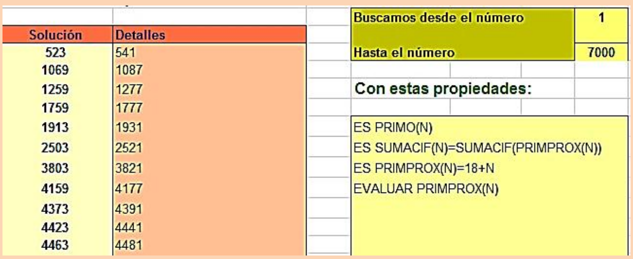
Inevitables primos



Solución	Detalles
523	541
1069	1087
1259	1277
1759	1777
1913	1931
2503	2521
3803	3821
4159	4177
4373	4391
4423	4441
4463	4481

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	7000

Con estas propiedades:

ES PRIMO(N)
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(PRIMPROX(N))
ES PRIMPROX(N)=18+N
EVALUAR PRIMPROX(N)

Edición 2026

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Nada sin números primos. Inciden en la mayoría de las cuestiones sobre números, son escurridizos e inabarcables y nos sorprenden siempre. La gran cantidad de cuestiones planteadas sobre ellos hace necesaria una clasificación, pues si no, no habría forma de establecer un orden mínimo.

Esta publicación recorre muchos años de trabajos sobre estos números, por lo que se pueden distinguir distintos estilos, extensión y planteamientos. Se han respetado algunos temas propios del año en el que se escribieron, junto a los más recientes. Esto refuerza lo que se advierte siempre en estas publicaciones de hojamat.es, y es que no son sistemáticas, sino una colección de temas que han ido surgiendo a lo largo de los años, que en el caso de los primos ya van para quince años.

TABLA DE CONTENIDO

PRIMOS Y POTENCIAS DE 2

HISTORIA DE UNA CONJETURA

Hace unas semanas, con motivo del año nuevo, llegué a la expresión $2011=2^{11}-37$. Una vez publicada, se me ocurrió preguntarme qué otros números primos se podrían expresar igualmente como una potencia de 2 menos otro número primo.

Programé la hoja de cálculo para encontrar el menor número primo que sumado a otro dado produce una potencia de 2. Todo fue bien salvo en ciertos primos, como 7, 43, 101, 127, 151, 223, …Busqué e investigué qué podían tener de particular esos primos y no llegué a ninguna conclusión. Mejoré y simplifiqué el algoritmo y me di cuenta de que simplemente los resultados sobrepasaban los registros de la hoja.

Así que definí, para todo número primo p, la función **comple2(p)**, como el menor número primo que sumado a **p** da como resultado una potencia de 2.

Por ejemplo: comple2(857) =167, ya que

$857+167=1024=2^{10}$.

Implementé esta función en Excel y OpenOffice.org con este código:

```
Public Function comple2(n)
Dim b, a
b = 2
a = b - n
While esprimo(a) = 0
b = b * 2
a = b - n
Wend
comple2 = a
End Function
```

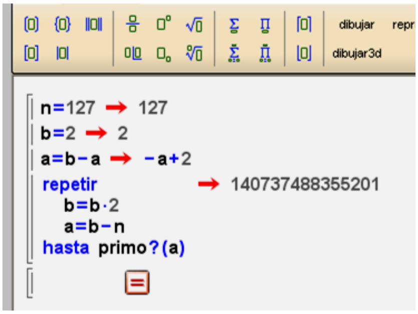
y así logré esta tabla

P	COMPLE2(P)	P	COMPLE2(P)
2	2	97	31
3	5	101	67108763
5	3	103	409
7	5,49756E+11	107	149
11	5	109	19
13	3	113	911
17	47	127	1,40737E+14
19	13	131	16253
23	41	137	887
29	3	139	373
31	97	149	107

37	2011	151	2147483497
41	23	157	32611
43	536870869	163	349
47	17	167	89
53	11	173	83
59	5	179	3917
61	3	181	331
67	61	191	16193
71	953	193	2096959
73	439	197	59
79	433	199	313
83	173	211	33554221
89	167	223	¡Parece imposible!

Sólo existe un primo que resulta igual a su complementario: naturalmente el 2. La relación no es simétrica, porque por ejemplo comple2(13)=3 y sin embargo comple2(3)=5

Al llegar al 223 fue imposible lograr su imagen. Los registros de datos no daban más de sí. Por ello, me decidí a usar un programa CAS. Como intento trabajar siempre con software gratuito, acudí a la calculadora Wiris, con el algoritmo que se puede estudiar en la imagen, y ahí se produjeron los resultados sorprendentes:



Comple2(223)=2^{261}-223=

=3705346855594118253554271520278013051304639
509300498049262642688253220148477729

Comple2(809) 2^{636}-809=

=2851525386013872011650732253562682078058267
81703034995661199532368704697950542336656619
55070733571248616514434834965045691804404508
59648748907913324826383867657496671475165593
80179637015411927

Comple2(947)= 2^{278}-947

48566722305643226772986547670587972666060170
976303488

0312953102434726071301302123597

Como no me acababa de fiar, acudí al programa wxMaxima con un código similar, pero ajustando el valor inicial de la potencia para evitar valores negativos:

```
n:223$
b:256$
c:b-n$
for i:1 unless primep(c) do (
b:b*2,
c:b-n
)$
display(c);
```

y confirmé los resultados anteriores.

Me di cuenta de que el cálculo de este complementario de un número primo se podía complicar muchísimo, pero, ¿daría lugar en algún caso a un bucle sin fin? ¿existiría algún número primo que nunca pudiera ser completado a una potencia de 2?

Estudio con restos potenciales

Intenté cambiar el punto de vista del estudio, y en lugar de una búsqueda ciega, me propuse usar restos potenciales. He aquí el resultado.

Dado un número primo p, la expresión 2^n-p representará un compuesto si el resto potencial de 2^n para cualquier posible divisor primo r coincide con el resto de p respecto a ese mismo divisor r.

Lo vemos con un ejemplo: Si p=7, descubrimos anteriormente que tenía un complementario muy grande (comple2(7)= 549755813881), podríamos recorrer los distintos números primos (no considerando obviamente el 2, por cuestión de paridad) para ver si coinciden los restos de las potencias de 2 con los de 7.

Si r=3, los restos potenciales del 2 respecto al 3 son alternativamente iguales a 2,1,2,1, … y el resto de 7 respecto a 3 es igual a 1, luego la expresión 2^n-7 en sus valores positivos será divisible entre 3 de forma alternativa:

2^4-7=9=3.3, 2^6-7=57=19.3, 2^8-7=249=83.3, …

Como buscamos que la expresión 2^n-7 sea un número primo, ya sabríamos que los valores n=2,4,6,8,…no nos valdrían.

Para r=5, los restos potenciales de 2 forman la secuencia 2,4,3,1,2,4,3,1, …y el resto de 7 respecto a 5 es 2. Por tanto para los valores de n=5,9,13, …la expresión 2^n-7 también será compuesta.

Imaginemos que recorremos todos los posibles divisores primos de 2^n-7, al igual que hemos hecho con 3 y 5 y cada vez que coincidan el resto potencial de 2 con el de 7, tachamos esa posibilidad. Es como una criba. Si al terminar el análisis quedan huecos, es que existe comple2(p) y si todos los posibles valores son compuestos, no será posible. Para terminar ese análisis deberemos llegar hasta la raíz cuadrada de 2^n-7, lo cual puede ser penoso.

Hemos preparado una hoja de cálculo que para cada primo estudia las coincidencias entre restos y le asigna el valor “NO” a los compuestos.

En la siguiente tabla se recoge el principio del análisis para 37. Se comienza a analizar cuando el valor de 2^n-7 es positivo.

2n-p	n	37	1	2	2	4	11	3	18	14	8	6	0	37
			3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
-35	1		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
-33	2		1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

-29	3		2	3	1	8	8	8	8
	8	8	8	8	8				
-21	4		1	1	2	5	3	16	16
	16	16	16	16	16				
-5	5		2	2	4	10	6	15	13
	9	3	1	32	32				
27	6		1	4	1	9	12	13	7
	18	6	2	27	23				
91	7	NO	2	3	2	7	11	9	14
	13	12	4	17	5				
219	8	NO	1	1	4	3	9	1	9
	3	24	8	34	10				
475	9	NO	2	2	1	6	5	2	18
	6	19	16	31	20				
987	10	NO	1	4	2	1	10	4	17
	12	9	1	25	40				
2011	11	SI	2	3	4	2	7	8	15
	1	18	2	13	39				

Los números en negrita son los restos que coinciden con los de 37 (primera fila) respecto a los distintos primos (segunda fila), y se ve que el 2011 es el primer valor en el que no se producen coincidencias, y por tanto comple2(37)=2011.

Como hay que probar primos hasta la raíz cuadrada de $\mathbf{2^n\text{-}p}$, el análisis se puede hacer tan largo que no elimine las dudas.

Otras ideas

En los comentarios en el blog, surgieron otras ideas que podrían aclarar el problema:

- Uso del sistema binario, buscando los 0 y 1 complementarios. El problema radicaría entonces en ver si el complementario es primo.
- La conjetura ya había sido estudiada, en The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!, secuencia A101
- 462. Efectivamente, en ella se representaban los exponentes del 2 y se notificaba que para el número p=1871 no se había podido verificar la existencia de un primo complementario.
- Relación con los números de Riesel. Si se comprueba esa relación, la conjetura sería falsa, y el número 509203 un contraejemplo.

Respuesta de Jens Kruse Andersen

This conjecture is known to be false. It is not related to Goldbach's conjecture.

It is related to Riesel numbers. 509203 is the smallest proven Riesel number and it happens to be prime. There are other primes in *http://oeis.org/A101036.*

k*2^509203-1 has the covering set {3, 5, 7, 13, 17, 241}. More importantly to us, 2^n-509203 has the same covering set.

This means 2^n-509203 is always divisible by at least one of those six primes.

Then there is no prime q such that 509203+q = 2^n. Riesel numbers form arithmetic progressions with common difference equal to the product of the primes in the covering set.

For example, 509203 + b*(3*5*7*13*17*241) is a Riesel number for any b.

Dirichlet's theorem says there are infinitely many primes of this form.

Then there are infinitely many counter examples to the conjecture.

Note: It may be possible that a few of the primes p in an arithmetic
progression of Riesel numbers are not counter examples because there is an n such that 2^n-p is *equal* to a prime in the covering set.

- Si sólo consideramos primos consecutivos, las soluciones para p+siguiente(p)=2^k son 3, 61, 4093,… *in http://oeis.org/A125661*
- Si se prueba con 2^k+p obtenemos que 773 necesita que le sumes 2^955 para obtener otro primo.

RELACIONES ENTRE PRIMOS Y POTENCIAS DE 2

Aquí tienes una demostración que no es muy complicada:

Para todo número primo p a partir del 5, la expresión 2^p-2 es divisible entre p

(a) Es una consecuencia inmediata de un famoso teorema ¿cuál? Te damos un par de minutos para acordarte.

(b) Lo que no es tan inmediato es que también lo es entre 6p (de ahí lo de comenzar en 5).

(c) Y menos inmediato: Siendo p primo, 2^p-2 se puede representar como la suma de p-1 múltiplos de p iguales dos a dos (prueba con la Combinatoria).

(d) Y menos todavía: Si esos múltiplos los divides entre p obtienes el número de collares posibles formados con p cuentas, algunas de ellas negras y otras blancas.

Solución

(a) Por el pequeño teorema de Fermat

(b) 2p-2 es par, luego divisible entre 2, y el resto potencial de 2p respecto al 3 es 2, luego también es divisible entre 3.

(c) Basta tomar los coeficientes binomiales de índice superior p y prescindir del primero y el último. Al ser p primo, el factorial del denominador del número combinatorio no puede dividirle, luego es múltiplo de p.

