1][29,1]

Efectivamente, son primoriales. Los últimos los hemos rellenado manualmente.

Con bigomega

Bigomega cuenta los factores primos con repetición. Esto cambia totalmente el planteamiento, porque es fácil ver que MF_BIGOMEGA(N)=2^N

Es fácil de entender: si con factores primos distintos el mínimo vendrá de productos tipo 2*3*5*7…, si se admite repetición, se convertirán en 2*2*2*2…como candidatos a MF_BIGOMEGA

Por cambiar de procedimiento, lo comprobamos con PARI:

```
? mfun(n)={my(k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<10^5,f=bigomega(k);if(f==n,vale=1;
a=k);k+=1);a}
for(i=1,10,print1(mfun(i),", "))
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,
```

Sólo hemos cambiado OMEGA por BIGOMEGA.

Función SOPF

Esta función suma los factores primos de un número sin contar repeticiones. Por ejemplo, sopf(84)=3+2+7=12, porque aunque el factor 2 figura al cuadrado en la descomposición factorial, sólo se cuenta una vez.

Podemos definir MF_SOPF(N) como el mínimo número cuyo resultado en la función SOPF es N. En el ejemplo anterior no sería 84 el valor de MF_SOPF(12). Habría que profundizar más

¿Cómo encontramos el valor de MF_SOPF(N)?

Es fácil encontrar una cota para un número con un valor de SOPF dado, sea, por ejemplo N. Todos los sumandos primos en los que pueda descomponerse N serán menores o iguales que N y como todos son mayores o iguales a 2, su número no sobrepasará N/2. Así que el número buscado tendrá como cota N^(N/2). Es muy amplia, y en la mayoría de los casos se encontrará la solución mucho antes, pero lo importante es que existe y nos permite acotar la búsqueda. La función SOPF la tenemos implementada, por ejemplo en https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/11/unidos-por-el-sopf.html

Así que en la línea de definición de la función escribiremos f=sopf(k), dentro de nuestra función básica, y como cota n^(n/2). Resultará en la búsqueda:

N	MF_SOPF(N)
2	2
3	3
5	5
7	7
8	15
9	14
10	21
11	11
12	35
13	13
14	33
15	26
16	39
17	17
18	65

Parece que solo los números 1, 4 y 6 no son SOPF(K) para ningún valor de K. En el caso de PARI hay que definir *sopf* previamente:

```
? sopf(n)={my(f,s=0);f=factor(n);for(i=1,matsize(f)[1],s+=f[i,1]);s}
mfun(n)={my(k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<10^5,f=sopf(k);if(f==n,vale=1;a=k);k
+=1);a}
for(i=1,20,print1(mfun(i),", "))
0, 2, 3, 0, 5, 0, 7, 15, 14, 21, 11, 35, 13, 33, 26, 39, 17, 65, 19, 51,
```

Con este código podemos reproducir las soluciones contenidas en http://oeis.org/A064502

Con SOPFR

La función *logaritmo entero* o *sopfr* es similar a la anterior, pero contando los primos con repetición. Casi todas las consideraciones estudiadas hasta ahora siguen siendo válidas salvo algún detalle:

Ahora el 4 y el 6 poseen valores para la función buscada: MF_SOPFR(4)=4=2*2 y MF_SOPFR(6)=8=2*2*2. El 1 sigue sin presentar solución.

La función *sopfr* se obtiene con un código similar al de *sopf*, pero los divisores primos se suman cada vez que aparecen. Están publicados en http://oeis.org/A056240

Función PHI de Euler

Otro caso interesante es el de aquellos números tales que existe un X tal que PHI(X)=N. Recordamos que PHI cuenta los números menores que X y que son primos con él, incluido el 1. Es evidente que X no será menor que N, lo que puede complicarnos la cota de búsqueda. En estos casos elegiremos cotas altas y estudiaremos los casos particulares. En la línea de definición escribiremos:

F=EULER(k)

La tenemos implementada en https://hojaynumeros.blogspot.com/search?q=euler%28

Obtendremos:

N	MF_EULER(N)
1	1
2	3
4	5
6	7
8	15
10	11
12	13
16	17
18	19
20	25
22	23
24	35
28	29
30	31
32	51

Observamos que, a partir del 2, sólo los números pares poseen valores en MF_EULER. Están publicados en https://oeis.org/A002202

Como en PARI está implementada esta función como eulerphi, es fácil adaptar nuestro código a ella:

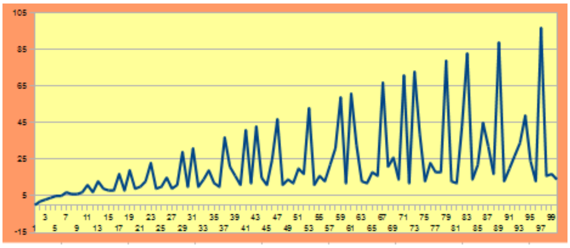
```
? mfun(n)={my(k=1,a=0,vale=0,f);while(vale==0&&k<10^5,f=eulerphi(k);if(f==n,vale=1;
a=k);k+=1);a}
for(i=1,20,print1(mfun(i),", "))
1, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 15, 0, 11, 0, 13, 0, 0, 0, 17, 0, 19, 0, 25,
```

Observamos que, salvo el 1, ningún impar es valor de PHI.

EL LOGARITMO ENTERO

LOGARITMO ENTERO

Llamaremos logaritmo entero de un número natural a la suma de todos sus factores primos, contando sus repeticiones. Se suele representar por la función **sopfr(n)**. Así, sopfr(28)=2+2+7=11. El valor más pequeño corresponde a sopfr(1)=0 y los mayores coinciden con los números primos, como es evidente. Aquí tienes la gráfica de esta función para los primeros números, en la que se perciben los máximos correspondientes a los primos:



Se le llama logaritmo porque posee la propiedad aditiva: **sopfr(a*b)=sopfr(a)+sopfr(b)**. Se cumple por el hecho de contar las repeticiones de los factores primos. Si se contaran una sola vez, esta propiedad sólo se verificaría si los números fueran primos entre sí y daría lugar a otra función que se representa por **sopf(n)**.

Algunas propiedades y curiosidades:

(a) *La función sopfr nunca sobrepasa el valor de su argumento, es decir, n>=sopfr(n).*

No es difícil demostrarlo. Se da la igualdad en el número 1, el 4 y en los números primos. Después considera que si k=m*n (no necesariamente primos) y alguno de los dos factores es mayor que 2, se cumple que k>m+n. Para demostrar que k>m+n consideramos que si m>2 o n>2, (m-1)(n-1)>1, con lo que mn-m-n>0 y por tanto mn>m+n.

Finalmente, aplicas esta propiedad de forma reiterada a las descomposiciones en un número creciente de factores hasta llegar a los primos.

Por ejemplo:

60>6+10 = 3*2+5*2>3+2+5+2

(b) Si sopfr(n) es menor o igual que n, se podrían buscar los números que son divisibles entre su logaritmo entero. No hay muchos. Sin contar los números primos, en cuyo caso la divisibilidad es en realidad una identidad, entre los 1000 primeros números sólo hay 42 que sean divisibles entre su logaritmo entero, y entre los 10000 primeros hay 201 (http://oeis.org/A036844). Entre ellos sólo en un caso es además su raíz cuadrada:

256=2^8 sopfr(256)=2*8=16

(c) En los casos anteriores, si sopfr(n) divide a n, y n no es primo, tampoco lo es sopfr(n), porque si fuera primo ya estaría incluido en la suma de primos que lo forma, por ser un divisor.

Sin embargo, si suprimimos la condición de divisibilidad, el logaritmo entero puede ser primo, y de hecho lo es en multitud de casos (http://oeis.org/A100118). Por ejemplo, entre los 1000 primeros, el valor 19 es el que más se repite.

(d) Hemos visto que sopfr(n)<=n, luego si buscamos el valor de sopfr(sopfr(n)), se verificará que n>=sopfr(n)>=sopfr(sopfr(n)), y si reiteramos, habremos construido una sucesión recurrente no creciente de números naturales, que tendrá un valor mínimo, que puede ser el 0, el 4, o bien un número primo que actuará como punto fijo de la sucesión. Consideraremos que la sucesión termina cuando llega a su punto fijo o al 0.

Los números primos son ya puntos fijos, por lo que su sucesión se reducirá a un valor. Otros números necesitan más pasos, como 393, que da lugar a la sucesión 134, 69, 26, 15, 8, 6, 5.

El número 20 presenta la curiosidad de ser igual a la suma de los elementos de la sucesión: 20=9+6+5. Tienen esa propiedad otros dos números de dos cifras:

20=9+6+5

38=21+10+7

74=39+16+8+6+5

(e) El número 140 es cuatro veces mayor que los términos de su sucesión: 140 =4*(16+8+6+5). Los números 546, 616, 735 y 800 tienen una propiedad similar, pero con cocientes mayores que 4.

546=13*(25+10+7)

616=14*(24+9+6+5)

735=21*(22+13)

800=20*(20+9+6+5)

(f) Si deseas investigar con el logaritmo entero (función **sofpr(n)**) puedes implementar en Excel o en Calc de OpenOffice o LibreOffice un algoritmo voraz que encuentre el logaritmo. Es bastante eficiente, y similar al de encontrar todos los factores primos de un número.

La idea consiste en ir recorriendo los números k inferiores a n y cuando k sea divisor de n acumularlo a una variable S preparada al efecto. Si es divisor, n se sustituye por n/k (por eso el algoritmo es voraz), para disminuir el tiempo de búsqueda del siguiente divisor. Se vuelve a repetir la búsqueda hasta que n quede reducido a 1. En ese momento se lee el valor de la suma S y obtendremos el logaritmo entero.

Puedes leer en el Apéndice el código de implementación en Basic del esta función SOPFR

DE SOPFR EN SOPFR

¿Qué te parece esta igualdad? Quizás la hayas visto ya publicada.

$2*2*2*3*3*3*5*5*5 = (2+2+2+3+3+3+5+5+5)^3$

Ambos miembros dan como resultado 27000.

No es la única de este tipo. Ahí va otra:

$3*3*3*3*3*3*3*5*5*5*5*5*5*5*7*7*7*7*7*7*7=$
$(3+3+3+3+3+3+3+5+5+5+5+5+5+5+7+7+7+7+7+7+7)^7$

Aquí el resultado común es 140710042265625, como puedes comprobar con alguna calculadora potente.

Estas dos igualdades no provienen de la casualidad, sino que se desprenden de unas propiedades que veremos a continuación. De hecho hay infinitas igualdades de este tipo, cada vez más complicadas.

La función SOPFR

Quienes acostumbráis a tratar estos temas habréis adivinado que se habrá usado alguna función aditiva, y así es. Todo esto se basa en el logaritmo entero o función SOPFR, que ya tratamos en el apartado anterior. En él definimos SOPFR(N) como la suma de todos los factores primos de N contando sus multiplicidades y explicamos que es una función aditiva (por eso recibe el nombre de logaritmo entero), porque se cumple que **sopfr(a*b)=sopfr(a)+sopfr(b).**

Si volvemos a la primera igualdad nos daremos cuenta de que el primer miembro es la factorización prima de $27000=2^3*3^3*5^3$ y el contenido del paréntesis del segundo miembro es la suma de sus factores primos, luego es sopfr(27000). Por tanto, lo que expresa la igualdad es que

$27000=(sopfr(27000))^3$

Del mismo modo, la segunda se puede escribir así:

$140710042265625=(sopfr(140710042265625))^7$

Nos las tenemos que ver con números muy grandes, pero afortudamente una propiedad que vamos a demostrar nos facilitará la tarea de encontrar má igualdades de este tipo. La explicamos por partes:

(a) Si un número natural es potencia de otro, ambos comparten los mismos factores primos. No hay que pensar esto mucho. Imagina el caso contrario y sería imposible que uno fuera potencia del otro. Más aún, los exponentes de la potencia serán múltiplos de los correspondientes en la base. Elemental también.

(b) Como SOPFR es una función aditiva, se cumplirá que

$SOPFR(A^B) = B*SOPFR(A)$

(c) Las igualdades presentadas son del tipo $N=(SOPFR(N))^K$. Si aplicamos lo explicado en (b) obtendremos

SOPFR(N)=K*SOPFR(SOPFR(N))

(d) A la inversa, si M cumple que M=k*SOPFR(M) se tendrá que

$SOPFR(M^K)=K*SOPFR(M)= M$

Hemos llegado a esto:

Si un número es potencia de su logaritmo entero, este a su vez será múltiplo de su respectivo logaritmo entero y a la inversa

No te dejes impresionar y léelo bien: en lugar de buscar números enormes que son grandes potencias de otros, podemos comenzar por buscar aquellos que son múltiplos de su logaritmo entero y el cociente entre ambos será la potencia

Lo del principio sobrepasaba la capacidad de las hojas de cálculo, pero esta otra versión no. En lugar de buscar N buscaremos SOPFR(N) y después la elevaremos, si podemos, a la potencia k.

Nos dedicaremos sólo a potencias no triviales, porque si k=1 nos resultaría el 4 y todos los números primos (¿por qué?)

Búsqueda de números múltiplos de su logaritmo entero

La codificación de la función SOPFR no es difícil. La tienes en el Apéndice.

Recorre los posibles divisores de N y los va acumulando en un contador S que después se convertirá en SOPFR. Al ir dividiendo n entre los divisores que salen, se garantiza que todos son primos.

Con esta función es fácil ir encontrando aquellos números que son múltiplos no triviales de su función SOPFR (excluimos cuando son iguales, para librarnos de los primos). Estos son los primeros:

Número N	SOPFR(N)	Cociente K
16	8	2
27	9	3
30	10	3
60	12	5

70	14	5
72	12	6
84	14	6
105	15	7
150	15	10
180	15	12
220	20	11
231	21	11
240	16	15
256	16	16
286	26	11
288	16	18

(Están publicados en http://oeis.org/A046346)

Si has entendido la parte teórica (comprendemos que no es fácil), comprenderás que si elevamos los números de la primera columna a los de la tercera, resultarán todos los que cumplen

$N=(SOPFR(N))^K$

Resultan estos:

256, 19683, 27000, 777600000, 1680700000, 139314069504, 351298031616, 140710042265625, 5766503906250000000000, 1156831381426176000000000000, 58431830141132800000000000, 99938258857146531850367031,…

Los hemos publicado en http://oeis.org/A216397

Con cualquiera de ellos puedes construir igualdades tan llamativas como las que presentamos al principio.

Aunque con algo de complejidad, se pueden reproducir estos cálculos con el Buscador. Llega un momento inevitable en el que las soluciones están dadas en notación científica, pero ese es el condicionamiento de las hojas de cálculo:

Solución	Detalles
16	256
27	19683
30	27000
60	777600000
70	1680700000
72	1,39314E+11
84	3,51298E+11

Buscamos desde el número	5
Hasta el número	100

Con estas propiedades:

NO PRIMO
ES ENTERO(N/SOPFR(N))
EVALUAR N^(N/SOPFR(N))

Comenzamos la búsqueda en el 5 para evitar el caso particular 4.

LAS VUELTAS QUE DA EL SOPFR

Ciclos en iteraciones de la función SOPFR(N)

Construye en una hoja de cálculo en la que hayas implementado la función SOPFR

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2009/11/logaritmo-entero-3.html) el siguiente esquema de cálculo. Recuerda que SOPFR suma todos los factores primos de un número contando su multiplicidad.

	Iteración del tipo A(n+1)=SOPFR(C*A(n)+1)			
Coeficiente C		**5**		
		N	**SOPFR(N)**	
Inicio		**12**	7	
		36	10	
		51	20	
		101	101	
		506	36	
		181	181	

Así, sopfr(24)=2+2+2+3=11.

El coeficiente **C** y el **Inicio** son números enteros que puedes elegir libremente. La segunda columna rotulada como SOPFR(N) contiene dicha función aplicada a los elementos de la primera. Así, 7=SOPFR(12)=2+2+3, 20=SOPFR(51)=3+17,…

Los demás elementos de la primera columna se construyen **multiplicando el anterior de la segunda por el coeficiente y sumando después 1**. Por ejemplo, 36=7*5+1, 506=101*5+1,…

Extiende este esquema hacia abajo hasta que descubras que los números de la segunda columna se quedan encerrados en un ciclo: 22, 40, 70. Si cambias el Inicio a 8, te puedes encontrar un ciclo de 23 elementos: {30089, 367, 103, 24, 193, 111, 134, 66, 46, 47. 42, 337, 63, 106, 286, 119, 953, 76, 39, 313, 175, 470, 3761}

Este es un comportamiento normal de estas recurrencias. Puedes ir cambiando el coeficiente y siempre llegarás a un ciclo. Cambia también el inicio y verás que se llega al mismo final cíclico. Puede que te recuerde hechos parecidos, como el “fósil” de un número, el algoritmo 196, la conjetura de Collatz y otros.

En lugar de sumar 1 puedes elegir otro número cualquiera. Incluso lo puedes incorporar al esquema de cálculo

	Iteración del tipo A(n+1)=SOPFR(C*A(n)+D)			
		C	**D**	
Coeficientes		**8**	**3**	
		N	**SOPFR(N)**	
Inicio		**1000**	21	
		171	25	
		203	36	
		291	100	
		803	84	
		675	19	
		155	36	
		291	100	

Sustituimos la iteración A(n+1)=SOPFR(8*A(n)+1) por A(n+1)=SOPFR(8*A(n)+D) y entonces aumenta nuestra sorpresa, porque ahora la longitud del ciclo varía de un valor a otro de D. Por ejemplo, si D=17 el ciclo se reduce a la unidad, pues se llega al punto fijo 34, mientras que para D=29 se desemboca en un ciclo de 29 elementos.

No parece relevante si C y D son o no coprimos, porque al ser SOPFR aditiva los factores comunes se pueden sacar como sumandos. Lo que sí ocurre es que los resultados para valores cercanos de C o D son muy dispares, como puedes comprobar en la tabla que hemos creado para C=12

Para C=12	
D	**Longitud ciclo**
1	9
2	6
3	6
4	8
5	39
6	10
7	2
8	2
9	13
10	1
11	50

Investigando por ahí nos hemos dado cuenta de que a veces, según el valor de inicio pueden obtenerse unos ciclos distintos. Prueba con C=7 y D=3. No parece que se altere la longitud del ciclo si cambiamos el valor inicial. En este caso siempre vale 8.

Caso C=1 D=0

Si fijamos estos valores los ciclos siempre tendrán longitud 1, es decir, que se llegará a un único valor fijo o invariante. La razón es que vimos en su momento que **SOPFR(N) es siempre menor o igual a N** (la igualdad se da en los primos y en el 4), por lo que la sucesión formada será decreciente y al llegar al primer primo (o el 4) entrará en un valor fijo.

Lo tienes estudiado en http://oeis.org/A029909

Estos son los puntos fijos a los que se llega desde los números que no son primos (con el 1 incluido)

0, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 13, 5, 7, 5, 5, 11, 7, 7, 5, 19, 7, 7, 7, 5, 11, 7, 5, 11, 7, 11, 5, 7, 5, 17, 11, 5, 13, 13, 31, 7, 5, 13, 7, 5, 5, 7,…

Como ves, son todos primos salvo el 4. Son los números para los que SOPFR(N)=N. Queda como conjetura si esta sucesión terminará por contener todos los números primos.

Hemos estudiado cuántos pasos necesita cada número no primo para llegar a su punto fijo. Por ejemplo, el 51 necesita 4 pasos:

sopfr(51)=17+3=20, sopfr(20)=2+2+5=9, sopfr(9)=3+3=6, sopfr(6)=2+3=5 y sopfr(5)=5. Se ha llegado al 5 en cuatro pasos.

El resultado ha sido

1, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 4, 1, 2, 2, 3, 4, …

Otros ciclos

Sorprendentemente, estos ciclos también aparecen si la función SOPFR se reitera sobre la suma de los dos anteriores términos. En la imagen hemos comenzado la iteración con los números 291 y 405. Debajo le hemos calculado la suma de divisores primos de su suma:

	N	
	291	
	405	
	38	*SOPFR(A(n-1)+A(n-2))*
	443	
	50	
	46	
	13	
	59	
	12	

291+405=696=2^3*3*29,

luego sopfr(291+405)=2+2+2+3+29=38, como puedes comprobar en la imagen. Reiteramos: 405+38=443, que es primo, luego sopfr(405+38)=443. Después sumaríamos 38+443…y así seguiríamos reiterando.

Al final se desemboca en el ciclo {19,11,10,10,9}

Más sorprendente todavía: reitera con tres, cuatro o cinco sumandos y seguirás obteniendo ciclos.

Intenta investigar las causas y si existen otras variantes de iteración. Alguien ha construido autómatas celulares en los que se ven muy bien los ciclos, pero no hemos podido localizarlos.

PARIENTES DE RUTH Y AARON

Hace unas semanas, el blog NumberADay (http://maanumberaday.blogspot.com/2011/02/714.html) presentaba los números 714 y 715 como integrantes de un par del tipo Ruth-Aaron, porque ambos son consecutivos y comparten el mismo valor en su logaritmo entero, o función SOPFR.

Estudiamos esta función hace meses en una entrada de nuestro blog

(http://hojaynumeros.blogspot.com/2009/11/logaritmo-entero-1.html).