LOS HUECOS DE UN PRIMO

Los cinco primos de Fermat conocidos, 3, 5, 17, 257 y 65537, tienen en común que su representación en el sistema de numeración binario está formada por un 1, un conjunto de ceros y al final otro 1. Son números con un gran hueco entre dos unidades. Por ejemplo, el 65537 está representado por 10000000000000001. Sólo se conocen esos cinco primos con esa estructura. Es fácil razonar que los de Fermat son los únicos posibles, pues su expresión ha de ser del tipo 2^n+1

¿Habrá primos con otras estructuras posibles en sus huecos entre unos?

Podíamos buscar los que estuvieran formados por dos intervalos iguales, como 100010001. ¿Habrá alguno? Sí, pero sólo se conocen tres: 7, 73 y 262657. Puedes leer algunos detalles en ***http://oeis.org/A051154***. Su expresión sería del tipo $2^{2n}+2^n+1$. Golomb dedujo que para que sean primos n ha de ser potencia de 3. Puedes también consultar

http://www.alpertron.com.ar/MODFERM.HTM

¿Y si buscáramos primos con estructuras similares a 1000100010001?, con cuatro unos? Pues yo no lo haría. Seguro que son compuestos. En realidad, no debes probar con ningún ejemplo que contenga un número par de unos situados de forma equidistante. No hemos encontrado más ejemplos con un número impar de huecos similares.

Podemos renunciar a la periodicidad de los ceros. Pueden existir primos con dos unos iniciales y el resto ceros hasta el último uno. Los hemos buscado con hoja de cálculo y aparecieron 7, 13, 97, 193, 769, 12289, 786433, 3221225473, 206158430209, …El primero, 7, sólo presenta los unos, 111, pero los demás son espectaculares, como 206158430209 con expresión

11000000000000000000000000000000000000001.

Puedes ver los siguientes en ***http://oeis.org/A039687***

El problema inverso de encontrar estructuras del tipo 1000000011 ya está también resuelto y publicado en ***http://oeis.org/A057733***

Podíamos buscar otros con dos unos al principio y al final, pero me temo que sería inútil ¿no?. Ahí no hay primos.

Otras estructuras

Los siguientes primos poseen sus huecos en magnitud creciente:

3 11

11 1011

68990043211
1000000010000001000001000010001001011

36064050381096011
1000000000100000000100000001000000100000
1000010001001011

Con la estructura simétrica de conjuntos de ceros de longitud creciente de derecha a izquierda, al menos con hoja de cálculo, sólo he encontrado el 3 y el 13.

A estos otros les llamo “primos piano”:

26417 110011100110001

422657 1100111001100000001

108199937 1100111001100000000000000001

Si deseas saber el porqué, mira el teclado de un piano.

Este otro es similar, con otra visión del “teclado”:

989721526273 es un primo con estos huecos:

1110011001110000000000000000000000000001

Y estos otros son más simétricos:

134323393 1000000000011001110011000001

137442334721

1000000000000000110011100110000000000001

¿Deseas investigar otras estructuras? Puedes probar con

Números 2-repunits (o repunos o repitunos): No tienen huecos en el sistema binario. Busca por ahí cuáles son primos, y verás qué escasez.¡Son los primos de Mersenne!

Números de Carol: Sólo tienen un hueco, pero bien situado. Tampoco hay muchos primos entre ellos. Los puedes ver en *http://oeis.org/A091516*

Números de Thabit: Los números del tipo 3.2^n-1 se llaman números de Thabit y en el sistema de numeración binario vienen representados por las cifras 1, 0 seguidas de la cifra 1 repetida hasta terminar la expresión. Por ejemplo, el número de Thabit 786431 viene representado por 10111111111111111111. Investiga por ahí cuáles son primos. También existen los de estructura simétrica. Los tienes en ***http://oeis.org/A050415***

DISTANCIA BINARIA ENTRE PRIMOS

La historia se repite

En la entrada de mi blog “¿Alguien sabe algo de esto?” nos planteábamos si dado un primo p cualquiera, existe otro q tal que la suma de ambos sea una potencia de 2. Después de algo de reflexión y ayudas externas llegamos a la conclusión de que esta posibilidad fallaba, quizás en el número 1871.

Al revisar la entrada para integrarla en una publicación se me ocurrió usar la diferencia entre primos en lugar de la suma: dado un número primo p, ¿existe siempre un exponente k entero tal que $p+2^k$ sea primo? Al mínimo valor posible de este exponente le llamaremos “distancia binaria entre ambos primos” o DISTBIN.

Podíamos interpretar ese número k como el lugar donde podríamos sumar 1 a la expresión binaria de p para que se convirtiera en otro número primo, el menor posible.

Por ejemplo, el número primo 61 tiene como expresión binaria 111101 y su función ***distbin*** vale 8. Esto quiere decir que en el orden 8 de su expresión binaria hay que añadir un 1 (tomamos como 0 la primera posición): 100111101, que equivale al número primo 317.

En los primeros números primos el cálculo de ***distbin*** es sencillo:

Primo P	Distancia binaria	Primo Q
2	0	3
3	1	5
5	1	7
7	2	11
11	1	13
13	2	17
17	1	19
19	2	23
23	3	31
29	1	31
31	4	47
37	2	41
41	1	43
43	2	47
47	5	79
53	3	61
59	1	61
61	8	317

Tienes los datos de **q** en ***http://oeis.org/A139758*** y los de **k** en ***http://oeis.org/A094076***

Como en el caso anterior de p+q=2^n, hay primos en los que el cálculo de esta distancia desborda la capacidad de una hoja de cálculo. Destacan los siguientes:

El 773

Se tiene que distbin(773)=955, con lo que el otro primo presenta 288 dígitos:

3045410628562499712610431996210996347148820
8929984398521462207678790464658645081570205
0470808812820600790778632231520880733099058
2875966889555621030097704193603524281236397
8218346217673406417651102498729622557433980
2674935168589842054573862983405175400866837
597008673346307143437247316741

Imagina que su expresión binaria estará formada por un 1, más de novecientos ceros y después la expresión del 773.

El 1627

Distbin: 127

q: 85070591730234615865843651857942054491

El 2131

Bloquea las herramientas que hemos usado.

En http://oeis.org/A094076 se afirma que se ha probado el 2131 para k<30000

Si deseas practicar con el tema, te ofrecemos los códigos de búsqueda que se han usado:

Basic

Definición de DISTBIN

```
Function distbin(a)
Dim c, p, p2, i

c = 0
If a > 2 And esprimo Then
p = 0
p2 = 1
i = 1
Do Until esprimo(p2)
i = i * 2
p2 = a + i
p = p + 1
If esprimo(p2)  Then c = p
Loop
End If
distbin = c
End Function
```

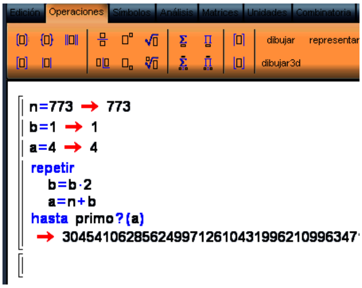
Wxmáxima

Imagen del cálculo de distbin(1627)

```
(%i1) n:1627$
      b:1$
      c:4$
      p:1$
      for i:1 unless primep(c) do (
      b:b*2,
      p:p+1,
      c:b+n
      )$
      display(p);
      display(c);
p=127
  (%o6) done
c=85070591730234615865843651857942054491
  (%o7) done
```

Calculadora Wiris

Imagen del cálculo de distbin(773). En ella no entra todo el resultado.



Lenguaje PARI

Aquí tienes el código para encontrar distbin(61)=8

```
distbin(n)={local (c=0,p=0,i=1);if(n>2 &&
isprime(n),until(isprime(n+i),i=i*2;p=p+1;c=p) ;
return(c))}

print(distbin(61))
```

Para otro número sustituye el 61 por él. Lo hemos comprobado también con distbin(773)=955

Con ellas puedes tener una idea de los algoritmos usados.

¿DÓNDE ESTÁN ESOS PRIMOS?

NIDOS DE PRIMOS

Hace unos días se me ocurrió averiguar cuántos números primos se pueden generar permutando conjuntos determinados de cifras. Les llamé “nidos de primos”.

Consideré los números primos permutables, que son aquellos cuyas permutaciones de cifras forman también números primos. Los primos permutables de pocas cifras son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, 1111111111111111111, 11111111111111111111111…

En ellos se repite algún dígito, por lo que no llegan al máximo posible, que coincide con el factorial del número de cifras.

Con una hoja de cálculo emprendí la búsqueda para estudiar el máximo número de primos que se puede generar. Estudié separadamente los que contenían la cifra 0, en los que cambia el número de cifras. Encontré lo siguiente:

Conjuntos de dos cifras: Con éstos no había que probar nada. El máximo de primos generados es 2, como en el caso de 13 y 31 y los permutables de la lista anterior.

Tres cifras: El máximo número de primos generado podría ser 6, pero ningún número de tres cifras llega a tanto. Aquí me fallaron algunos candidatos que parecían idóneos, como el 137, y los conjuntos de cifras que producen más primos resultan ser 149, 179 y 379 (y todas sus permutaciones), que forman 4 primos cada uno. Por ejemplo, 1, 4 y 9 generan 149, 419, 491, y 941.

Si consideramos la cifra 0, también producen cuatro primos 107, 709 y todas sus permutaciones.

Cuatro cifras: Con cuatro cifras el número de permutaciones posibles es de 24. No se llega a tanto. Aquí hay dos conjuntos con número máximo de primos. Forman exactamente 11 primos, y son 1237 y 1279. Es curioso que la cifra 2 entre a formar parte de los dos conjuntos que forman más primos.

Cinco cifras: Aunque mi búsqueda no ha sido totalmente exhaustiva, creo que el máximo número de primos lo engendra el conjunto 13789, que permite formar 39 primos, seguido de 13459 con 37 y 12379 con 36.

Es instructivo el estudio de los cocientes entre el número de primos generado y el de permutaciones de los conjuntos:

2/2!=1; 4/3! = 0,6667; 11/4! = 0,4583; 39/5! = 0,325 Podemos compararlos con los cocientes entre los primos menores o iguales a 10, 100, 1000,.. y esas mismas cantidades:

4/10=0,4; 25/100=0,25; 168/1000= 0,168;
1229/10000=0,1229

Observamos que ambas son decrecientes y muy cercanas a progresiones geométricas de razón similar, como se ve en los cocientes entre cada elemento y su anterior:

0,6667/1 = **0,6667** y 0,25/0,4 = **0,625**
0,4583/0,6667 = **0,6875** y 0,168/0,25 = **0,672**
0,325/0,4583 = **0,7091** y 0,1229/0,168 = **0,7315**

Esto indica que ambos están relacionados de alguna forma con la distribución de números primos.

Aquí detuve la búsqueda, porque la hoja de cálculo se lentifica pronto. Si alguien emplea programas más potentes puede seguir con números más altos de cifras.

CERCA DEL CUADRADO DE UN PRIMO

Alrededor del cuadrado de un número primo mayor que 3 no hay muchos más primos. El cuadrado parece que los aleja. En efecto, no son primos los números $p^2 – 1$, $p^2 – 3$, $p^2 – 4$, $p^2 – 5$, $p^2 + 1$, $p^2 + 2$ y $p^2 + 3$. Lo podemos expresar con este esquema construido en los alrededores de 49:

44	45	46	47	48	49	50	51	52
Par	Múltiplo de 3	Par	Libre	Múltiplo de 48	Cuadrado de 7	Par	Múltiplo de 3	Par

Para entenderlo mejor hay que considerar que los primos pueden tener la forma 4k+1, 4k+3 o bien 6k+1 o 6k-1. Sus cuadrados pueden ser:

$(4k+1)^2=16k^2+8k+1=8m+1$
$(4k+3)^2=16k^2+24k+8+1=8m+1$
$(6k+1)^2=36k^2+12k+1=12m+1$
$(6k+1)^2=36k^2-12k+1=12m+1$
Así queda más claro:

$p^2 – 1$ es múltiplo de 8 y 12, compuesto
$p^2 – 3$ es par

$p^2 – 4$ es 12m-3, múltiplo de 3
$p^2 – 5$ es par
$p^2 + 1$ es par
$p^2 + 2$ es 12m+3, múltiplo de 3
$p^2 + 3$ es par
Sólo queda un lugar para un posible número primo, y es $p^2 – 2$.

En algunos casos se rellena con un número primo, como en el caso de 49, en el que 47 es primo, y en otros es un compuesto con divisores primos superiores a 5.

¿Podrías demostrarlo? La clave de todo está en $p^2 – 1$, que es múltiplo de…(piensa y demuestra)

Además, hay cuadrados de primos que están muy aislados, como el 529 = 23^2, al que sólo rodean los primos 521, 523, 541 y 547, entre 520 y 550, o el 1681=41^2 cuyos primos más cercanos son 1669 y 1893. ¿Sabrías encontrar casos similares?

Estudio elemental con el Buscador

Puedes elegir un cuadrado de primo, como 127^2=16129 y después buscar primos en sus alrededores. Sería así:

Solución	Detalles
16127	
16139	

Buscamos desde el número	16120
Hasta el número	16140
Con estas propiedades:	
PRIMO	

La única condición es que sea PRIMO, y vemos que sólo 16129-2=16127 lo es. Podía no haberlo sido. Lo importante es que los demás no lo son, hasta llegar a 16139.

Ampliación

Es fácil programar qué primos están más cerca del cuadrado de otro primo. Si lo buscamos por la parte inferior nos resultan

3, 7, 23, 47, 113, 167, 283, 359, 523, 839, 953, 1367, 1669, 1847, 2207, 2803, 3469,

(http://oeis.org/A054270)

Por la parte superior resultan

5, 11, 29, 53, 127, 173, 293, 367, 541, 853, 967, 1373, 1693, 1861, 2213, …(http://oeis.org/A062772)

Si restáramos ambos nos resultaría el intervalo libre de primos que está alrededor del cuadrado de otro primo:

2, 4, 6, 6, 14, 6, 10, 8, 18, 14, 14, 6, …

Soluciones

Si p es primo, p^2-1 es múltiplo de 24.

(a) Es múltiplo de 3

Un número primo puede presentar una de las formas 3n+1 o 3n+2.

Si p=3n+1, entonces

$p^2-1=9n^2+6n+1-1 = 3(3n^2+2n)$

Si p=3n+2, entonces

$p^2-1=9n^2+12n+4-1 = 3(3n^2+4n+1)$

(b) Es múltiplo de 8

Un número primo puede presentar una de las formas 8n+1, 8n+3, 8n-1 ó 8n-3. Procediendo de igual forma:

Si p=8n+1, entonces

$p^2-1=64n^2+16n+1-1 = 8(8n^2+2n)$

Si p=8n-1, entonces

$p^2-1=64n^2-16n+1-1 = 8(8n^2-2n)$

Si p=8n+3, entonces

$p^2-1=64n^2+48n+9-1 = 8(8n^2+6n+1)$

Si p=8n-3, entonces

$p^2-1=64n^2-48n+9-1 = 8(8n^2-6n+1)$

Con esto hemos demostrado que p^2-1 es múltiplo de 24, por lo que no será primo. Tampoco lo serán $p^2 – 5$, $p^2 – 3$, $p^2 + 1$ y $p^2 + 3$ por ser pares. $p^2 – 4$ y $p^2 + 2$ serán múltiplos de 3. Por tanto, ninguno es primo.

El número $p^2 – 2$ no puede ser múltiplo de 2 porque es par, ni de 3, porque es de la forma 24k-1, ni de 5, porque termina en 7 o en 9 (p^2 sólo puede terminar en 1 ó 9), luego sus factores primos serán mayores que 5. Es el caso, por ejemplo, de $23^2-1=17*31$.

Búsquedas

Se pueden organizar búsquedas para encontrar los números primos más próximos a p^2. Para ello se necesitan las funciones "próximo primo" PRIMPROX y "anterior primo" PRIMANT, que dan los primos más cercanos a un número por la parte superior y por la inferior respectivamente (ver Apéndice). Así se pueden organizar tablas similares a la siguiente:

Distancia	PRIMANT(p2)	p2	PRIMPROX(p2)	Distancia
6	523	529	541	12

De esta forma podemos descubrir que el cuadrado de primo más aislado por la derecha entre los primos menores que 10000 es 66896041, el cuadrado de 8179, que dista 102 unidades de su próximo primo, que es 66896143.

Por la izquierda el más aislado es 15437041, cuadrado de 3929, que dista 98 unidades del número 15436943, primo más cercano inferiormente.

Por ambos lados el que dista más de sus primos cercanos es el cuadrado de 7559, 57138481, que está rodeado de compuestos entre los límites 57138413 y 57138539, con un rango de 126 números.

FÓRMULAS QUE ATRAEN PRIMOS

Quienes somos aficionados a los números aprendemos pronto que no hay fórmulas elementales que engendren números primos, a pesar de que muchas mentes valiosas las buscaron. No obstante, hay fórmulas que, al aplicarlas, sus resultados presentan más probabilidad de ser primos que los elegidos al azar.

Podemos pensar en las fórmulas clásicas, que después resultaron fallidas, como $n^2 + n + 17$ y $n^2 - n + 41$.

Si engendramos un conjunto de números con estas fórmulas y contamos los primos, nos resulta un nivel destacable. Lo hemos programado con hoja de cálculo, obteniendo:

Para $n^2 + n + 17$:

Números primos en los primeros 500 resultados: 213, con una proporción del 43%

Números primos en los primeros 500 naturales: 95, un 19%

Para $n^2 - n + 41$:

Números primos en los primeros 500 resultados: 326, con una proporción del 65%

¡Quienes inventaron estas fórmulas no iban muy descaminados!

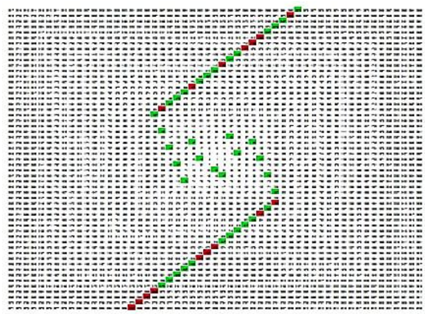
Si deseas probar estas u otras fórmulas puedes programar el Buscador de naturales (ver apartado anterior) mediante el uso de la condición CUADRATICO.

El primer caso $n^2 + n + 17$ lo puedes programar asÍ:

PRIMO
CUADRATICO 1 1 17

En realidad, todas estas fórmulas y otras similares están contenidas como diagonales en la Espiral de Ulam. En esta dirección puedes divertirte un poco con algunas consideraciones sobre ella:

http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/propuestas/rutas/htm/ulam.htm



La imagen representa el conjunto de los resultados de $n^2 + n + 17$ en dicha espiral. Los números primos son los elementos de color verde, que son los que predominan.

Como ejercicio y tema de reflexión propondremos otra fórmula que aumenta bastante la probabilidad de encontrar primos entre sus resultados:

Toma dos números a y b primos entre sí y mayores que 2. Con ellos forma la expresión (a-1)*(b-1)-1 ¿Qué podemos decir de los factores primos de esa expresión?

Cuando lo averigües intenta generar muchos pares del tipo a y b y cuenta cuántos primos se engendran con la fórmula. Unas veces se producirán y otras no:

Si a=39 y b=55, primos entre sí, resulta (39-1)(55-1)-1 = 2051 que no es primo, sino semiprimo.

Pero si a=15 y b=64, resulta 881 que sí es primo.

¿Será alta la proporción? ¿Por qué?

Te dejamos unas estadísticas para convencerte. Hemos elegido pares de coprimos y les hemos aplicado esta fórmula. Después comparamos con la lista de números naturales, mediante la función "primos hasta N"

Cota para a y b	Pares resultantes	Primos encontrados	Proporción	Proporción en naturales
50	700	362	0,52	0,18
100	2895	1265	0,44	0,14
200	11933	4416	0,37	0,12

Se comprueba que la proporción es del orden del triple de la usual entre números no sometidos a ninguna fórmula. Queda para tu estudio la causa de esto.

Si cambiáramos la expresión (a-1)*(b-1)-1 por (a-1)*(b-1)+1 las estadísticas siguen siendo buenas, aunque del orden del doble de lo normal. Otra cuestión que puedes intentar explicar

Cota para a y b	Pares resultantes	Primos encontrados	Proporción	Proporción en naturales
50	700	256	0,37	0,18
100	2895	911	0,31	0,14
200	11933	3306	0,28	0,12

En vista de estos resultados nos podíamos animar a buscar primos gemelos con las dos expresiones y compararlos con la función "Primos gemelos hasta N". También es destacable el incremento de la proporción.

Cota para a y b	Pares resultantes	Primos gemelos	Proporción	Proporción en naturales
50	700	113	0,16	0,04
100	2895	361	0,12	0,03
200	11933	1063	0,09	0,02

Si se te ocurren otras expresiones similares nos lo puedes contar.

Soluciones

La expresión f=(a-1)(b-1)-1 equivale a ab-a-b, que no comparte factores primos ni con a ni con b. En efecto, si x dividiera a **f** y a **a**, dividiría también a **ab**, con lo que dividiría a **b**, en contra de que **a** y **b** son coprimos. Igual ocurriría en el caso opuesto.

Por otra parte, los divisores de **a-1** y **b-1** tampoco lo serían de **f**, por razón similar, luego f pierde los factores de **a**, **b**, **a-1** y **b-1**, lo que aumenta, en un conjunto grande de casos, el que aparezcan primos.

Un ejemplo: Si a=24 y b=77, se perderían los factores 2 y 3 de 24, 7 y 11 de 77, 23 de 24-1 y 2 y 19 de 77-1. En este caso el resultado 1747 es primo.

DAMOS VUELTAS A PRIMOS Y AL 18

Hace unos días Honorio, un seguidor de mi blog, nos envió la siguiente conjetura: “Entre dos números primos consecutivos cuyos dígitos sumen lo mismo, como mínimo hay una diferencia de 18 entre ambos”.

Me causó sorpresa y aunque el tema de primos y cifras no es de los que más me entusiasman me puse a pensar en ella. Pronto descubrí que esta propiedad no la tienen por ser primos, sino por ser impares (el 2 no entra en la conjetura porque no coincide su suma con el consecutivo). Lo podemos demostrar:

La diferencia entre dos números impares distintos que presenten la misma suma de cifras es siempre un múltiplo (no nulo) de 18.

En efecto, si tienen la misma suma de cifras ambos presentarán el mismo resto módulo 9 (recuerda el criterio de divisibilidad entre 9), luego su diferencia es múltiplo de 9. Pero como ambos son impares, su diferencia es par, luego también es múltiplo de 18, no nulo, porque ambos números son distintos. Luego el valor mínimo de la diferencia es 18, y todas las demás, múltiplos de dicho número.

Esta propiedad abre un abanico de posibilidades: los primos pueden ser consecutivos o no. La diferencia suele ser 18 pero puede ser mayor. Podíamos dar algunas vueltecitas al tema:

V1) Primos consecutivos con la misma suma de cifras y diferencia 18

Si disponemos de las funciones PRIMPROX (próximo primo), ESPRIMO y SUMACIFRAS, ya tenemos las condiciones de búsqueda. Lo hemos realizado con el resultado de

523, 1069, 1259, 1759, 1913, 2503, 3803, 4159, 4373, 4423, 4463, 4603, 4703, 4733, 5059, 5209. 6229. 6529, 6619, 7159, 7433, 7459, 8191, 9109, 9749, 9949, 10691, 10753, 12619, 12763, 12923, 13763, 14033, 14303, 14369, 15859, 15973

523
1069
1259
1759
1913
2503
3803
4159
4373
4423
4463
4603
4703
4733
5059
5209

(Sólo se escribe el primer número primo de cada par)

Con nuestro <u>Buscador de naturales</u> puedes reproducirla planteando las condiciones

ES PRIMO(N)
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(PRIMPROX(N))
ES PRIMPROX(N)=18+N

Se exige que N sea primo, que tenga la misma suma de cifras que el siguiente primo y que su diferencia sea 18. Si deseas ver el par completo añade EVALUAR PRIMPROX(N)

Solución	Detalles
523	541
1069	1087
1259	1277
1759	1777
1913	1931
2503	2521
3803	3821
4159	4177
4373	4391
4423	4441
4463	4481

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	7000

Con estas propiedades:

ES PRIMO(N)
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(PRIMPROX(N))
ES PRIMPROX(N)=18+N
EVALUAR PRIMPROX(N)

Siempre que encontramos una secuencia la comprobamos en OEIS para ver si está publicada, y en este caso no lo está, por lo que la hemos propuesto con el número A209875 http://oeis.org/A209875 Hoy la nombraré como V1

5
13
19
23
29
43
53
79
109
113
139
149
163
173
179
223
233
239
263

V2) Primos con la misma suma de cifras que se diferencian en 18

Parece la misma cuestión, pero es que **no exigimos que sean consecutivos**. Por ejemplo, el 2 y el 11 presentan la misma suma y se diferencian en 9. Para buscarlos bastará ver que **p** sea primo y p+18 también, y que tengan la misma suma de cifras. Como las condiciones son menos restrictivas, es normal que aparezcan muchos más.