En ella explicábamos que el logaritmo entero de un número se define mediante la suma de todos sus divisores primos contando su multiplicidad. Se representa como sofpr(n). Pues bien,

sofpr(714)=2+3+7+17=29 y sofpr(715)=5+11+13=29

Puedes buscar en la Red este concepto, y consultar en http://oeis.org/A039752 (http://oeis.org/A039752) la lista de los primeros números que forman pares de Ruth-Aaron: 5, 8, 15, 77, 125, 714, 948, 1330, 1520, 1862, 2491, 3248, 4185, 4191, 5405, 5560, 5959, 6867, 8280, 8463,…

También puedes usar la condición

ES SOPFR(N)=SOPFR(N+1)

con el Buscador de naturales:

Solución	Detalles
5	5
8	6
15	8
77	18
125	15
714	29
948	86
1330	33

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1500

Con estas propiedades:

ES SOPFR(N)=SOPFR(N+1)
EVALUAR SOPFR(N)

Podíamos buscar otros números con una propiedad similar y ver si ya están estudiados. Puedes usar la implementación de la función sofpr(n) que ya hemos publicado o la función SOPFR del Buscador:

(http://hojaynumeros.blogspot.com/2009/11/logaritmo-entero-3.html).

La primera idea sería buscar números que se diferenciaran en 2 unidades y compartieran la misma suma de factores primos. Existen, y los primeros son estos (escribimos el más pequeño del par): 10, 16, 30, 154, 250, 1428, 1896, 2660, 3040, 3724, 4982,…Todos parecen ser pares. ¿Podrías encontrar el siguiente?¿Habría alguno que fuera impar?

También existen pares diferenciados en 3, como 847 y 850, ambos con suma 29, como en el primer ejemplo. Y con otras diferencias, como 931 y 935, de diferencia 4, por lo que no parece tener interés seguir investigando por ahí.

Podíamos buscar diferencias más sofisticadas (productos no, ¿por qué?). Una idea sería sumar al más pequeño su propio logaritmo entero. Pues bien, eso ya está estudiado. Por ejemplo, la suma de los divisores primos de 60 (2,2,3,5) es 12. Si sumamos 12 a 60 nos resulta 72, y sus divisores 2+2+2+3+3 también suman 12. Puedes estudiar estos números en http://oeis.org/A050780

También podíamos ensayar el sumarle el número de divisores primos (con multiplicidad), es decir, su redondez o función *bigomega*. Por ejemplo, 45 tiene redondez 3, porque sus divisores primos son tres: 5, 3 y 3, con suma 11. Añadimos esa redondez a 45 y nos resulta 48, cuyos factores primos son 2, 2, 2, 2, 3, cuya suma también es 11.

Aquí tienes los primeros (también sólo escribimos el más pequeño del par): 1, 5, 10, 45, 60, 128, 231, 308, 470, 847…¿Sabrías encontrar el siguiente? Deberás usar tus propios métodos, porque no hemos visto publicados estos números. Esta secuencia la hemos publicado en OEIS (http://oeis.org/A187877)

También podemos usar la suma de factores primos sin multiplicidad (función *omega*) y exigir que **sopfr(n + omega(n)) = sopfr(n))**. Obtendríamos 5, 8, 10, 125, 231, 250, 470, 1846, 2844, 2856, 3570, 5126, 5320, 7473, 8687,… que también hemos publicado es OEIS (http://oeis.org/A187878)

¿Se te ocurren propuestas parecidas? ¿Habrá más parientes de Ruth y Aaron?

Soluciones

(a) Los primeros términos son 10, 16, 30, 154, 250, 1428, 1896, 2660, 3040, 3724, 4982, 6496, 8370, 8382, 9315, …y a partir de ahí aparecen los impares: 9315, 24823, 37521, 49401, 49455, 50427, 86877, 97723, …

(b) 1846

UNIDOS POR EL SOPF

Es tradición nuestra aprovechar cuestiones surgidas en Twitter. La de hoy se basa en una planteada por Juan Carlos Amez, @juankaamez, el día 28 de septiembre de 2019.

¿Podríamos probar que para cualquier valor k existe siempre al menos un valor n que verifica que: sopf(n)=sopf(n+k)?

Como la cuestión directa puede tener una respuesta complicada, abordamos antes la inversa, que dado un N debamos encontrar el K correspondiente.

Recordemos: la función SOPF(N) es la suma de los factores primos de N tomados sin repetición. Así SOPF(6)=2+3=5 y SOPF(12)=5 también, porque ambos tienen los mismos factores primos 2 y 3.

Primera cuestión: Encontrar K para un N dado

Existe una forma sencilla de evaluar la función SOPF sin necesidad de descomponer N en factores primos. Su código para Excel puede ser este:

```
Public Function sopf(n)
Dim f, a, e, g


a = n
f = 2 'Esta variable recorrerá los primos
e = 0 'Aquí se sumarán los factores primos
g = 0 'Recogerá los divisores primos
While f <= a
While a / f = a \ f 'Se encuentra un factor
g = f: a = a / f 'Tomamos nota en g y eliminamos ese factor
Wend
If g <> 0 Then e = e + g: g = 0 'Se suman factores en SOPF
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 'Se buscan nuevos factores
Wend
sopf = e
End Function
```

Con ella podemos ir descubriendo ya las coincidencias en los valores de SOPF. En la tabla podemos comprobar algunas.

N	SOPF(N)
6	5
12	5
144	5
21	10
63	10
147	10
20	7
80	7
100	7

Queda claro en ella que comparten valores de SOPF aquellos números que coinciden en sus factores primos sin contar repeticiones. Los tres primeros se basan en 2+3=5, los segundos en 3+7=10 y los últimos en 2+5=7.

Basta restar dos de ellos para tener una solución a la primera cuestión:

SOPF(6)=SOPF(6+6)=SOPF(6+138)

SOPF(21)=SOPF(21+42)=SOPF(21+126)

Esto resuelve la cuestión para un N dado y K desconocido: **los valores posibles de K para un N dado son infinitos**. Basta aumentar los exponentes de los factores primos de N y después restar.

Esto tiene una traducción a fórmula:

$$K = p_1^a \cdot p_2^b \cdot p_3^c \ldots (p_1^r \cdot p_2^s \cdot p_3^t \ldots - 1)$$

Es decir, serán valores válidos de K aquellos formados por la descomposición factorial de N multiplicada a su vez por un producto similar al que restamos una unidad. Los exponentes r, s y t pueden ser nulos (salvo uno, para evitar la solución K=0)

Por ejemplo, para $12=2^2*3$, K podría tener cualquiera de estas estructuras:

$2^2*3*(2^3-1)=84$, que equivaldría a

SOPF(12)=SOPF(12+84)=SOPF(96)=5

$2^2*3*(2*3-1)=60$, luego SOPF(12)=SOPF(12+60)=SOPF(72)=5

Así que la primera cuestión ya está resuelta, con la multiplicidad de soluciones de K `para cualquier N.

Segunda cuestión: Dado un valor de K, encontrar posibles valores de N

Esta cuestión es mucho más complicada, pues los valores de N no están acotados. Por ejemplo, para K=87654321, hemos encontrado un valor de N de 13761, lo que ha supuesto recorrer más de trece mil números. Efectivamente es una solución, porque

SOPF(13761)=153, ya que $13761=3^2*11*139$, y 3+11+139=153.

Y

SOPF(13761+87654321)=SOPF(87668082)=153, porque $87668082=2*3^9*17*131$, con lo que SOPF(87668082)=2+3+17+131=153.

No parece sencillo demostrar que la conjetura planteada sea verdadera. Son muchas las coincidencias entre sumas de primos, como 29+5=31+3=34 y la herencia de los valores de SOPF que vimos en la primera cuestión, por lo que se puede confiar en que para todo K exista un N que cumpla SOPF(N)=SOPF(N+K). Pero demostrarlo es otra cuestión bien distinta.

Sí podemos presentarlo como conjetura, y esto es lo que figura en la página web

https://www.primepuzzles.net/conjectures/conj_025.htm

rotulada como conjetura 25. En ella puedes consultar algunos intentos de demostración de la misma.

Si no se sabe demostrar la conjetura, sí se puede establecer una búsqueda del mínimo valor de N para cada K. Esto lo tienes publicado en http://oeis.org/A065925, y ahí remiten a la conjetura 25. Los primeros valores de N son 5, 2, 7, 4, 114, 2, 5, 8, 13, 10, 25, 4, 5, 2, 19, 16, 85, 6, 5, 5, 209, 22, 25, 3, 493, 26, 31, 4, 20, 2, 5, 32, 7, 34, 516, 12, 33, 38, 10, 10, 99, 6, 5, 44, 57, 46, 25, 6,…

Aquí podemos comprobar la conjetura con dos herramientas. Para Excel usaremos una “atrevida” función, que encontrará N para un K dado. La llamamos así porque se basa en un bucle **que puede no tener final** si la conjetura es falsa, con lo que habría que detener Excel antes de que terminara el proceso. Su código es

Function dsopf(k)
Dim d, n
d = 0
n = 2
While d = 0 ‘En este *while* radica el peligro, ya que puede no detenerse
If sopf(n) = sopf(n + k) Then d = n
n = n + 1
Wend
dsopf = d
End Function

Se supone definida ya la función SOPF.

Esta función devuelve un 0 si no encuentra ningún valor de N. En realidad no lo devolvería, porque la ejecución no podría detenerse. Se ve que hemos confiado en la conjetura.

Con esta función es fácil reproducir la lista de valores de N publicada en OEIS:

K	Mínimo N
1	5
2	2
3	7
4	4
5	114
6	2
7	5
8	8
9	13
10	10
11	25
12	4
13	5
14	2
15	19

También podemos probar con valores grandes de K, como el número de fecha de la Navidad de este año:

DSOPF(251219)=3256.

Comprobamos: SOPF(3256)=50,

SOPF(251219+3256)=SOPF(254475)=50

Parece que podemos confiar en que la conjetura sea cierta. Como Excel tiene una capacidad limitada cuando trata con números grandes, traducimos la cuestión al lenguaje PARI:

```
sopf(n)= my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s

dsopf(k)=
my(d=0,n=2);while(d==0,if(sopf(n)==sopf(n+k),d=n);
n+=1);d

print(dsopf(12345678910))
```

Puedes copiar este código y ejecutarlo en la página

https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html

Aquí tienes el resultado: 81147.

```
? sopf (n) = my (f, s = 0); f = factor (n); para (i = 1, matsize (f) [1], s + = f [i, 1]); s
dsopf (k) = my (d = 0, n = 2); while (d == 0, if (sopf (n) == sopf (n + k), d = n); n + = 1); d
imprimir (dsopf (12345678910))
81147
```

Cambiando el ejemplo 12345678910 por otro iríamos comprobando la conjetura para diversos valores.

Este número 12345678910 nos daría problemas de lentitud en Excel, pero hasta aquí sí puede con el problema:

K	Mínimo N
12345678910	81147

Por si acaso, es preferible usar PARI para evitar los problemas de la coma flotante de Excel.

Esto es lo que podemos afirmar sobre la conjetura. Hay que agradecer a Juan Carlos Amez su propuesta, pues nos ha permitido estudiar un tema interesante.

COSAS DE LA ABUNDANCIA

¡CÓMO CRECE LA ABUNDANCIA!

Ya sabemos que un número perfecto es igual a la suma de sus divisores propios, que en un abundante esa suma es mayor que el número, y que en los deficientes es menor. Si llamamos S(N) a la suma de **todos** los divisores de de N (función sigma), es claro que el cociente S(N)/N vale 2 en los números perfectos, más de 2 en los abundantes y menos en los deficientes. Hasta aquí ninguna novedad.