El resultado es este:

5, 13, 19, 23, 29, 43, 53, 79, 109, 113, 139, 149, 163, 173, 179, 223, 233, 239, 263, 313, 349, 379, 439, 443, 449, 491, 503, 523, 569, 613, 643, 659, …

Se puede reproducir con el Buscador con las siguientes condiciones:

PRIMO
ES PRIMO(N+18)

ES SUMACIF(N)=SUMACIF(N+18)

Solución	Detalles
5	
13	
19	
23	
29	
43	
53	
79	
109	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	300

Con estas propiedades:

PRIMO
ES PRIMO(N+18)
ES SUMACIF(N)=SUMACIF(N+18)

En la imagen tienes el resultado. También aquí puedes ver el par completo con **EVALUAR N+18**

Esta sucesión incluye a la V1. No estaba publicada en OEIS, por lo que la hemos incluido con el número A209663 **https://oeis.org/A209663**

Si la nombramos como V2, ya tenemos que **V1 ⊂V2**.

V3) Primos consecutivos con la misma suma de cifras

En este caso las diferencias entre ellos serán múltiplos de 18.

El resultado es muy parecido al de V1 y está publicado en OEIS hace tiempo

523, 1069, 1259, 1759, 1913, 2503, 3803, 4159, 4373, 4423, 4463, 4603, 4703, 4733, 5059, 5209, 6229, 6529, 6619, 7159, 7433, 7459, 8191, 9109, 9749, 9949, 10691, 10753, 12619, 12763, 12923, 13763, 14033, 14107, 14303, … https://oeis.org/A066540

Puedes reproducirla en el Buscador de Naturales con

PRIMO

ES SUMACIF(N)=SUMACIF(PRIMPROX(N))

El primer par con diferencia 36 es (14107,14143). El primero con diferencia 54 es (35617, 35671) y el primero con 72 (31397, 31469)

Es claro que V1 es un subconjunto de V3, porque 14107 o 35617 pertenecen a V3 y no a V1

Estos pares de consecutivos se pueden ampliar a tripletes: tres números primos consecutivos con la misma suma de dígitos

Los primeros que hemos encontrado son:

22193	22229	22247
25373	25391	25409
69539	69557	69593
107509	107563	107581
111373	111409	111427
167917	167953	167971
200807	200843	200861
202291	202309	202327
208591	208609	208627
217253	217271	217307
221873	221891	221909
236573	236609	236627

238573	238591	238627
250073	250091	250109
250307	250343	250361
274591	274609	274627
290539	290557	290593

Estos tripletes tampoco figuraban en OEIS. Ya es de prever que los hemos incorporado (ver **A209396**)

Me he puesto a buscar conjuntos de primos consecutivos con la misma suma de cifras. Después de encontrar este me he cansado. Si alguien quiere seguir…

1442173, 1442191, 1442209, 1442227

(Claudio Meller, en la entrada que enlazamos al final, presenta estos cuatro, aunque referidos a igual promedio: ***8508473, 8508491, 8508509, 8508527***. También nos ha indicado dónde se pueden consultar los primeros elementos de los pares, tripletes y demás conjuntos de primos consecutivos con la misma suma. Los puedes encontrar en https://oeis.org/A071613. Gracias, Claudio)

V4) Otra vuelta más.

Si dos números presentan la misma suma de cifras también coinciden en el valor de su **raíz digital**, que es el número entre 0 y 8 que resulta si sumamos sus cifras, y después volvemos a sumar las cifras de esa suma y reiteramos hasta obtener un número menor que 9. Es fácil razonar que ese número es el resto de dividir el número primitivo entre 9.

El inverso no es cierto: si se da la misma raíz digital las sumas de cifras no han de ser iguales, sino congruentes módulo 9.

Pues bien, si sólo exigimos que dos números primos consecutivos tengan la misma raíz digital nos resulta otra sucesión más amplia que la V1 y la V3, que también se ha publicado en OEIS

523, 1069, 1259, 1381, 1759, 1913, 2161, 2503, 2861, 3803, 3889, 4159, 4373, 4423, 4463, 4603, 4703, 4733, 5059, 5209, 5483, 6011, 6229, 6451, 6529, 6581, 6619, 7159, 7351, 7393, 7433, 7459, 7621, 7883, 8191, 8761, 9109, 9293, 9551, 9749, 9949, …

(https://oeis.org/A117838)

Aquí se puede razonar también que las diferencias han de ser múltiplos de 18. Inténtalo.

V5) Aún quedan vueltas que dar, pero lejos de mí producir mareos irreversibles. Las presento con breves referencias:

V51) Tener la misma suma de dígitos es una condición fuerte, pero es más exigente pedir que sean los mismos dígitos, aunque en distinto orden, los que tengan dos primos consecutivos. Puedes verlos en

https://oeis.org/A069567

y se llaman pares de Ormiston. Los tienes completos en https://oeis.org/A072274 También existen tripletes de Ormiston.

V52) Y otra vuelta: Claudio Meller, de forma casi simultánea a nosotros ha tratado el tema, pero con promedios

(ver http://simplementenumeros.blogspot.com/2012/03/889-primos-consecutivos-con-igual.html)

Bueno, bueno, ya vale de dar vueltas. Si encontráis temas similares los incorporo como extensión.

SUMA CON EL PRÓXIMO PRIMO

En estudios anteriores sumamos dos primos consecutivos e investigamos la naturaleza de esa suma y en algunos casos de su mitad (media de ambos).

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/06/suma-de-dos-numeros-primos-consecutivos.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2014/06/suma-de-dos-numeros-primos-consecutivos_29.html

Hoy podríamos buscar propiedades similares pero **sin exigir que el primer número del par sea primo**, pero sí usando el primer primo que le sigue (o que le antecede). Comenzaremos sumando cada número con el primer primo que le sigue e investigaremos si también es primo.

Suma con el primo siguiente

Dado un número natural cualquiera, buscaremos menor primo superior a él. Nuestra función de hoja de cálculo PRIMPROX(N) nos serviría en este caso, por lo que en realidad estudiaremos la suma N+PRIMPROX(N). La tienes contenida en la hoja Conjeturas.xlsm

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/conjeturas.xlsm

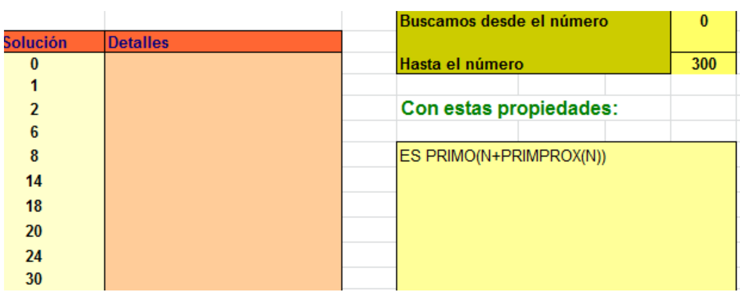
Búsqueda de primos

Un número, si es primo, no puede formar otro primo sumado con el siguiente, salvo el caso de 2+3=5, pero sí lo forma si no es primo. Buscamos, pues, números no primos que al sumarles el mínimo primo mayor que ellos sí produzcan suma prima. Por ejemplo, el 14 con su próximo primo 17 suma otro primo, el 31.

Los números con esta propiedad son

0, 1, 2, 6, 8, 14, 18, 20, 24, 30, 34, 36, 38, 48, 50, 54, 64, 68, 78, 80, 84, 94, 96, 98, 104, 110,114, 124, 132, 134, 138, 144, 154, 156, 164, 174, 182, 188, 198, 208, 210, …

Es fácil comprobarlo cn el Buscador:



En todos ellos al sumarles su próximo primo obtendremos otro número primo. Vemos que son frecuentes, pero otros muchos no cumplen la propiedad.

Así, 24 sí la cumple, porque 24+29=43, que es primo, pero 22+23=45, que es compuesto. Es trivial descubrir que todos son pares salvo el caso especial 1.

En realidad estamos exigiendo otra propiedad, y es que si llamamos D a la diferencia entre N y su próximo primo, si sumamos D a 2N también resulta otro primo (no necesariamente PRIMPROX(2N)). Es fácil justificarlo y podemos representarlo en este tipo de esquema, que usaremos más adelante también, y que hemos implementado en hoja de cálculo para realizar pruebas. Insertamos el correspondiente al 38:

Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D	
38	3	41	
Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D	
76	3	79	
		¿Es primo?	
		VERDADERO	
		Pero no ha de ser el próximo	

Los números de la sucesión los hemos obtenido con Excel, pero puede resultar más sencillo acudir a PARI:

{for(i=0,10^3,k=i+nextprime(i+1);if(isprime(k),print1(i,", ")))}

Su funcionamiento se entiende fácilmente. Sólo hay que explicar es que para encontrar el próximo primo hay que basarse en i+1 y no en i.

Lo hemos usado para publicar la sucesión en https://oeis.org/A249624

Es evidente que, salvo el caso 0 y 1 son todos pares, y algunos, como el 8 y el 64, potencias de 2. Podíamos afirmar que estos números son diferencias de primos, pero lo importante es que esas diferencias son **las mínimas posibles**, ya que no existen más primos entre ellos. Sin esa condición, estaríamos en las condiciones de la conjetura de Polignac, que afirma que para todo 2k existen dos primos tales que q-p=2k. Entonces, si la conjetura es cierta, todos los pares cumplirían la condición impuesta.

Estos son los valores de esas diferencias:

1, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 5, 1, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 1, 3, 3, 3, 13, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 1, 3, 5, 9, 3, 1, 3, 1, 7, 3, 1, 3, 3, 5, 5, 3, 1, 9, 13, 7, 1, 3, 3, 9, 3, 1, 1, 3, 7, 1, 3, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 5, 3, 1, 3, 7, 3, 3, 11, 5, 7, 3, 7, 1, 5, 11, 9, 3, 13, 3, 1, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 5, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 3, 5, 3, 1, 5, 1, 3, 9, 5, 7, 3, 1, 3, 3, 3, 7, 3, 7, 3, 11, 9, 5, 1, 5, 1, 9, 13, 9, 7, 3, 13, 7, 1, 3, 13, 3, 7, 7, 3, 1, 3, 5, 5, 3, 1, 5, 3, 3, 1,…

Parecen recorrer todos los números impares. En nuestra lista sólo se llega hasta el 13 ¿Aparecerán al final todos?¿Podrá ser cualquier impar diferencia entre un número par y su próximo primo si ambos suman otro primo?

Hemos implementado una función que a cada número impar (no analizamos en ella si lo es o no) le hace corresponder el mínimo número natural que sumado con él produce un primo en el que la suma de ambos también es primo.

```
Public Function difconprim(n)
Dim i, d, dd, p
i = 2
d = 0
While d = 0 And i < 10 ^ 6
p = primprox(i)
If esprimo(p + i) And p - i = n Then d = i
i = i + 2
Wend
difconprim = d
End Function
```

Recorre los números pares (variable i) hasta un tope de 10^6 (para números mayores habría que aumentarlo) y estudia si el próximo primo p cumple que p+i es primo y la diferencia entre ambos es el número n dado. No está completo ni optimizado el código. Sólo pretendemos establecer una conjetura. Aquí tienes la tabla para los primeros números impares:

d	i
1	2
3	8
5	24
7	216
9	182
11	468
13	114
15	1138
17	1958
19	2484
21	1130
23	1338
25	3138
27	3272
29	1332
31	12858

Por ejemplo, para la diferencia 21 el primer número par que la produce es el 1130, en el que se dan estos datos:

		Es primo
Diferencia	21	
Número par	1130	
Siguiente primo	1151	VERDADERO
Suma prima	2281	VERDADERO

Si a 1130 le sumamos la diferencia 21 se convierte en el número primo 1151, cuya suma con el anterior 1130+1151=2281, también es un número primo.

Puedes construirte un esquema similar. La función PRIMPROX la encontrarás en la hoja Conjeturas referenciada más arriba. El problema que se presenta es que las hojas de cálculo se ralentizan cuando el valor buscado tiene muchas cifras. Así, entre los números impares menores que 100 la solución mayor es la correspondiente al 97, que es nada menos que 3240996. Lo puedes ver en este esquema:

		Es primo
Diferencia	97	
Número par	3240996	
Siguiente primo	3241093	VERDADERO
Suma de primos	6482089	VERDADERO

Para paliar esta lentitud hemos realizado también la búsqueda con PARI

```
difconprim(n)={local(i=2,d=0,p=2);while(d==0&&i<10
^7,p=nextprime(i);if(isprime(i+p)&&(p-
i==n),d=i);i+=2);return(d)}

{k=1;while(k<100,write("final.txt",k,"
",difconprim(k));k+=2)}
```

Si tienes preparado en la misma carpeta un archivo de nombre “final.txt”, este código te crea en él un listado similar al que sigue (hemos recortado la parte de los números anteriores a 100)

81	404860
83	990054
85	404856
87	370286
89	1467990
91	1468296
93	370280
95	370278
97	3240996
99	838250

Parece que nos podemos atrever a expresar una conjetura:

Cualquier número impar es diferencia entre cierto número y su próximo primo, en el caso en el que la suma de ambos también sea prima.

Suma con el primo anterior

En los párrafos anteriores estudiábamos la suma de un número con su próximo primo y encontramos los números en los que esa suma es prima. La misma cuestión se puede abordar si le sumamos el anterior primo más cercano. Lo desarrollaremos ahora. Al igual que con el próximo primo se puede plantear que sea prima la suma con el anterior. Hay muchas soluciones. Las primeras son:

3, 4, 6, 10, 12, 16, 22, 24, 30, 36, 42, 46, 50, 54, 56, 66, 70, 76, 78, 84, 90, 92, 100, 114, 116, 120, 126, 130, 132, 142, 144, 156, 160, 170, 174, 176, 180, 186, 192, 196, 202, 210, 220, 222, 226, 232, 234, 240, 246, 250, 252, 276, 280, 282, 286, 288, 294, 300, 306, 310, …

Todos ellos, salvo los primeros casos especiales, son pares, como era de esperar. Si les sumamos el primo más cercano por la izquierda el resultado también es primo. Así, 282 tiene como primo anterior el 281, y la suma de ambos, 563, es prima. Los hemos publicado en https://oeis.org/A249666

Para obtenerlos con PARI sólo efectuaremos un pequeño cambio:

{for(i=3,10^3,k=i+precprime(i-1);if(isprime(k),print1(i,", ")))}

También podemos expresar esta propiedad con un esquema similar al de la cuestión anterior:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N
151	5	156
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N
307	5	312
¿Es primo?		
VERDADERO		
Pero no ha de ser el próximo		

Vemos el ejemplo de 156, en el que se cumple que tanto N-D como 2N-D son primos.

Al igual que en la cuestión anterior, podemos obtener un listado de las diferencias entre el número natural dado y su anterior primo (con suma de ambos prima)

Diferencias

2 1 1 1 3 1 3 3 1 1 5 1 3 3 1 3 5 3 3 5 1 1 3 3 1 3 7 13 3 1 3 5 5 3 3 1 3 1 5 1 3 3 11 9 11 3 3 1 1 5 9 1 5 3 1 3 5 1 7 13 3 7 9 13 3 9 3 3 1 5 5 3 3 3 7 3 5 9 1 1 3 1 3 3 7 3 1 3 1 3 3 5 15 17 5 3 9 3 3 9 1 3 3 11 1 3 3 1 1 5 1 7 7 5 9 1 5 5 3 1 3 7 1 3 7 13 5 9 3 7 1 5 5 9 3 3 7 3 9 13 15 1 9 3 3 1 7 7 5 3

También aquí nos podemos preguntar si están todos los números enteros positivos impares en la lista. Conjeturamos que sí, y hemos confeccionado un listado similar al del caso precedente, en el que encontramos para cada caso el valor del número que consigue una suma prima en las condiciones dadas y que la diferencia con el sumando primo sea la dada.

Primera ocurrencia de dferencia dada

	3	10
	5	36
	7	120
	9	220
	11	210
	13	126
	15	538
	17	540
	19	2496
	21	1690
	23	1350
	25	3162
	27	3298
	29	1356
	31	5622
	33	1360
	35	12888
	37	30630
	39	16180
	41	16182
	43	28272
	45	28274
+	47	25518

En este caso también formularemos una conjetura:

Cualquier número impar es diferencia entre cierto número y su anterior primo, en el caso en el que la suma de ambos también sea prima.

Números que cumplen ambas condiciones

Basta recorrer las dos listas de números que hemos considerado para darnos cuenta de que existe una intersección entre ambas. Son aquellos números que forman suma prima tanto con el siguiente primo como con el precedente. Son estos:

6, 24, 30, 36, 50, 54, 78, 84, 114, 132, 144, 156, 174, 210, 220, 252, 294, 300, 306, 330, 360, 378, 474, 492, 510, 512, 528, 546, 560, 594, 610, 650, 660, 690, 714, 720, 762, 780, 800, 804, 810, 816, 870, 912, 996, 1002, 1068, 1074, 1104, 1120, 1170, 1176, 1190, …

Por ejemplo, dado el número 996, su siguiente primo es 997 y su suma, 1993, es un número primo. En dirección opuesta, el primo precedente a 996 es 991, y su suma. 1987, también es prima. Los hemos publicado en https://oeis.org/A249667

Los hemos encontrado con hoja de cálculo y con PARI

(Código PARI)

{for(i=3,2*10^3,k=i+nextprime(i+1);q=i+precprime(i-1);if(isprime(k)&&isprime(q),write1("final.txt",i,", ")))}

También para ellos es válido el esquema que estamos usando, en este caso, doble:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D
997	5	1002	7	1009
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D
1999	5	2004	7	2011
¿Es primo?				¿Es primo?
VERDADERO				VERDADERO

Es evidente que, salvo en los primeros términos de la sucesión, las diferencias son impares (en el ejemplo 5 y 7). Convierten el par de números primos 997 y 1009 en el par de abajo (1999,2011) mediante una traslación de valor 1002. Estos hechos son meras curiosidades sin valor teórico, pero quedan visualmente muy bien.

¿Existirán términos de esta sucesión en los que la diferencias con los primos más cercanos sean iguales? Es un caso interesante, pues el número dado sería el promedio de dos números primos consecutivos y su doble también, pero no necesariamente consecutivos.

Es evidente que sí existen, como sería el caso del 144 cuyos primos más próximos son 139 y 149, cumpliéndose que 144-139=149-144=5 y que tanto 144+139=283 como 144+149=293 son primos.

No cansamos con un nuevo código. Sólo señalaremos que los números buscados son

6, 30, 50, 144, 300, 560, 610, 650, 660, 714, 780, 810, 816, 870, 1120, 1176, 1190, 1806, 2130, 2470, 2490, 2550, 2922, 3030, 3240, 3330, 3390, 3480, 3600, 3620, 3840, 4266, 4368, …

(https://oeis.org/A249676)

Todos ellos son compuestos que equivalen al promedio entre dos primos consecutivos y que con ambos forman suma prima. Para ellos el esquema propuesto se hace más simétrico:

Próximo primo N-D	Diferencia D	Número N	Diferencia D	Próximo primo N+D
557 ←	3	560	3 →	563
↓	↓	↓	↓	
Nuevo primo 2N-D	La misma diferencia	Doble de N	La misma diferencia	Nuevo primo 2N+D
1117 ←	3	1120	3 →	1123
¿Es primo?	N y 2N son promedio			¿Es primo?
VERDADERO	de un par de primos			VERDADERO
	1117+563=	1680	Triple de N	
	1123+557=	1680	Triple de N	

LOS INTERPRIMOS

Se llaman “interprimos” a los números naturales que son media de dos primos consecutivos. El conjunto de estos números es amplísimo, y se puede descomponer en diversos subconjuntos interesantes, la mayoría ya publicados. Los primeros interprimos son

4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 26, 30, 34, 39, 42, 45, 50, 56, 60, 64, 69, 72, 76, 81, 86, 93, 99, 102, 105, 108, 111, 120, 129, 134, 138, 144, …y están publicados en https://oeis.org/A024675.

Basta estudiar la lista para darse cuenta de que hay entre ellos cuadrados (A075190), como 81 y 144, pares (A072568) e impares (A072569), triangulares (A130178), como el 6 y el 15, semiprimos (A078443), como el 21, y muchos más tipos. Sólo los que son potencias ocupan muchas páginas de OEIS (A075190, A075191, A075192, A075228, A075229,…) Visita la página http://oeis.org/wiki/Interprimes y te abrumará la cantidad de variantes que presentan los interprimos.

Quedan pocas posibilidades para explorar, pero alguna habrá por ahí. Evidentemente, un interprimo no puede ser primo, pues entonces los dos primos no serían consecutivos.

Búsqueda de interprimos

En nuestras búsquedas usamos las funciones ESPRIMO, PRIMPROX (próximo primo) y PRIMANT (anterior primo). Basta pedir

NOT ESPRIMO(N) AND
N=(PRIMANT(N)+PRIMPROX(N)/2

Por ejemplo, con ellas hemos buscado los interprimos entre 1000 y 1100:

N	Primo anterior	Primo siguiente
1003	997	1009
1011	1009	1013
1016	1013	1019
1020	1019	1021
1026	1021	1031
1032	1031	1033
1036	1033	1039
1044	1039	1049
1050	1049	1051
1056	1051	1061
1062	1061	1063
1066	1063	1069
1078	1069	1087
1089	1087	1091
1092	1091	1093
1095	1093	1097
1100	1097	1103

Con el Buscador se usan similares condiciones:

Solución	Detalles
1003	
1011	
1016	
1020	
1026	
1032	
1036	
1044	
1050	

Buscamos desde el número	1000
Hasta el número	1100

Con estas propiedades:

NO PRIMO
ES N=(PRIMANT(N)+PRIMPROX(N))/2

Casi todos los interprimos son múltiplos de 2 o de 3, pero no todos (que es lo que afirma Wikipedia), ya que hemos encontrado este contraejemplo: 803 es interprimo entre 797 y 809, y no es múltiplo ni de 2 ni de 3, ya que 803=11*73. De hecho, están publicados los interprimos que no lo cumplen:

205, 217, 473, 515, 625, 667, 803, 1003, 1207, 1243, 1313, 1465, 1505, 1517, 1537, 1681, 1715, 1795, 1817, … https://oeis.org/A072573

Con el Buscador es un poco complicado, pero se consigue:

Solución	Detalles
1	
205	
217	
473	
515	
625	
667	
803	
1003	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1100

Con estas propiedades:

NO PAR
ES N=(PRIMANT(N)+PRIMPROX(N))/2
NO MULTIPLO DE 3
NO PRIMO

Interprimos entre primos gemelos

Entre ellos son interesantes los que son media de dos primos gemelos:

4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, 102, 108, 138, 150, 180, 192, 198, 228, 240, 270, 282, 312, 348, … https://oeis.org/A014574

Salvo el primero, todos son múltiplos de 6, ya que los primos gemelos han de tener la forma 6k-1 y 6k+1 (salvo 3 y 5), con lo que la media será 6k. Este mismo hecho demuestra también que el interprimo es la raíz cuadrada del producto de los dos primos más una unidad:

(6k-1)(6k+1)+1=36k^2=(6k)^2

Según esto, (6k)^2-1 es un semiprimo, pues sólo tiene como factores 6k-1 y 6k+1. Esta puede ser una definición alternativa para estos interprimos. Lo puedes comprobar con PARI

{for(i=1,10^3,m=i*i-1;if(!issquare(m)&&bigomega(m)==2,print1(i,", ")))}

Te devuelve la misma sucesión, pero con la definición de números tales que n^2-1 es un semiprimo.