Si llamamos **abundancia** del número A a ese cociente S(A)/A, podemos demostrar una interesante propiedad:

La abundancia de un número múltiplo de A es mayor que la abundancia de A: Si M=A*k, (M, A y K enteros positivos), entonces S(M)/M > S(A)/A

Para demostrarlo basta considerar el caso en el que k es primo, porque por reiteración la propiedad se iría repitiendo en cada factor primo de k si fuera compuesto. Recordemos la fórmula de la función sigma S:

$$\sigma(N) = \prod \frac{{p_i}^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

En la que p_i son los factores primos de A y e_i sus multiplicidades. Si el nuevo primo k es uno de ellos con multiplicidad p, su cociente $(k^{p+1}-1)/(k-1)$ se convertiría en $(k^{p+2}-1)/(k-1)$, que es mayor que $(k^{p+1}-k)/(k-1)=k(k^{p+1}-1)/(k-1)$. Por tanto, ese factor $(k^{p+1}-1)/(k-1)$ de la función sigma quedaría multiplicado por un número **mayor que k**. Por tanto, la abundancia aumenta, porque S(M)/M > kS(A)/M=kS(A)/(kA)=S(A)/A.

Si k es un número primo que no divide a A, entonces su función sigma, al pasar a M, quedaría multiplicada por (k+1) (¿por qué?) y tendríamos:
S(M)/M=S(A)*(k+1)/(A*k)= S(A)/A*((k+1)/k)>S(A)/A, es decir, la abundancia quedaría multiplicada por un número mayor que la unidad.

Si k fuera compuesto, iríamos multiplicando por cada uno de sus factores primos, con lo que la abundancia crecería aún con más razón.

Lo importante es que estos crecimientos son estrictos: nunca se da la igualdad de abundancias entre un número y sus múltiplos. De esto se desprende lo siguiente, que es muy fácil de razonar:

- Los divisores de un número perfecto son todos deficientes.
- Si un número es no deficiente (perfecto o abundante), sus múltiplos serán todos abundantes.

Nos podemos imaginar que si N es no deficiente, entre los divisores de N encontraremos deficientes (quizás no todos) y entre los múltiplos, todos abundantes. ¿Dónde está la frontera?

Dickson (1913) llamó **no deficientes primitivos** a aquellos números no deficientes cuyos divisores propios sí son todos deficientes. Es evidente que entre esos números estarán los perfectos y quizás alguno más. Pues sí, hay más: 6, 20, 28, 70, 88, 104, 272, 304, 368, 464, 496, 550, 572, 650, 748, 836, 945, 1184…

Lo puedes consultar en la secuencia
http://oeis.org/A006039.

Quizás te apetezca encontrarlos con una hoja de cálculo o un instrumento más potente. Bastará con que tengas implementada la función sigma y definir con ella las funciones es_perfecto, es_deficiente, es_abundante. Después recorres todos los números de un rango, eliges los no deficientes, recorres sus divisores y aceptas los números en los que no aparezcan perfectos o abundantes entre sus divisores propios. ¿Difícil? Dependerá de tu experiencia previa.

Aquí tienes una idea en Basic:

```
for i=m to n
if not esdeficiente(i) then
k=2
c=0
while k<=i/2 and c=0
if i/k=i\k and not esdeficiente(k) then c=1
k=k+1
wend
if c=0 then msgbox(i)
end if
end if
next i
```

UN PAR DE ABUNDANTES

¿Sabías que todo número par mayor que 46 es suma de dos números abundantes? (leído en **Elementary number theory in nine chapters** de James J. Tattersall. En el mismo se ha omitido el carácter de par)

Si dispones de la función "abundancia", bastará, para descomponer un número en dos abundantes, ir probando sumandos y sus complementarios a ese número para ver si ambos son abundantes (cuando su abundancia sea mayor que 2)

Lo hemos intentado con hoja de cálculo, añadiendo a la derecha el MCD de ambos sumandos:

Número	Abund1	Abund2	MCD
48	12	36	12
48	18	30	6
48	24	24	24
50	20	30	10
52	12	40	4
54	12	42	6
54	18	36	18
54	24	30	6
56	20	36	4
58	18	40	2
60	12	48	12
60	18	42	6
60	20	40	20
60	24	36	12
60	30	30	30
62	20	42	2
64	24	40	8
66	12	54	6
66	18	48	6
66	24	42	6
66	30	36	6
68	12	56	4
68	20	48	4

Vemos que en varios números existe más de una solución. También que los números abundantes pueden ser iguales y que en el caso extremo su MCD es 2 (sólo nos referimos a números pequeños, antes de que aparezca el primer abundante impar 945). A estos les vamos a llamar **abundantes casi-coprimos**, como podíamos haberles dado cualquier otro nombre. Téngase en cuenta que existen pares de números abundantes coprimos, como 945 y 992.

Hace tiempo que no proponemos búsquedas. Ahí van:

(a) ¿Qué números, entre 24 y 46 no poseen esta propiedad?

(b) Sólo existe un número menor que 100 que se puede descomponer en dos abundantes, uno de los cuales es siete veces mayor que el otro.

(c) ¿Qué número menor de 500 presenta más descomposiciones en pares de abundantes?

(d) La descomposición en dos sumandos abundantes casi-coprimos (MCD=2) sólo ocurre en algunos números. Los primeros son 38=18+20 y 58=18+40. ¿Cuáles les siguen?

Soluciones

(a) 26, 28, 34 y 46
(b) 96=12+84
(c) El 480, que se descompone de 51 formas

(d) Los primeros son 38, 58, 62, 74, 82, 86, 88, 94, 98, 106, 110, 118, 122, 124, 130, 134, 136, 142, 146, 148, 154, 158,….

NO SON PERFECTOS, PERO SÍ SUS PARIENTES

Los números perfectos 6, 28, 496, 8128,.. (http://oeis.org/A000396) sabemos que se caracterizan por cumplir su igualdad con la suma de sus divisores propios. Igualmente es muy popular el criterio de que si 2^k-1 es primo (primo de Mersenne), entonces $2^{k-1}(2^k-1)$ es perfecto.

Estos son los números perfectos “normales”, pero ¿qué ocurriría si nos restringimos sólo a **ciertos divisores propios**, como los pares o los cuadrados? Y como segunda cuestión: ¿y **si les ayudáramos** con alguna multiplicación por otro divisor? A investigar esta posibilidad nos dedicaremos en estas entradas.

Como ocurre tantas veces, hemos buscado una cosa y recibido mucho más, porque al explicar los resultados podremos repasar cuestiones teóricas interesantes.

Estudio con divisores restringidos

Los resultados son escasos. Sólo se puede destacar el de **la suma de los divisores pares**, pues los números que coinciden con su suma son los dobles de los

números perfectos: 12, 56, 992, 16256,…Los puedes ver en http://oeis.org/A139256 En efecto: 12=2+4+6, 56=28+14+8+4+2,
992=496+248+124+62+32+16+8+4+2,…

También, si restringimos a los divisores unitarios, nos aparecen otros tipos de perfectos, los de tipo unitario: 6, 60, 90, 87360,… (http://oeis.org/A002827) Recuerda que un divisor unitario D de N es aquel que es primo con N/D. Así, en el caso de 90 los divisores unitarios propios son 45 18 10 9 5 2 1, cuya suma también es 90. Se conjetura que sólo existe un número finito de ellos.

Hemos probado otras posibilidades, como divisores impares, cuadrados, triangulares,… sin apenas resultados en los números pequeños. Las búsquedas han llegado hasta 10000 al menos. Lo que resulta es muy pobre y no merece la pena considerarlo.

Así que probaremos con una ayudita:

Ayudamos con el mayor divisor propio

Vamos a intentar buscar números que coincidan con la suma de **ciertos divisores propios** multiplicada por el mayor divisor propio **de ese mismo tipo**. Por ejemplo, con cuadrados, el 650 tiene como divisores cuadrados propios el 25 y el 1 y se cumple 650=25*(25+1)

Así el panorama se aclara totalmente. Es mucho más fácil que un número coincida con esos productos. El proceso que vamos a seguir, **por pura diversión**, es el siguiente:

- Para cada número natural elegimos un tipo de divisores: pares, cuadrados, oblongos,…
- Encontramos el mayor divisor propio de ese tipo
- Lo multiplicamos por la suma de todos los divisores propios de ese tipo, incluyendo él mismo.
- Comprobamos si coincide con el número dado

Hemos usado dos funciones que no explicaremos por no cansar, pero que no son difíciles de programar: MayorDivisorTipo, SumaDivisoresTipo, ambos actuando sobre divisores propios. Nos han resultado las siguientes curiosidades:

Con divisores sin restringir

Nada que hacer. Por algo los números perfectos son tan admirables.

Divisores pares

Sólo existe el 4=2*2. En efecto, si el mayor divisor propio par de N lo multiplicamos por 2, ya sería igual a N. Si lo multiplicáramos por toda una suma de pares, nos resultaría mayor que N salvo este caso del 4.

Divisores impares

Aquí sí existen números con ese tipo de descomposición, y dan tanto juego que nos ocuparán toda la entrada y tendremos que dejar otros casos para la siguiente.

12, 56, 672, 992, 11904, 16256,…

12=3*(1+3)

56=7*(1+7)

672=21*(21+7+3+1)

992=31*(1+31)

11904=93*(93+31+3+1)

16256=127*(127+1)

¿Te suenan de algo 3, 7, 31 y 127? Pues sí, son primos de Mersenne. Además, 21 es el producto de 3 por 7 y 93 de 3 por 31. En todas las igualdades aparece un número de Mersenne.

Podemos demostrar que si un número se descompone según esta estructura

$N=2^{m+n+p+\dots}(2^m-1)(2^n-1)(2^p-1)\dots$ (1)

siendo todos los paréntesis **primos de Mersenne y distintos**, cumplirá lo que le hemos exigido.

La idea es muy sencilla: los únicos divisores impares de N provendrán de los paréntesis. El mayor de ellos será el producto $(2^m-1)(2^n-1)(2^p-1)\ldots$y sabemos que la suma de divisores de $p_1p_2p_3\ldots$si son primos distintos es $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots$, luego en este caso sería $2^m2^n2^p\ldots=2^{m+n+p+\ldots}$, luego al multiplicar ambos, el mayor divisor impar propio y la suma, se reconstruye N según (1), que es lo que pretendíamos.

Luego se cumple la propiedad

Lo bueno es que también es verdadera la propiedad recíproca: Si N cumple que coincide con el producto entre su mayor divisor impar propio y la suma de todos los divisores impares propios, N ha de tener la estructura propuesta en (1). En efecto, dividamos N en factores primos impares y potencias de 2 (esto siempre es posible salvo trivialidades).