Interprimos entre primos "cousin" y "sexy"

Los primos "cousin" son los que se diferencian en 4 unidades. Sus promedios son estos:

5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, 99, 105, 111, 129, 165, 195, 225, 231, 279, 309, 315, 351, 381, 399, 441, … https://oeis.org/A087679

Si los anteriores eran todos múltiplos de 6, salvo los primeros, estos lo serán de 3 y no de 6. La razón es que los primos que se diferencian en 4 unidades han de tener la forma 6k+1 y 6k+5, con lo que el promedio será (12k+6)/2=6k+3.

Si el par de primos es "sexy", es decir, que se diferencian en 6 unidades, sus interprimos son:

26, 34, 50, 56, 64, 76, 86, 134, 154, 160, 170, 176, 236, 254, 260, 266, 274, 334, 356, 370, 376, 386, … https://oeis.org/A072571

En este caso, para que diferencien en 6, los primos han de ser 6k+1 y 6(k+1)+1 o bien 6k+5 y 6(k+1)+5. Y los promedios 6k+4 o 6(k+1)+2, luego estos interprimos son todos pares, pero no múltiplos de 3.

Algunos tipos curiosos de interprimos

Ya hemos destacado que existen interprimos cuadrados (A075190). También los hay triangulares (A130178)

Interprimos cuadrados

Son los siguientes:

4, 9, 64, 81, 144, 225, 324, 441, 625, 1089, 1681, 2601, 3600, 4096, 5184, 6084, 8464, 12544, 13689, 16641, 19044, 19600, 25281, 27225, 28224, 29584, 36864, 38025, 39204, 45369, …(http://oeis.org/A069495)

Cuadrado	Diferencia
4	1
9	2
64	3
81	2
144	5
225	2
324	7
441	2
625	6
1089	2
1681	12
2601	8
3600	7
4096	3
5184	5

Salvo el primero, asociado a los primos gemelos 3 y 5, ningún otro será media de este tipo de primos, pues estos tendrían la expresión n^2-1 y n^2+1, y el primero no es primo para $n>3$, por ser igual a $(n+1)(n-1)$. El mismo razonamiento nos vale para afirmar que la diferencia entre el cuadrado dado y sus primos próximos no puede ser un cuadrado k^2, pues el anterior sería $n^2-k^2=(n+k)(n-k)$, no primo. De hecho, estas son las primeras diferencias entre el interprimo cuadrado y el primo más próximo:

Vemos que ninguna es un cuadrado. En ocasiones similares nos hemos preguntado si se recorrerán todas las diferencias posibles, en este caso no cuadradas. Vemos 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, … ¿Estarán todas? Hemos creado una función para averiguarlo. Si no te interesa la programación, ignora el código que se inserta a continuación:

Public Function difcuad(d) ‘Busca el primer cuadrado interprimo con diferencia ***d***

Dim i, n, d1, d2, n0

Dim novale As Boolean

i = 1 ‘Contador de búsqueda

n0 = 0 ‘En el inicio damos el valor 0 a la función por si fracasa la búsqueda

novale = True ‘Variable para controlar el fin de la búsqueda

While i < 10 ^ 5 And novale ‘El tope de 10^5 es arbitrario. Si salen ceros habrá que aumentarlo

n = i * i ‘Se construye un cuadrado

d1 = n - primant(n) ‘Se analizan sus diferencias con los primos próximos

d2 = primprox(n) - n

If d1 = d And d2 = d Then n0 = n: novale = False ‘Si es interprimo, se toma nota y paramos

i = i + 1

Wend

difcuad = n0 ‘La función devuelve el primer cuadrado con la diferencia pedida.

End Function

Con esta función hemos creado una tabla, en la que a cada diferencia (no cuadrada) se le asigna el primer cuadrado n^2 tal que sea interprimo y su diferencia con los primos próximos sea la dada:

Diferencia	Cuadrado mínimo
2	9
3	64
4	
5	144
6	625
7	324
8	2601
9	
10	154449
11	260100
12	1681
13	898704
14	27225
15	114244
16	
17	278784
18	223729
19	4410000
20	25281
21	12888100
22	4730625
23	1512900
24	4774225
25	
26	8208225
27	6130576
28	1121481
29	12744900
30	34586161
31	2433600
32	45360225
33	9784384
34	1271279025
35	64064016
36	
37	69956496

Observamos que hasta el 37 todas las diferencias se corresponden con un cuadrado. A partir de ahí, el cálculo se ralentiza, aunque es de esperar que todas las diferencias no cuadradas tengan una imagen en esta función. Si quieres experimentar por tu cuenta, usa este programa en PARI:

```
difcuad(n)= { local(i=2,m,v=0,p,q);
while(v==0&&i<10^6,m=i*i;            p=m-precprime(m-1);q=nextprime(m+1)-m;if(p==n&&q==n,v=m);i+=1)
;return(v) }
{x=difcuad(50);print(x);print(sqrt(x))}
```

Sustituye el 50 por otro número cualquiera, y si el resultado es 0, cambia 10^6 por una potencia mayor. Aunque PARI es rápido, puedes tener que esperar un poco. Si nuestra conjetura es cierta, al final obtendrás un cuadrado.

Interprimos triangulares

Existen también números triangulares que son interprimos. Los primeros son estos:

6, 15, 21, 45, 105, 120, 231, 300, 351, 465, 741, 780, 861, 1176, 1431, 1485, 3081, 3240, 3321, 3828, 4005, 4278, 5460, 6786, 6903, 7140, 7381, 7503, 7875, 8001, 10731, 11175, 11325, 11781, 12246, 12561, …

(http://oeis.org/A130178)

Casi todos ellos son múltiplos de 2, 3 o ambos, pero no todos. Una excepción es 7381=11*11*61, interprimo entre 7369 y 7393.

No hemos encontrado interprimos triangulares cuya diferencia con sus primos próximos sea también triangular, salvo el caso trivial de 6 con 5 y 7.

Otros interprimos

Oblongos

Un oblongo puede ser también interprimo. Los primeros son estos:

6, 12, 30, 42, 56, 72, 240, 342, 420, 462, 506, 552, 600, 650, 870, 1056, 1190, 1482, 1722, 1806, 2550, 2652, 2970, 3540, 4422, 6320, 7140, 8010, 10302, 12656, 13572, 14042, 17292, 18360, 19182, 19460, 20022, 22952, 23562, 24180, 27060, 29070, 29756, 31152, 33306, 35156, 35532, 39006, …

Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en https://oeis.org/A263676

Por su propia definición, todos son pares. Si estudiamos sus restos respecto al 6, veremos que sólo pueden ser 0 y 2, es decir, todos los oblongos de esta sucesión han de tener la forma 6k o bien 6k+2. La razón es que los primos son todos del tipo 6k+1 o 6k+5. Intenta encontrar sus medias y verás que nunca pueden ser del tipo 6k+4.

Potencias de primo no triviales

Las potencias de un primo aparecen en muchas cuestiones sobre números. Tampoco faltan entre los interprimos. Los primeros son estos:

4, 9, 64, 81, 625, 1681, 4096, 822649, 1324801, 2411809, 2588881, 2778889, 3243601, 3636649, 3736489, 5527201, 6115729, 6405961, 8720209, 9006001, 12752041, 16056049, 16589329, 18088009, 21743569, 25230529, 29343889, 34586161, 37736449, …

Los más abundantes son los cuadrados de primos, como puedes comprobar en la lista.

Se pueden engendrar en PARI (nosotros los hemos comprobado con hoja de cálculo) mediante este código:

```
{for(i=1,10^10,if(isprimepower(i)>1&&i==(precprime(
i-1)+nextprime(i+1))/2,write1("final.txt",i,",
");print(i))))}
```

Hemos publicado esta sucesión en

https://oeis.org/A263675

La función isprimepower es muy útil, pues da el posible exponente de la potencia de primo que buscamos. Como deseamos que dicha potencia no sea trivial, exigimos que el valor de la función sea mayor que 1. Es muy curiosa la lista de potencias en base pequeña que son interprimas. Las más destacadas son:

Potencias de 2

4, 64, 4096, 75557863725914323419136, 306499108173177771671669405430061836723747824436720 4352, …

Por ejemplo, 75557863725914323419136=2^76 es interprimo entre 75557863725914323419121 y 75557863725914323419151. Es una simple curiosidad, pero impresiona que hayamos podido llegar a encontrar estos ejemplos.

Potencias de 3

9, 81, 387420489, 3486784401, 7509466514979724803946715958257547, 147808829414345923316083210206383297601, 1143381127283688482666587404968535761360 2127

080237382571153151471568389249023393608050222706416077770721,
448892491307036257313398359006707643432387469456810160991926368303464199896097475113561830407152947942076292623881529083368591747123618100530770752056321305926194706763551153705251146130442138394723337920866081218864301061606664140464321,

Potencias de 5

5, 625,
32311742677852643549664402033982923967414535582065582275390625,
161558713389263217748322010169914619837072677910327911376953125,

Una buena cuestión, que daríamos por verdadera, es si existen infinitas potencias de este tipo.

Dobles interprimos

A los interprimos, que son media entre dos primos consecutivos, les podíamos exigir que también lo fueran respecto al anterior y al siguiente primo de ese par. Es decir, que dados cuatro primos consecutivos p, q, r y s, exista un número N tal que N=(p+s)/2 y N=(q+r)/2. Esto se cumplirá cuando q-p = s-r, lo cual no quiere decir que los cuatro estén en progresión aritmética.

Un ejemplo: 600 es doble interprimo, porque está en el centro de los cuatro primos consecutivos 593, 599, 601 y 607, cumpliéndose que 600 = (599+601)/2 = (593+607)/2.

No es difícil encontrarlos, y no son escasos. Los primeros que aparecen son:

9, 12, 15, 18, 30, 42, 60, 81, 102, 105, 108, 120, 144, 165, 186, 195, 228, 260, 270, 312, 363, 381, 399, 420, 426, 441, 462, 489, 495, 552, 570, 582, 600, 696, 705, 714, 765, 816, 825, 858,…

(Los publicamos en https://oeis.org/A263674)

A primera vista todos parecen ser múltiplos de 2 o 3, pero, como nos ocurrió con una propiedad similar, esa afirmación es falsa. El primer contraejemplo es 2405, doble interprimo entre 2393, 2399, 2411 y 2417.

¿QUÉ HAY ENTRE DOS PRIMOS CONSECUTIVOS?

Evidentemente, lo que hay entre ellos son números compuestos, pero puede haber también cuadrados, semiprimos u oblongos, y se pueden contar o sumar. De algunas clases sólo habrá uno o ninguno, como en el caso de los cuadrados, y en otras aparecerán muchos más. Nos entretendremos con esas búsquedas, para ver qué conseguimos.

En primer lugar, un escenario

Para entender mejor lo que sigue, hemos construido una tabla con todos los números del 2 al 997, que puedes extender tanto como desees. Dicha tabla está organizada escribiendo los números primos en una misma columna, y los comprendidos entre cada dos de ellos consecutivos (los llamaremos “entreprimos”), en las columnas siguientes. Algo como esto:

C	D	E	F	G	H	I
	Primos			Entreprimos		
	2					
	3	4				
	5	6				
	7	8	9	10		
	11	12				
	13	14	15	16		
	17	18				
	19	20	21	22		
	23	24	25	26	27	28
	29	30				
	31	32	33	34	35	36
	37	38	39	40		
	41	42				
	43	44	45	46		
	47	48	49	50	51	52
	53	54	55	56	57	58

Hemos alojado esta tabla en

http://www.hojamat.es/blog/entreprimos.xlsm

De esta forma, cuando deseemos contar, sumar o destacar entreprimos, trabajaremos por filas, lo que en una hoja de cálculo facilita mucho el trabajo. Por ejemplo, con la función CONTAR podemos añadir una columna que nos exprese el intervalo entre dos primos consecutivos. Por eso comenzamos la tabla en la columna D, para poder insertar columnas delante de ella. Observa cómo quedaría la función CONTAR en la columna C:

C	D	E	F	G	H	I
	Primos		Entreprimos			
1	2					
2	3	4				
2	5	6				
4	7	8	9	10		
2	11	12				
4	13	14	15	16		
2	17	18				
4	19	20	21	22		
6	23	24	25	26	27	28
2	29	30				
6	31	32	33	34	35	36
4	37	38	39	40		

Como era de esperar, salvo el caso del 2 y el 3, el número de entreprimos es siempre par, y distribuido de forma irregular.

Podíamos haber sumado, y obtendríamos los términos de la sucesión http://oeis.org/A054265

0, 4, 6, 27, 12, 45, 18, 63, 130, 30, 170, 117, 42, 135, 250, 280, 60, 320, 207, 72, … como puedes

observar en la imagen, en la que hemos usado la función SUMA.

C	D	E	F	G	H	I	J
	Primos			Entreprimos			
0	2						
4	3	4					
6	5	6					
27	7	8	9	10			
12	11	12					
45	13	14	15	16			
18	17	18					
63	19	20	21	22			
130	23	24	25	26	27	28	
30	29	30					
170	31	32	33	34	35	36	

En la página enlazada http://oeis.org/A054265 se te propone una fórmula para estas sumas. Es fácil de entender. Si llamamos P(N) al primo número N es claro que el número de entreprimos entre P(N) y P(N+1) es P(N+1)-P(N). Pero es trivial que forman una progresión aritmética, luego se pueden sumar mediante la fórmula clásica

$$S(n) = \frac{(a(1) + a(n)) \times n}{2}$$

Que en este caso sería (P(N+1)-1+P(N)+1)*(P(N+1)-P(N)+1)/2, es decir:

$$S(n) = \frac{\big(P(N) + P(N+1)\big) \times (P(N+1) - P(N) + 1)}{2}$$

Por ejemplo, entre 23 y 29 la suma de compuestos sería (23+29)*(29-23+1)/2=26*5=130, como se comprueba en la tabla.

Número de entreprimos

Para recuentos posteriores, es útil disponer de una fórmula para contar los entreprimos inferiores a un primo dado. Recordamos que existe una función PI(x), o π(x) con x real, que cuenta los primos menores o iguales a un número dado. En lenguajes de programación se podrá expresar como PrimePi(x) en el Wolfram Language, primepi(x), en PARI o nuestra PRIMHASTA para hoja de cálculo. Es evidente que el número de entreprimos hasta N se calculará restando N y PRIMEPI(N), para así eliminar los primos. En PARI podíamos definir esta función:

entreprimos(n)=n-primepi(n)

Con este código contamos los entreprimos de la tabla-escenario propuesta:

entreprimos(n)=n-primepi(n)

{print(entreprimos(997))}

Si lo ejecutas te devolverá 829, aunque en la tabla hay 828. Esto es porque cuenta el 1.

Si deseas contar entre dos primos puedes usar esta otra función:

entreprimos2(m,n)=n-primepi(n)-m+primepi(m)

Por ejemplo, para m=31 n=53 nos devuelve el valor 17, que puedes comprobar en la tabla

31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		
41	42				
43	44	45	46		
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60				

Usaremos más adelante estas funciones en cálculos de densidades de ciertos tipos de entreprimos.

Casos particulares

Mucho más atractivo es contar o sumar entreprimos de un cierto tipo determinado, como los cuadrados

Entreprimos cuadrados

El caso de los entreprimos cuadrados es muy interesante, porque con ellos estudiamos el reverso de la Conjetura de Legendre, según veremos más adelante. En la tabla que proponemos es muy sencillo contar los cuadrados existentes en cada fila, o destacarlos con formatos en color. También podemos usar el Basic VBA de las hojas, y por último, acudir a PARI para los recuentos. Recorremos los distintos procedimientos:

Destacar cuadrados

Lo puedes realizar manualmente, recorriendo las distintas filas y marcando con negrita o cualquier color los cuadrados que encuentres.

Primos	Entreprimos				
2					
3	4				
5	6				
7	8	9	10		
11	12				
13	14	15	16		
17	18				
19	20	21	22		
23	24	25	26	27	28
29	30				
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		

Te darás cuenta al hacerlo de que no hay más de un cuadrado en cada fila de entreprimos. Ya verás que esto se relaciona con la conjetura de Legendre.

Hay una forma automática de colorear todos los cuadrados. Lo hemos conseguido con las funciones de un complemento que tenemos instalado, y lo que sigue, un poco oscuro, sólo te servirá de incentivo para introducirte en el Excel avanzado, pero es bueno dejar constancia del método empleado.

```
Sub recorrido()
Dim i, j, m
Dim f As Boolean
For i = 4 To 200
For j = 4 To 30
```

m = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, j).Value ‘Lee el valor de cada celda

If IsNumeric(m) And m > 0 Then ‘Si es un número, seguimos

f = Application.Run("escuad", m) ‘Si es un cuadrado, lo colorea

If f Then Call colorea(i, j, 1)

End If

Next j

Next i

End Sub

Sub colorea(x, y, c) ‘Rutina para colorear o borrar el color

If c = 1 Then

Cells(x, y).Interior.Color = RGB(255, 0, 0)

Else

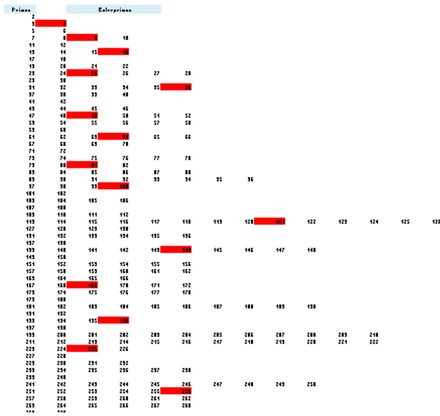
Cells(x, y).Interior.Color = RGB(255, 255, 255)

End If

End Sub

Con estas dos rutinas podemos colorear sólo los cuadrados de cada fila.

Vemos que efectivamente, el número de cuadrados entre dos primos sólo puede ser cero o uno.



Búsqueda en Basic o PARI

Si deseamos proseguir la búsqueda de cuadrados más allá del número 1000 necesitamos algo más rápido, que nos devuelva un listado con el número de cuadrados (0 o 1) contenidos en cada intervalo entre dos primos consecutivos. La función que sigue, ampliable, encuentra los cuadrados (tipo=1) o los triangulares (tipo=2) que siguen a un primo, pero inferiores al siguiente (entreprimos)

```
Function num_entreprimos(n, tipo)
Dim nm, p, i

nm = 0
If esprimo(n) Then
```

p = primprox(n)
For i = n + 1 To p - 1
Select Case tipo
Case 1: If escuad(i) Then nm = nm + 1
Case 2: If estriangular(i) Then nm = nm + 1
End Select
Next i
End If
num_entreprimos = nm
End Function

El problema que presenta es que usa funciones diseñadas por el autor y que no siempre son fáciles de encontrar. Por eso, proponemos también la versión en PARI (para cuadrados)

numcuad_entre(n)={local(i,m=0);if(isprime(n),for(i=n+1,nextprime(n+1)-1,if(issquare(i),m+=1)));m}

En ella contamos los cuadrados ("issquare") entre *n+1* y *nextprime(n+1)-1*, es decir, entre los *entreprimos.*

Por ejemplo, detrás del primo número 1000 (7919) existe un cuadrado. Puedes comprobarlo si escribes

numcuad_entre(n)={local(i,m=0);if(isprime(n),for(i=n+1,nextprime(n+1)-1,if(issquare(i),m+=1)));m}

{print(numcuad_entre(prime(1000)))}

Lo puedes ver en esta tabla

7919	Es cuadrado
7920	FALSO
7921	VERDADERO
7922	FALSO
7923	FALSO
7924	FALSO
7925	FALSO
7926	FALSO
7927	FALSO

El siguiente primo a 7919 es el 7927, y entre ambos existe el cuadrado de 89, 7921.

Listado del número de cuadrados

Hemos usado una variante para que figuren los valores en columna, con este resultado:

Primo	Número de cuadrados
2	0
3	1
5	0
7	1
11	0
13	1
17	0
19	0
23	1
29	0
31	1
37	0
41	0
43	0
47	1

Estos valores coinciden con los publicados en http://oeis.org/A061265

0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, …

En dicha página Vladeta Jovovic propone una formula muy sencilla para encontrar ese número de cuadrados:

a(n) = floor(sqrt(prime(n+1)))-floor(sqrt(prime(n)))

Si las partes enteras de las raíces cuadradas de dos primos consecutivos son iguales, no existirá ningún cuadrado entre ellos, y sí habrá uno si son diferentes.

Si deseamos obtener el listado en forma de sucesión acudiremos a PARI, con un código similar al que usamos en anteriores párrafos. También de esta forma prescindimos de los complementos de Excel. Podemos usar lo siguiente:

{forprime(i=2,prime(50),c=nextprime(i+1);a=0;for(k=i+1,c-1,if(issquare(k),a+=1));print1(a,", "))}

Recorremos los primos desde el primero hasta el de orden 50 (por ejemplo). Para cada uno encontramos su siguiente primo y contamos los cuadrados (issquare) que hay entre ellos. Este listado nos servirá de modelo para otras búsquedas, y a ti para experimentar si lo deseas. Su resultado es este, que coincide con los anteriores:

```
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0,
 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
? 
```

Nos hemos detenido en varios procedimientos, para que veas que coinciden y también para que los conozcas previamente a las siguientes búsquedas.

Relación con la Conjetura de Legendre

¿Por qué los resultados son siempre 0 o 1? La causa es la Conjetura de Legendre:

Entre dos cuadrados consecutivos siempre existe al menos un número primo.

Si esta conjetura es cierta, sólo puede haber un cuadrado entre dos primos consecutivos, pues si hubiera al menos dos, entre ellos debería existir otro primo, con lo cual los primos dados no serían consecutivos.

Entreprimos triangulares

Con procedimientos similares podemos descubrir que entre dos primos consecutivos sólo existe un triangular o ninguno:

0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, …

Los tienes destacados en nuestra tabla de entreprimos:

Primos		Entreprimos						
2								
3	4							
5	6							
7	8	9	10					
11	12							
13	14	15	16					
17	18							
19	20	21	22					
23	24	25	26	27	28			
29	30							
31	32	33	34	35	36			
37	38	39	40					
41	42							
43	44	45	46					
47	48	49	50	51	52			
53	54	55	56	57	58			
59	60							
61	62	63	64	65	66			
67	68	69	70					
71	72							
73	74	75	76	77	78			
79	80	81	82					
83	84	85	86	87	88			
89	90	91	92	93	94	95	96	
97	98	99	100					
101	102							
103	104	105	106					
107	108							
109	110	111	112					
113	114	115	116	117	118	119	120	
127	128	129	130					
131	132	133	134	135	136			
137	138							
139	140	141	142	143	144	145	146	
149	150							
151	152	153	154	155	156			

Como era previsible, no coexisten dos triangulares en la misma fila, aunque observamos que el 3 es primo y triangular a la vez. Eso nos complicará una fórmula que veremos más adelante.

Puedes usar este código en PARI para obtener el listado:

{forprime(i=2,prime(100),c=nextprime(i+1);a=0;for(k =i+1,c-1,if(issquare(8*k+1),a+=1));print1(a,", "))}

(un número N es triangular si 8*N+1 es un cuadrado. De ahí la expresión "***issquare(8*k+1)")***

Detrás del 2 o el 3 no aparecen triangulares. Entre el 5 y el 7 está el 6, y por eso el tercer valor de la sucesión es 1. Entre 7 y 11 se encuentra el triangular 10, pero entre

11 y 13 no hay ninguno. Así podríamos seguir comprobando la sucesión.