Sea $N=2^kp_1p_2p_3\ldots$, con $p_1,p_2,p_3\ldots$, los primos impares y su producto el mayor divisor impar propio. Si los factores son distintos se ha de cumplir $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots=2^k$ y esto sólo es posible si esos primos son de Mersenne: $(2^m-1)(2^n-1)(2^p-1)\ldots$. Sólo queda ajustar el exponente de 2 para que resulte la fórmula (1)

Queda el caso en el que hubiera algún factor repetido al menos, por lo que agrupando dos repeticiones, se tendría que cumplir que $(p_r)^2+p_r+1=2^h$, que es imposible, porque el primer miembro es impar. Por tanto hemos demostrado:

La condición necesaria y suficiente para que un número N cumpla la propiedad de coincidir con el producto de su mayor divisor impar propio y la suma de todos los divisores impares propios es que tenga la estructura

$$N=2^{m+n+p+\ldots}(2^m-1)(2^n-1)(2^p-1)\ldots \quad (1)$$

Siendo los paréntesis números primos de Mersenne distintos

Pero esto tiene otra consecuencia muy simple: si construimos todos los números con un solo primo de Mersenne y después los multiplicamos entre sí, resultarán otros con la misma propiedad. En el listado de arriba tienes dos ejemplos: 12*56=672 y 12*992=11904.

Para comprenderlo basta revisar la estructura (1) que hemos demostrado es necesaria y suficiente para el cumplimiento de lo exigido, pero la podemos interpretar así:

$$N=(2*2^{m-1}(2^m-1))*(2*2^{n-1}(2^n-1))*(2*2^{p-1}(2^p-1))\ldots$$

Es decir, es un producto de dobles de números perfectos distintos.

Esto nos da un método para ampliar la lista. Tan sólo insertamos una imagen de los resultados de la primera generación obtenidos con STCALCU

(http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#calcula)

12	56	992	16256	67100672	17179738112	274877382656
	672	11904	195072	805208064	206156857344	3298528591872
		55552	910336	3757637632	962065334272	15393133428736
			16125952	66563866624	17042300207104	272678363594752
				1090788524032	279273822748672	4468406732455936
					1152771972099211264	18444457093818744832
						4722321446942090985472

Por ejemplo, el número 1090788524032 que figura en la tabla de arriba es el producto de dos números que duplican a otro perfecto:

1090788524032=16256*67100672
=(2*8128)*(2*33550336)=2*P_4*2*P_5

Es el producto de los dobles del cuarto y quinto número perfecto.

Puedes comprobar que su mayor divisor impar es 1040257, la suma de sus divisores impares es 1048576 y que su producto es 1090788524032. El primer número es también ***la parte impar*** de los divisores, ya que no sólo no contiene el factor 2, sino que todos los divisores impares **son también divisores suyos**. Igualmente, la potencia de 2 que le acompaña sería la ***parte par*** del número. Aquí sería 1048576=2^{20} mientras que la parte impar es el producto de los primos de Mersenne: 1040257=127*8191

También hemos comprobado la lista con PARI, mediante el código

gdivodd(n)=m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);return(m)

for (n=2,2*10^8,m=gdivodd(n)*sumdiv(n, d, d*(d%2));if(m==n,print(n)))

Hemos reproducido con él estos primeros números: 12, 56, 672, 992, 11904, 16256, 55552, 195072, 666624, 910336, 10924032, 16125952, 67100672, 193511424,…) hasta 2*10^8)

Completados con razonamiento: 805208064, 903053312, 3757637632, 10836639744, 17179738112, 45091651584, 66563866624, 206156857344, 274877382656, 798766399488, 962065334272, 1090788524032…

Comenzamos con una búsqueda un poco aleatoria y se ha desembocado en una propiedad elegante, y relacionada con conceptos tan potentes como los primos de Mersenne y los perfectos. Para ser un entretenimiento, no está mal.

Esta sucesión la hemos publicado en OEIS con el número A225880

Otros ejemplos

En los párrafos anteriores buscamos números N parecidos a los perfectos, pero con dos diferencias radicales:

- Los divisores considerados no serán todos, sino tan sólo los de algún tipo. Ya hemos estudiado los impares.
- No se exige que N coincida con la suma de sus divisores propios, sino con el producto de esa suma por el mayor de los divisores de ese tipo.
- Como consecuencia, el mayor divisor propio de cierto tipo será inferior en todos los casos a la raíz cuadrada del número. Por tanto, de cumplirse la igualdad, los divisores serán más bien pequeños.

Se comprende que este planteamiento es una propuesta para divertirse un poco. Quien busque algo más serio se defraudará si sigue leyendo, pero si sólo desea explorar y aprender, algo tenemos que ofrecerle.

Probamos con triangulares

Estos son los primeros números que cumplen lo exigido si nos restringimos a triangulares:

285, 5016, 24021, 142350, 145665, 154602, 204450, 318912, 474192, 843402, 1196690, 1283664, 1670250, 2739021, 3412950, 4255776, 5052135, 6054880, 6272140, 6433440, 6493728, 6650712, 6728190, 7156044, 7323030, 7797750, 9379350

Observa estas igualdades:

285=15(15+3+1), 142350=325(325+78+15+10+6+3+1), ambas construidas con divisores triangulares y compuestas multiplicando el mayor divisor con la suma de todos.

No es rápido ningún algoritmo para conseguir esto. El que hemos visto más adecuado salvo funciones creadas por nosotros es el que puede basarse en lo siguiente:

Definimos una función para n:

- Tomamos como divisor inicial el D=1 y como suma S=0 y el salto en 1
- Desde k=1 hasta n/2 probamos si k es divisor de n. Si lo es tomamos nota en D=k e incrementamos la suma S se convierte en S+k
- (Núcleo) Ahora viene lo peculiar de los triangulares: el salto ha de incrementarse en una unidad y el valor de k también incrementarlo en ese salto. Así garantizamos que salte de triangular en triangular: 1+2=3; 3+3=6; 6+4=10; 10+5=15,…
- Al final devuelve el producto de D*S, pues D se convertirá en el mayor divisor propio triangular y S en la suma de todos los divisores de ese tipo.

Puedes analizarlo en este código PARI. No es fácil seguirlo al principio.

msumprop(n)={k=1;i=1;s=0;d=1;while(k<=n\2,if(n/k==n\k,d=k;s+=d);i+=1;k+=i);s*=d;return(s)}

{for (n=2,10^7,if(n==msumprop(n),print(n)))}

Los valores de **k** son los triangulares que se van formando y los de **i** el salto que se incrementa de 1 en 1.

Ninguno de los números que hemos encontrado es triangular también.

Esta sucesión la hemos publicado en https://oeis.org/A225881

Con los cuadrados

Resultan:

20, 90, 336, 650, 5440, 7371, 13000, 14762,28730, 30240, 83810, 87296, 130682, 147420, 218400, 280370, 295240, 406875, 708122, 924482, 1397760, 1875530, 2613640, 3536000, 4881890, 4960032, 5884851, 7856640, 7893290, 8137500,…

Por ejemplo: 406875=625(625+25+1)

Es fácil ver que el mayor divisor cuadrado de N es su **parte cuadrada** y el paréntesis, suma de divisores cuadrados, será **la parte libre** de los mismos, luego todos los divisores cuadrados de N serán, en esta sucesión, divisores del mayor. Por ejemplo:

218400=400(400+100+25+16+4+1)=400*546

Aquí 400 es la parte cuadrada de 218400, 546 la parte libre de cuadrados, y todos los divisores cuadrados son divisores de 400, pero no de su suma:

En esta sucesión ningún divisor cuadrado (salvo el 1, evidentemente) es divisor de la suma de todos ellos. Sin embargo, la parte libre de cuadrados coincide con la suma de todos los divisores cuadrados.

Por simplicidad, hemos usado esta última consideración para publicar la sucesión en https://oeis.org/A225882, ya que usar que la parte libre ("core") simplifica tanto la programación, que en PARI se reduce a esto:

for(n=2, 10^8, if(core(n)==sumdiv(n, d, d*issquare(d)), print(n)))

Cuando redactábamos este estudio, al aparecer reiteradamente los números libres de cuadrados, lo comentamos con nuestro amigo Rafael Parra, que redactó un documento sobre ellos, que se puede descargar desde

http://hojamat.es/parra/NumerosLDC.pdf.

Subsucesión $p^2(p^2+1)$

En esta sucesión están incluidos los que tienen esta expresión $p^2(p^2+1)$ **si p es primo y p^2+1 es libre de cuadrados** (si no lo fuera, habría un divisor cuadrado k^2 nuevo, ya que si k^2 divide a p^2+1, no divide a p^2). Son estos:

20, 90, 650, 14762, 28730, 83810, 130682, 280370, 708122, 924482, 1875530, 4881890…

Esta sucesión la ha publicado Rafael Parra en https://oeis.org/A225892

Primos que producen estos términos

Hemos indicado que p ha de ser primo, pero no todos hacen que p^2+1 esté libre de cuadrados. Los que lo consiguen son:

2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 47,…

También los ha publicado Rafael Parra en https://oeis.org/A225856

Es un problema muy interesante y difícil de estudiar el de qué distingue a estos primos de los que no producen un p^2+1 libre de cuadrados, y que son los restantes:

7, 41, 43, 107, 157, 193, 239, 251, 257, 293, 307, 443, 457, 557, 577, 593, 607, 643, 743, 757, 829, 857, 907,… https://oeis.org/A224718

Es recomendable repasar las últimas páginas del documento de Rafael Parra citado. Ahí da pistas sobre esta cuestión. También ha construido una sucesión muy interesante sobre ellos en https://oeis.org/A225893

En estos últimos números primos, 7, 41, 43,… la expresión p^2+1 posee una parte cuadrada mayor que 1, lo que produce un nuevo divisor cuadrado en la cuestión que estamos estudiando. Por ejemplo, para p=251, $p^2(p^2+1)$= 3969189002, que posee como divisor $17^2 = 289$

Volvemos a la práctica

Para encontrar los "casi perfectos" que nos ocupan el algoritmo es similar al de los triangulares, sustituyendo el núcleo: El valor de i lo incrementamos en 2, porque así los sumandos son impares y las sumas de ellos engendran cuadrados. Los candidatos a divisores cuadrados se formarían así:

1+3=4; 4+5=9; 9+7=16; 16+9=25,…

En PARI el código sería idéntico al de los triangulares, pero con saltos incrementados de 2 en 2

```
msumprop(n)={k=1;i=1;s=0;d=1;while(k<=n\2,if(n/k=
=n\k,d=k;s+=d);i+=2;k+=i);s*=d;return(s)}

{for (n=2,10^7,if(n==msumprop(n),print(n)))}
```

Ya hemos advertido que al publicar hemos optado por una variante más simple, pero conservamos este algoritmo porque puede servir para dar ideas.

Otros ejemplos más

Estos ejemplos los desarrollaremos con más brevedad, por su interés menor:

Con oblongos

Son los números del tipo n(n-1), dobles de triangulares. Con ellos resultan

4, 2604, 47320, 99756, 123804, 362520,…

Por ejemplo, los divisores oblongos de 123804 son 342, 12, 6 y 2,y se cumple lo exigido: 123804=342(342+12+6+2)=342*362

Es evidente que todos son múltiplos de 4, porque los oblongos son todos pares y por tanto su suma también, con lo que garantizamos el factor 2 al cuadrado.

Código PARI

```
msumprop(n)={k=2;i=1;s=0;d=1;while(k<=n\2,if(n/k==n\k,d=k;s+=d);i+=1;k*=(i+1)/(i-1));s+=d;return(s)}

{for (n=2,10^7,if(n==msumprop(n),print(n)))}
```

El algoritmo es idéntico a los anteriores, pero el primer divisor es D=2=2*1 que es el primer oblongo y el contador i se incrementa en 1 y, esto es lo propio de este caso, k se multiplica por (i+1)/(i-1). Con esto logramos que 2=2*1 salte a 2*3, después a 3*4, y así sucesivamente.

Con fibonacci

18, 45, 88, 840, 1258, 1530, 1632, 3355, 3630, 8188, 8277…

Como ejemplo, los divisores de 8188 que pertenecen a la sucesión de Fibonacci son 89, 2 y 1, con suma 92, y es evidente que 8188=89*92

Te puedes entretener en estudiar este algoritmo:

msumprop(n)={k=1;l=1;i=1;s=0;d=1;while(k<=n\2,if(n/k==n\k,d=k;s+=d);l=k;k+=i;i=l);s*=d;return(s)}

{for (n=2,10^7,if(n==msumprop(n),print(n)))}

Como era de esperar (sería ya mucha casualidad), ninguno de los números encontrados pertenece a la sucesión de Fibonacci.

Con libres de cuadrados

72, 2160, 4032, 9504, 22032, 39744, 71424, 120960,…

Por ejemplo,

206064= 318*(318+159+106+53+6+3+2+1)

Un código PARI que los produce es este:

```
rad(n)=local(p); p=factor(n); prod(i=1, #p[,1], p[i,1]);
sumfree(n)=sumdiv(n,d,d*issquarefree(d))
{for (n=2,10^7,if(n==rad(n)*sumfree(n),print(n)))}
```

No seguimos, que nunca deseamos cansar a nuestros lectores, que quedan invitados a buscar ejemplos similares.

DIVISORES UNITARIOS

DIVISORES UNITARIOS

Un número natural **d** es un divisor unitario de otro número natural **N** cuando d y N/d son coprimos. Por ejemplo, 33 es divisor unitario de 66, ya que 33 es coprimo con 66/33=2. Es evidente que N/d también es unitario. **Los divisores unitarios aparecen por parejas.**

Para encontrar todos los divisores unitarios de un número N te puede ayudar el saber que el número de esos divisores es 2^K, siendo K=omega(N), es decir, el número de factores primos diferentes que posee N. Esta función que cuenta los divisores unitarios se representa por **ud(n)** y tiene como fórmula

$$ud(n) = 2^{omega(n)}$$

¿Qué te recuerda lo de una potencia de 2 en recuentos? Pues eso que estás pensando. Así que te puedes poner a trabajar. Te damos un ejemplo:

Los divisores unitarios de 84 son 1, 3, 4, 7, 12, 21, 28 y 84, en total $8=2^3$.

Encuentra tú otros conjuntos de este tipo de divisores: en los números primos sólo encontrarás dos, en los semiprimos 4, en los 3-primos, ocho, y así.

La suma de todos los divisores unitarios de un número N es una clase especial de la familia de las **funciones sigma**. Se la suele distinguir con un asterisco: σ* y también recibe el nombre de *usigma*.

Si has dado con el procedimiento para encontrar los divisores unitarios, entenderás esta fórmula:

$$\sigma^*(N) = \prod \left(1 + {p_i}^{k_i}\right)$$

donde p_i son los factores primos y k_i sus multiplicidades. Te dejamos razonarlo.

Así,
σ*(84)=(1+3)(1+4)(1+7)=4*5*8=160=1+3+4+7+12+21+28+84

También es fácil encontrarlos con hoja de cálculo: basta recorrer los números de 1 a N y quedarnos con aquellos D que son divisores de N y que su MCD(D,N/D)=1

Aquí tienes un ejemplo: los divisores unitarios de 2772 y su suma 4800=5*10*8*12 (¿por qué esos factores?)

1, 4, 7, 9, 11, 28, 36, 44, 63, 77, 99, 252, 308, 396, 693, 2772 suman 4800

Curiosidades

Destacamos algunas curiosidades dando vueltas al concepto:

(1) El número de divisores unitarios de N coincide con el de sus divisores libres de cuadrados ¿Por qué ocurre eso? Un ejemplo: para N=60 los divisores unitarios son 1, 3, 4, 5, 12, 15, 20 y 25, ocho en total, comprobándose que 8 = 2^omega(60) = 2^3. Los números libres de cuadrados son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30, también ocho.

(2) Con los divisores unitarios se pueden definir también números perfectos (unitarios). Son aquellos en los que usigma(N)=2*N. Los primeros son:

6, 60, 90, 87360 (http://oeis.org/A002827)

(3) Las potencias de un número primo p^k sólo tienen dos divisores unitarios: 1 y p^k, sea cual sea el exponente k.

Promedios

Podemos trabajar con los promedios de los divisores unitarios:

(1) N es impar

El promedio de sus divisores unitarios será un entero.

El promedio provendrá de dividir la función usigma(N) entre 2^omega(N). Si analizas cómo será usigma(N) si N es impar, lo lograrás demostrar sin gran esfuerzo.

Por ejemplo, si N = 660 sus divisores unitarios serán 1, 3, 4, 5, 11, 12, 15, 20, 33, 44, 55, 60, 132, 165, 220 y 660. Su suma es 1440, que al dividirla entre 16, que es el número de divisores, nos da un promedio entero de 90.

En algunos casos **es incluso primo**, un caso parecido a lo que ocurría en los números Arolmar (https://oeis.org/A187073).

Estos son los números con promedio primo de sus divisores unitarios: 3, 5, 9, 13, 25, 37, 61, 73, 81, 121, 157, 193, 277, 313, 361, 397, 421, 457, 541, 613, 625, 661, 673, 733, 757, 841, 877, 997…(La hemos publicado en https://oeis.org/A192577)

Entre ellos hay números primos y potencias pares de primos. La razón es la siguiente: sabemos que la expresión de usigma es

$$usigma(N) = \left(1 + {p_1}^{k_1}\right) * \left(1 + {p_2}^{k_2}\right) * \dots * \left(1 + {p_h}^{k_h}\right) \quad (1)$$

Si ahora dividimos entre 2^h, podemos asignar un 2 a cada factor, quedando:

$$usigma(N)/2^h = \frac{(1+p_1{}^{k_1})}{2} * \frac{(1+p_2{}^{k_2})}{2} * \dots * \frac{(1+p_h{}^{k_h})}{2} \quad (2)$$

Todos los cocientes serán mayores que 1, porque los numeradores serán iguales o mayores que 4 (¿por qué?). Pero así no puede resultarnos un número primo, ya que lo que obtenemos es una descomposición en varios factores, luego h ha de ser 1, es decir, que N ha de ser primo o potencia de primo.

Podemos concretar más aún: la potencia del primo ha de ser par, porque en caso contrario el primer factor sería múltiplo de p_1+1 (pura álgebra). Todavía podemos afinar más:

Si $k_1=1$ obtendrás los términos 3, 5, 13, 37, 61, 73, 157, 193 (http://oeis.org/A005383)

Si $k_1>1$ ha de ser par y los términos que aparecen son los restantes:

Potencia de primo	Promedio primo de divisores unitarios	Descomposición factorial
9	5	3 3
25	13	5 5
81	41	3 3 3 3
121	61	11 11
361	181	19 19

625	313	5 5 5 5
841	421	29 29
2401	1201	7 7 7 7

(2) N es par,

En este caso el promedio de los divisores unitarios puede ser entero o no. Si lo es, puede incluso ser primo. Por ejemplo, en el caso de

6, 12, 48, 768, 196608, …

¿Porqué hay tan pocos pares que produzcan un promedio de divisores unitarios que sea primo?

Lo razonamos:

Todo número par de **h** factores es de la forma

$$N = 2^a * {p_1}^{k_1} * {p_2}^{k_2} * \ldots * {p_{h-1}}^{k_{h-1}}$$

En ella los p_i son números primos impares y k_i sus multiplicidades.

Por tanto

$$usigma(N) = (1+2^a) * \left(1+{p_1}^{k_1}\right) * \left(1+{p_2}^{k_2}\right) * \ldots * \left(1+{p_{h-1}}^{k_{h-1}}\right) \quad (1)$$

El número de divisores unitarios sería 2^h. Por tanto, para que la media sea un número entero, la expresión (1) ha de ser divisible entre 2^h. Pero si además deseamos que sea primo, la media ha de ser exactamente el primer factor $(1+2^a)$, que es el único que es impar y no va a desaparecer en el cociente entre 2^h. Por tanto, el resto de factores ha de desaparecer.

Un factor del tipo $(1+p^k)$ con p primo para simplificarse en el cociente ha de ser una potencia de 2, y el valor mínimo que consigue esto es $(1+3^1) = 4$. Por tanto, cada paréntesis de (1) ha de ser una potencia de 2 de al menos exponente 2. Resumiendo,

$\text{Usigma}(N) \geq (1+2^a)*4*4*4\ldots*4 = (1+2^a)*2^{2(h-1)}$ (2)

Para hallar el promedio de divisores unitarios dividimos entre 2^h y nos resulta:

$M = \text{Usigma}(N)/ 2^h \geq (1+2^a)*2^{h-2}$

Y llegamos a un resultado interesante: Para que M sea primo, h debe valer 2 y por tanto $M=(1+2^a)$. Y más todavía: para que en (2) sea válida la igualdad p_1 ha de valer 3 y k_1 la unidad.

Sólo los números pares de la forma 2^a*3 podrán tener una media M prima. Además, dicha media será un número primo de Fermat.

Si recordamos que los números de Fermat son del tipo

$$2^{2^n}+1$$

Y que no todos son primos, obtendremos la solución anticipada:

6=2*3, 12=2^2*3, 48=2^4*3, 768=2^8*3, 196608=2^{16}*3,…

Relaciones entre sigma y usigma

Terminamos esta serie con algunos resultados curiosos sobre las relaciones entre las funciones sigma(N) y usigma(N).

1) En los números libres de cuadrados coinciden *sigma* y *usigma*: todos los divisores son unitarios. En los que contienen cuadrados no se puede dar la igualdad, pues si el factor p figura como p^2 o con una potencia mayor k, su correspondiente factor en *usigma* sería ($1+p^k$) y en *sigma* ($1+p+p^2+\ldots p^k$) ¿Recuerdas por qué?

2) En los números 108, 540, 756, 1188, 1404, 1836, 2052, 2484,…la función *sigma* es el doble que la *usigma* (ver http://oeis.org/A063880)

3) Se pueden establecer otras relaciones entre ambas funciones.

(a) Imagina un número N cuya parte cuadrada es 4. Su descomposición factorial será del tipo

$N=2^2*p_1*p_2*p_3$…con lo que las funciones tendrían como expresión:

Sigma(N)=(1+2+4)(1+ p_1) (1+ p_2) (1+ p_3)…

Usigma(N)=(1+4)(1+ p_1) (1+ p_2) (1+ p_3)…, luego

5*sigma=7*usigma

Si lo programas con una hoja de cálculo obtendrás la secuencia

4, 12, 20, 28, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92,… (http://oeis.org/A081770) formada por los números cuya parte cuadrada es 4.

(b) Esta relación de 5 a 7 se convierte en la de 10 a 13 en el caso de tener parte cuadrada igual a 9. ¿Cuál sería la relación si la parte cuadrada fuera p^k con p primo?

(4) Recuerda las dos definiciones de sigma y usigma:

$$\sigma(N)=\prod\frac{p_i^{\,s_i+1}-1}{p_i-1}=\prod(1+p_i+p_i^{\,2}+\cdots p_i^{\,s_i})$$

$$\sigma^*(N)=\prod(1+p_i^{\,k_i})$$

No vamos a plantear ahora cuál será el MCD de los valores de ambas para un mismo N

(a) **Si N no es cuadrado perfecto, *sigma* y *usigma* tendrán algún factor común y su máximo común divisor será mayor que 1.**

En efecto, entre la multiplicidades $\boldsymbol{e_i}$ de los factores primos existirá una al menos que sea impar (¿por qué?). Supongamos que sea **k impar** y exponente de un factor primo **p** de N.

Entonces, por razones algebraicas tenemos:

$1+p^k = (1+p)(1-p+p^2-p^3\ldots.)$, luego 1+p divide a $1+p^k$ y por tanto divide a usigma(N)

$1+p+p^2+p^3+\ldots p^k = (1+p)p+(1+p)p^3+(1+p)p^5\ldots =$
$(1+p)(p+p^3+p^5+\ldots p^{k-1})$

Esto sólo es posible porque k es impar. Por tanto, (1+p) también divide a sigma(N)

Así que hemos demostrado que los números no cuadrados presentan un MCD(sigma(N),usigma(N))>1, que era nuestra afirmación. Ese máximo común divisor es múltiplo de p+1 para algún factor primo p de N.

Lo puedes comprobar en esta tabla

N	Sigma	Usigma	MCD
2	3	3	3
3	4	4	4

4	7	5	1
5	6	6	6
6	12	12	12
7	8	8	8
8	15	9	3
9	13	10	1
10	18	18	18
11	12	12	12
12	28	20	4
13	14	14	14
14	24	24	24
15	24	24	24
16	31	17	1
17	18	18	18

En ella vemos que los números que no son cuadrados el MCD es mayor que 1. Incluso en los libres de cuadrados coinciden las tres funciones, sigma, usigma y MCD. Sin embargo, en los cuadrados el resultado es 1, pero no debemos confiarnos.

(b) **Los números cuadrados presentan en general MCD(sigma(N),usigma(N))=1, salvo algunos en los que se dan los valores 5, 13, 37, 61, 65, 73, 793,…**

En este caso las multiplicidades $\boldsymbol{e_i}$ de los factores primos serán **todas pares**, y no se podrá aplicar el razonamiento del apartado anterior.

Si emparejamos los factores que un mismo número primo p con multiplicidad k par produce en ambas funciones, tendremos (llamamos S al factor en *sigma* y U a su homologo en *usigma*):

S: $1+p+p^2+p^3+p^4+....+p^k$ (factor de **p** en sigma)

U: $1+p^k$ (factor de **p** en usigma)

Pues bien, U y S son primos entre sí y no aportan ningún factor al MCD.

En efecto, si un factor **m** divide a **U** y a **S**

- No será **m** igual al número primo **p**, pues en ese caso no dividiría a U
- No dividirá **m** a **p+1**, pues $1+p^k = (1+p)M(p)+2$ por el Teorema del Resto (k es par), lo que nos deja la única posibilidad de que m=2, pero entonces m no dividiría a S, que es impar (¿por qué?).
- Dividirá **m** a la diferencia S-U: $p+p^2+p^3+p^4+....+p^k = p(1+p+p^2+p^3+p^4+....+p^{k-1})$ y como no divide a p, será divisor de $1+p+p^2+p^3+p^4+....+p^{k-1}=(1+p)(1+p+p^2+....+p^{k-2})$. Como tampoco divide a 1+p, lo hará a $1+p+p^2+....+p^{k-2}$ y a su diferencia con S: $p^k+p^{k-1}=(1+p)p^{k-1}$, y esto es definitivamente imposible. Razónalo.

Así que si entre sigma y usigma en los números cuadrados existen factores comunes, estos provendrán

de la expresión U para un número primo y la S para otro primo distinto.

Los factores primos impares de U han de ser de la forma 4k+1, que son los únicos que presentan un resto cuadrático igual a -1

(ver http://hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.htm#restcuad

y

http://hojamat.es/parra/restocuad.pdf)

Esto nos reduce el catálogo de valores de p a 2, 5 13 17 29 37 41 53 61 73 89 97 101 109 113…

Si estos dividen a expresiones del tipo S construidas sobre otro primo, serán los que formen el MCD buscado. No lo haremos, pero ahora, para cada factor primo de los anteriores, buscaríamos qué par de primos distintos producen múltiplos de ellos en U o en S.

Por ejemplo, el factor 61 lo producen U=1+11^2 = 122 = 2*61 y S= 1+13+13^2 = 183 = 3*61

Si encargamos a la hoja de cálculo que nos devuelva los números cuadrados N en los que MCD(sigma(N),usigma(N))>1, obtenemos estos primeros resultados:

N	Sigma	Usigma	MCD
225	403	260	13
576	1651	650	13
900	2821	1300	13
3600	12493	4420	13
8649	12909	9620	13
11025	22971	13000	13
14400	51181	16900	13
19881	29341	22100	13
20449	24339	20740	61
21025	27001	21892	13
27225	53599	31720	13
28224	94107	32500	13
34596	90363	48100	13
38025	73749	44200	13
44100	160797	65000	13
47961	70239	53300	13
53824	110617	54730	13
57600	205933	66820	13
58564	112735	73210	5
62001	90649	68900	13
65025	123721	75400	13
69696	219583	79300	13

Estos números los hemos publicado en http://oeis.org/A193003

Soluciones

(1) Por la forma de encontrar ambos: los unitarios se consiguen combinando las potencias máximas y los libres de cuadrados las mínimas (unitarias). Por ejemplo, en 84, para conseguir los unitarios combinamos 3, 4 y 7 (ocho posibilidades) y para los libres de cuadrados 3, 2 y 7.

(2) Si N es impar, cada uno de los factores que forman usigma

$$\sigma^*(N) = \prod \left(1 + p_i{}^{k_i}\right)$$

Será par, luego contiene el factor 2^omega(N) y al dividir por este se simplificará, resultando un entero.

(3 b) Sería de (1+pk) a (1+p+pk)

(4) Porque los unitarios se forman como términos del producto

$$\sigma^*(N) = \prod \left(1 + p_i{}^{k_i}\right)$$

Y los libres de cuadrados con

$$\sigma^*(N) = \prod (1 + p_i)$$

Y ambos desarrollos presentan el mismo número de elementos 2k.

LA ANTISIGMA

ANTISIGMA DE UN NÚMERO NATURAL

Al igual que se ha definido la función SIGMA(N) como la suma de todos los divisores de N (incluido él mismo), podemos definir la ANTISIGMA(N), que es la suma de los números menores que N y que no lo dividen, Por ejemplo, la antisigma de 8 sería la suma de 3+5+6+7=21, y sigma(8) es igual a 1+2+4+8=15.

Los valores de esta función antisigma son los siguientes, que están incluidos en

https://oeis.org/A024816

0, 0, 2, 3, 9, 9, 20, 21, 32, 37, 54, 50, 77, 81, 96, 105, 135, 132, 170, 168, 199, 217, 252, 240, 294, 309, 338, 350,…

Comprueba que para el 8 se da el valor de 21, que es el que hemos calculado.

No se debe confundir con la indicatriz de Euler, que cuenta los números primos con N. En la suma correspondiente al 8 figura el 6, que no divide al 8, pero tampoco es primo con él. Con estos números primos con N se puede formar también una suma. Nosotros, para entendernos, la llamaremos S_EULER. Puedes consultar la página https://oeis.org/A023896. En el caso del 8, la suma sería 1+3+7=11 (por convención, se considera el 1 primo con todos los demás números. Esto facilita los cálculos). Es evidente que S_EULER(N) será siempre menor o igual que ANTISIGMA(N), porque sus sumandos están incluidos en la otra suma.

La suma de SIGMA(N) y ANTISIGMA(N) es muy fácil de calcular, ya que se trata de sumar todos los números desde 1 hasta N, y esto sabemos que es igual a N(N+1)/2.

Relación fundamental:

SIGMA(N)+ANTISIGMA(N)=N(N+1)/2

Si no se dispone de la función SIGMA, también se puede encontrar ANTISIGMA. Por ejemplo, puedes usar este código Basic de Excel:

```
Public Function antisigma(n) 'suma los no divisores
Dim i, a

a = 0
For i = 1 To n
If n / i <> n \ i Then a = a + i  ‘no es divisor de n, y se suma
Next i
End If
antisigma = a
End Function
```

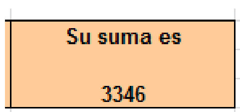
Si ya tienes implementada SIGMA, el desarrollo es mucho más simple:

Public Function antisigma(n)
antisigma = n * (n + 1) / 2 - sigma(n)
End Function

Así lo haremos en PARI

antisigma(x)=x*(x+1)/2-sigma(x)

Con el Buscador es fácil encontrar la antisigma. Por ejemplo, para 84, basta emplear la condición NO DIVISOR DE 84, y buscar entre 1 y 84. Si al terminar nos fijamos en la suma, nos dará el valor de la antisigma:



La antisigma de 84 será 3346, y como su sigma es 224, se cumple la identidad 3346+224=84*85/2.

Antisigmas calculables mediante una fórmula

Nos referimos a una fórmula sencilla, sin tener que proceder a una descomposición complicada en factores primos.

Antisigma de un número primo

Si p es primo, es posible encontrar una fórmula para la antisigma. En efecto, por la relación anterior, antisigma(p)=p(p+1)/2-sigma(p)=p(p+1)/2-(p+1)=(p2+p-2-2p)/2=(p2-p-2)/2=(p+1)(p-2)/2, Hemos usado el hecho de que la sigma de un primo p equivale a p+1, como es evidente.

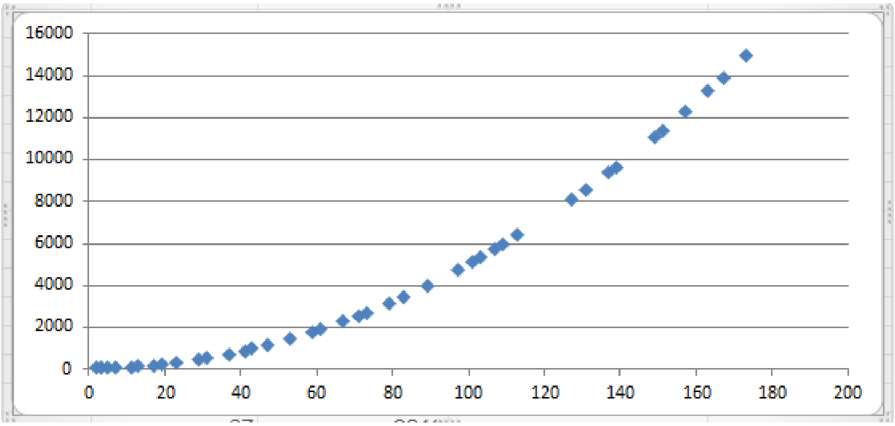
Así que si p es primo, es válida la fórmula

$$\mathrm{antisigma}(\mathrm{p}) = \frac{(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}-2)}{2}$$

Por ejemplo, antisigma(7)=8*5/2=20,

antisigma(13)=14*11/2=77

Es curioso el hecho de que esta función sea evaluable directamente en este caso. Constituye una relación cuadrática, y su diagrama conjunto forma una parábola.



En los números compuestos hay que descomponer en factores primos previamente, y se pierde así una relación tan directa.

Antisigma de una potencia de 2

Si N=2k, entonces sigma(N)=1+2+4+8+…2k=(2k+1-1)/(2-1)=2k+1-1. Aplicamos la relación fundamental y nos queda:

Antisigma(2k)=2k(2k+1)/2-(2k+1-1)=(22k+2k-2*2k+1+2)/2=(22k-3*2k+2)/2

(2k-2)(2k -1)/2=(N-1)(N-2)/2 y también (2k-1-1)(2k -1) (ver http://oeis.org/A134057)

La antisigma de una potencia de 2 es un número triangular. Si la potencia es N, su antisigma hemos visto que es (N-1)(N-2)/2, el triangular de orden N-1. Lo puedes comprobar en este listado:

N=2^k	(N-1)(N-2)/2
1	0
2	0
4	3
8	21
16	105
32	465
64	1953
128	8001
256	32385
512	130305
1024	522753
2048	2094081
4096	8382465
8192	33542145
16384	134193153
32768	536821761
65536	2147385345
131072	8589737985

Antisigma de semiprimos con factores diferentes

Un caso también sencillo es el de semiprimos producto de dos primos diferentes. Si N=pq, con p y q primos, es posible encontrar una fórmula sencilla para la antisigma. Los valores son los siguientes:

N	Antisigma(N)
6	9
10	37
14	81
15	96
21	199
22	217
26	309
33	513
34	541
35	582
38	681

Busquemos la fórmula que los genera: La sigma de un número primo p es p+1, luego de q será q+1. Como es una función multiplicativa, la sigma del producto equivaldrá a (p+1)(q+1) y por tanto la antisigma pq(pq+1)/2-(p+1)(q+1). Parece que queda mejor así sin intentar simplificarla. La comprobamos: 35=5*7, luego su antisigma será 35*36/2-6*8=35*18-48=582

Antisigma de la potencia de un primo

Es otro caso sencillo. La sigma de una potencia de primo pr viene dada por 1+p+p2+ p3+…+ pr, es decir:

$$\sigma(n) = \frac{p^{r+1}}{p-1}$$

Por tanto, la antisigma vendrá dada por

$$\mathrm{asig}(n) = \frac{p^r(p^r+1)}{2}\frac{p^{r+1}}{p-1}$$

Lo comprobamos: según el primer listado, la antisigma de 27 es 338, y según esta fórmula se obtendría

Asig(33)=27*28/2-(81-1)/2=338

Algunas curiosidades sobre la antisigma

Se ha publicado algo, no mucho, sobre algunas propiedades y curiosidades acerca de la antisigma. Destacamos algunas y aportaremos otras.

Antisigmas cuadradas

La antisigma de un número puede ser un cuadrado. Esto ocurre en los siguientes números: 1, 2, 5, 6, 14, 149, 158, 384, 846, 5065, 8648, 181166, 196366, 947545, 5821349, 55867168, 491372910, 4273496001, 40534401950,… http://oeis.org/A076624

En el caso de números primos, como el 2 y el 5, deberemos resolver una ecuación diofántica de segundo grado, ya que (p+1)(p-2)/2=k2. Donovan Johnson ha encontrado la recurrencia que genera otros casos en la página de OEIS enlazada. El siguiente primo sería 8946229758127349.

Nosotros también nos aproximaremos al tema mediante una ecuación de Pell. Transformamos la igualdad multiplicando todo por 4 y desarrollando:

4p2-4p-8=8k2 Completamos un cuadrado y queda: (2p-1)2-8k2=9 Cambiamos de variables haciendo X=(2p-1)/3 Y=k/3, obteniendo la ecuación de Pell

X2-8Y2=1

Tenemos una herramienta para resolver esta ecuación, en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell

Aplicándola para el caso D=8 obtenemos varias soluciones para X e Y,

3	1
17	6
99	35
577	204
3363	1189
19601	6930
114243	40391
665857	235416
3880899	1372105
22619537	7997214

Si a ellas añadimos la solución trivial X=1, Y=0 y deshacemos el cambio X=(2p-1)/3 mediante p=(3X+1)/2, obtendremos todas las soluciones para p. En la imagen que sigue hemos añadido una columna para saber si son primos o no los valores obtenidos, y vemos (los de color rojo) que coinciden con los valores primos de la sucesión:

X	Y	p	Es primo
1	0	2	VERDADERO
3	1	5	VERDADERO
17	6	26	FALSO
99	35	149	VERDADERO
577	204	866	FALSO
3363	1189	5045	FALSO
19601	6930	29402	FALSO
114243	40391	171365	FALSO
665857	235416	998786	FALSO
3880899	1372105	5821349	VERDADERO
22619537	7997214	33929306	FALSO

Con una herramienta más potente podemos seguir con las iteraciones y llegar a la siguiente solución prima dada por Donovan Johnson e incluso sobrepasarla. No damos muchos detalles por no alargar. La iteración de Pell en este caso es (ver la teoría en http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2010/02/ecuacion-de-pell.html)

Xn=3Xn-1+8Yn-1, Yn=Xn-1+3Yn-1

La aplicamos reiteradamente en PARI comenzando con X=1 Y=0, y tomamos nota de las soluciones de X que son primas. Obtendremos un listado en el que aparecerán los cuatro primos obtenidos aquí, más el propuesto por Donovan Johnson, 8946229758127349, y alguno más.

Programa en PARI

```
{x=1;y=0;for(n=1,60,m=(3*x+1)/2;if(isprime(m),print1(m,"
, "));p=3*x+8*y;q=x+3*y;x=p;y=q)}
```

Resultado obtenido:

2, 5, 149, 5821349, 8946229758127349, 13748537282247342677718149, 828287615476676026361062299923143963349, 32470531080787945457870876690417952137154149,

Aparecen tres nuevas y enormes soluciones. Este tipo de descubrimientos hacen que sigamos con estos temas a pesar del cansancio de los años.

Antisigmas triangulares

Sólo hemos encontrado el caso ya estudiado de las potencias de 2. No parece que haya ningún número que no sea potencia de 2 y tenga antisigma triangular.

Antisigmas primas

Estos son los números con antisigma prima: 3, 4, 10, 21, 34, 46, 58, 70, 85, 93, 118, 129, 130, 144, 178, 201, 226, 237, 262, 298, 310, 322, 324, 325, 333, 334, 346, 382, 406,... http://oeis.org/A200981

Sólo figura entre los primos el 3, porque si (p+1)(p-2)/2 ha de ser primo, si p es mayor que 3 aparecerían dos factores al menos en la antisigma.

Llama la atención la abundancia de semiprimos. Según la fórmula que vimos en la entrada anterior, deberá darse la casualidad de que si N=pq, se dé que pq(pq+1)/2-(p+1)(q+1) sea primo. Por ejemplo, 46=2*23 y su antisigma sería 46*47/2-3*24=1009, que es primo.

Antisigma y sigma coprimas

Terminamos por ahora con otra curiosidad: Números en los que sigma y antisigma son primos entre sí:

4, 9, 10, 16, 21, 22, 25, 34, 36, 46, 49, 57, 58, 64, 70, 81, 82, 85, 93, 94, 100, 106, 118, 121, 129, 130, 133, 142, 144,…

Al principio parece que pertenecerán a ella los cuadrados, pero a partir de 196 hay muchos que no cumplen esta propiedad: 441, 1521, 1764, 3249, 3600,…

En esta sucesión todos son compuestos, pues un primo p tiene como sigma p+1 y como antisigma (p+1)(p-2)/2, con lo que el factor (p+1)/2 divide a ambas para un primo mayor que 2. Y en el caso del 2, su sigma es 3 y su antisigma 0, que no tiene divisores.

APÉNDICE

FUNCIÓN SOFPR

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve la suma con repetición de todos los divisores primos del número.

Código en Basic

Public function sofpr(n)
Dim ene,f,c,s [creación de variables]

ene=n [la variable ene recoge el argumento para preservar su valor]
f=1 [contendrá los factores primos]
s=0 [contendrá la suma de primos]

[bucle para encontrar los factores primos y sumarlos]

while ene>1 [la variable ene va disminuyendo en el algoritmo]
f=f+1 [la variable f va aumentando para buscar factores primos]

[bucle para determinar si f es factor primo y si se repite]

while ene/f=int(ene/f) [determina si f es divisor y busca sus repeticiones]
ene=ene/f [se divide ene entre el factor, que ya se sabe que lo es]
s=s+f [se incorpora f a la suma de primos]
wend [fin de bucle]
wend [fin de bucle]

sofpr=s [la función sofpr recoge el valor de s]

End function

FUNCIÓN BIGOMEGA

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve la cuenta con repetición de todos los divisores primos del número. Equivale a la suma de sus exponentes

Código en Basic

public function bigomega(n)
dim i,a,s

i=2:s=0:a=n
while i<=a

```
if esprimo(i) then
while esmultiplo(a,i)
a=a/i
s=s+1
wend
end if
i=i+1
wend
bigomega=s
end function
```

FUNCIÓN ARMÓNICO

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve VERDADERO si el número es armónico

Código en Basic

Function armonico(n) as boolean
Dim a,b,j

a=0 Inicia el contador de divisores
b=0 Inicia el sumador de divisores

for j=2 to n/2+1
if esmultiplo(n,j) then
a=a+1 Se ha encontrado un divisor: se aumenta el contador en 1
b=b+j Se aumenta el sumador con el valor del divisor
end if
next j

a=a+2 Se añade 2 para contar también 1 y N
b=b+n+1 Se añaden al sumador 1 y N
m=i*a/b Media armónica
if m=int(m) then armonico=true else armonico=false
end sub