El que exista sólo un triangular o ninguno es consecuencia de una conjetura similar a la de Legendre:

Entre dos triangulares consecutivos siempre existe al menos un número primo

Imitamos la fórmula de Vladeta Jovovic para cuadrados, pero para triangulares es algo más larga:

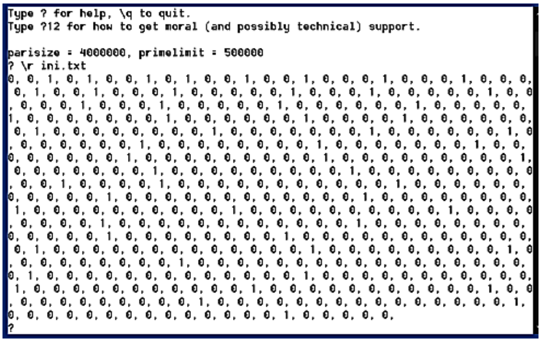
a(n) = floor((sqrt(8*prime(n+1)+1)-1)/2)-floor((sqrt(8*prime(n)+1)-1)/2)

Sólo es válida a partir del 3, porque entre el 2 y el 3 falla al ser 3 primo y triangular

Entreprimos oblongos

Los oblongos son dobles de triangulares, por lo que esperamos que sólo exista uno o ninguno en cada intervalos entre primos. ¿Será así?

En la imagen puedes ver los resultados para los primeros 400 primos, obtenidos con PARI, que hacen sospechar que sí se tiene la misma situación que con cuadrados o triangulares. Era de esperar.



```
Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

parisize = 4000000, primelimit = 500000
? \r ini.txt
0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0
, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0,
?
```

También para estos valores podemos usar una fórmula similar a las anteriores:

a(n) = floor((sqrt(4*prime(n+1)+1)-1)/2)-floor((sqrt(4*prime(n)+1)-1)/2)

Con ella obtenemos el listado:

0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, …

Primos		Entreprimos				
2						
3	4					
5	6					
7	8	9	10			
11	12					
13	14	15	16			
17	18					
19	20	21	22			
23	24	25	26	27	28	
29	30					
31	32	33	34	35	36	
37	38	39	40			
41	42					
43	44	45	46			
47	48	49	50	51	52	
53	54	55	56	57	58	
59	60					
61	62	63	64	65	66	
67	68	69	70			
71	72					
73	74	75	76	77	78	
79	80	81	82			
83	84	85	86	87	88	
89	90	91	92	93	94	95
97	98	99	100			
101	102					
103	104	105	106			
107	108					
109	110	111	112			
113	114	115	116	117	118	119
127	128	129	130			
131	132	133	134	135	136	
137	138					
139	140	141	142	143	144	145
149	150					
151	152	153	154	155	156	

Si usamos la tabla en hoja de cálculo observamos que en la mayoría de los casos el oblongo es el número siguiente al primo:

Es sencillo razonar que esto ocurrirá en primos que procedan de la expresión n^2-n-1, que se encuentran ya publicados:

5, 11, 19, 29, 41, 71, 89, 109, 131, 181, 239, 271, 379, 419, 461, 599, 701, 811, 929, 991, 1259, 1481, 1559, 1721, 1979, 2069, 2161, 2351, 2549, 2861, 2969, 3079, 3191, 3539, 3659, 4159, …

(http://oeis.org/A002327)

¿Qué primos poseen un cuadrado y un triangular antes del próximo primo?

Después de revisar los párrafos anteriores nos damos cuenta de que algunos primos van seguidos de un cuadrado y de un triangular antes de llegar al próximo primo. Son estos:

7, 13, 23, 31, 61, 113, 167, 251, 317, 523, 619, 773, 887, 1223, 1759, 2207, 2477, 2699, 3229, 3469, 4093, 5039, 5749, 6553, 7741, 11003, 17939, 22787, 26561, 30593, 32381, 34963, 41611, 48823, 66047, 75041, 118297, 139123, 196247, 293749, 326023, 339887, 374537, 410857, 465119, 505513, 609929, …

Si recorres la tabla en la que hemos destacado tanto triangulares como cuadrados lo comprobarás:

Primos			Entreprimos		
2					
3	4				
5	6				
7	8	9	10		
11	12				
13	14	15	16		
17	18				
19	20	21	22		
23	24	25	26	27	28
29	30				
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40		
41	42				
43	44	45	46		
47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58
59	60				
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70		

El 3 posee dos destacados, pero hemos de desecharlo por no ser entreprimo. Después siguen con dos destacados 7, 13 y 23. El 31 sólo tiene uno, pero es que 36 es a la vez triangular y cuadrado.

Se puede reproducir el listado con este código para VBA, fácilmente trasladable a otros lenguajes:

If esprimo(i) Then
c = primprox(i)

```
a = 0
b = 0
For k = i + 1 To c - 1
If escuad(k) Then a = a + 1: m = k
Next k
For k = i + 1 To c - 1
If estriangular(k) Then b = b + 1: n = k
Next k
If a > 0 And b > 0 Then
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 6).Value = i
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 7).Value = m
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 8).Value = n
'ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 9).Value = b
'ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 10).Value = c
fila = fila + 1
End If
End If
```

Potencias de primo no triviales

Entre dos primos consecutivos es normal que se intercale la potencia de otro primo. Por ejemplo, entre 7 y 11 figuran 2^3 y 3^2. Está publicada la lista de los primos que poseen al menos un entreprimo potencia no trivial de otro primo. Los primeros son estos:

3, 7, 13, 23, 31, 47, 61, 79, 113, 127, 167, 241, 251, 283, 337, 359, 509, 523, 619, 727, 839, 953, 1021, 1327, 1367, 1669, 1847, 2039, 2179, 2207, …

(http://oeis.org/A053607)

Por ejemplo, el 619 tiene como siguiente primo 631, y entre ambos aparece 625=5^4.

No obstante, que aparezcan dos potencias es mucho más difícil. Sólo se han encontrado cinco ejemplos menores que 2^63: 7, 23, 113, 2179, 32749 (http://oeis.org/A053706) El 7 ya lo hemos analizado. El 2179, por ejemplo, contiene las potencias 3^7 y 13^3 antes de llegar al próximo primo 2203.

.

“PALPRIMOS” (PRIMOS PALINDRÓMICOS)

Tomamos la palabra *palprimo* directamente del inglés, pero si te apetece, nómbralos como *primos palindrómicos*.

Según se deduce del nombre, los *palprimos* son números primos capicúas o palindrómicos (nos limitaremos al sistema de numeración en base 10 por ahora), es decir, que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Los números de una sola cifra se suelen considerar palindrómicos (en realidad, cumplen la definición), por lo que es fácil entender que los primeros *palprimos* son

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, …

(https://oeis.org/A002385)

Para identificarlos con hoja de cálculo necesitaremos la función ESPRIMO y la ESCAPICUA. Disponemos de las dos en nuestra colección, por lo que nos limitaremos a copiarlas aquí.

```
Public Function esprimo(a) As Boolean

Dim n, r
Dim es As Boolean

'Devuelve true si es primo.
es = False
If a = Int(a) Then  ‘Ha de ser entero
If a = 1 Then es = False ‘Casos particulares
If a = 2 Then es = True
If a > 2 Then
If a / 2 = Int(a / 2) Then ‘Descarta los pares
es = False
Else
    n = 3: es = True: r = Sqr(a) ‘Busca posibles divisores
    While n <= r And es = True
    If a / n = Int(a / n) Then es = False ‘Si se encuentra
un divisor se declara compuesto
    n = n + 2
 Wend
End If
End If
End If
esprimo = es
End Function
```

```
Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$

  'Convierte el número en texto para lograr más rapidez.
Devuelve VERDADERO si es palindrómico o capicúa

auxi = haztexto(n) ‘Se puede usar la función STR$ del
Basic
l = Len(auxi)
If l < 2 Then
escapicua = False
Else
c = True
i = 1
k = Int(l / 2)
While i <= k And c
  If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c = False
‘Va comparando cada dígito con su simétrico
  i = i + 1
  Wend
End If
escapicua = c
End Function
```

Con estas dos funciones podemos encontrar *palprimos* en cualquier intervalo, contarlos u operar con ellos. Por ejemplo, con esta rutina podemos destacar los existentes en un intervalo:

Sub buscapalprimos()
Dim i,j
i = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 7).Value
‘Suponemos que el intervalo está
j = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(6, 8).Value
‘alojado en las celdas G6 y H6.

fila = 15 ‘Inicio del listado

For i = j To l
If esprimo(i) And escapicua(i) Then
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 6).Value = i ‘Se presenta e incrementamos la fila
fila = fila + 1
End If
Next i
End Sub

Aquí tienes el listado de los palprimos comprendidos entre 10000 y 11000:

10301
10501
10601

Como ves, muy pocos. Entre 1000000 y 1100000 sólo encontramos estos:

1003001
1008001
1022201
1028201
1035301
1043401
1055501
1062601
1065601
1074701
1082801
1085801
1092901
1093901

Antes de seguir adelante, quizás te hayas percatado de que no existen palprimos con un número de cifras par, porque entonces serían múltiplos de 11, y no primos, como le ocurre a 1771, que es igual a 7*11*23. Así que siempre nos referiremos a un número impar de cifras.

Se ha conjeturado que existen infinitos primos palídrómicos. Unos de los mayores encontrados es

$10^{320236} + 10^{160118} + (137\times10^{160119} + 731\times10^{159275}) \times (10^{843} - 1)/999 + 1$

(Tomado de Wikipedia)

Entre los mayores conocidos se encuentra el número de Belfegor, 1000000000000066600000000000001, llamado así por sus referencias al número de la bestia, 666.

La anterior rutina para destacar palprimos en un intervalo se puede transformar en una función que los cuente simplemente, sin tener que mostrarlos. Su estructura sería muy similar:

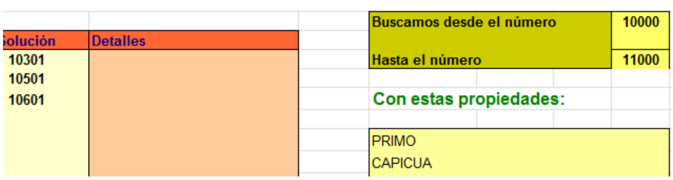
```
Public Function cuentapalprimos(m, n)
Dim i, c
c = 0
For i = m To n
If esprimo(i) And escapicua(i) Then c = c + 1
Next i
cuentapalprimos = c
End Function
```

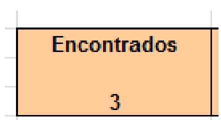
Con esta función comprobamos que entre 10000 y 11000 existen tres, que son los que presentamos arriba, y entre 1000000 y 1100000, los catorce reseñados.

Con un poco de paciencia se puede obtener el número de palprimos para cada número de cifras: De tres cifras existen 15, de cinco 93 y de siete 668. El resto requiere de otras herramientas. Tienes los datos en http://oeis.org/A016115

Estudio elemental con el Buscador

En esta cuestión el Buscador es sorprendentemente rápido. Le hemos encargado que busque palprimos entre 10000 y 11000 y nos devuelve en seguida los tres ejemplos que existen, según vimos más arriba. Y además los cuenta:





Suma de inversos

Se ha comprobado que la suma de inversos de los primeros palprimos converge a una constante cuyos primeros decimales son 1.32398… Pondremos a prueba la capacidad de nuestra hoja de cálculo: buscaremos los primeros con la rutina presentada más arriba, hallaremos sus inversos y posteriormente la suma de estos. Como la tabla resultará larga, copiaremos sólo los primeros y últimos términos:

Palprimo	Inverso	Suma
2	0,5	0,5
3	0,333333333	0,83333333
5	0,2	1,03333333
7	0,142857143	1,17619048
11	0,090909091	1,26709957
101	0,00990099	1,27700056
131	0,007633588	1,28463414
151	0,006622517	1,29125666
181	0,005524862	1,29678152
191	0,005235602	1,30201713

1028201	9,72572E-07	1,32375234
1035301	9,65903E-07	1,32375331
1043401	9,58404E-07	1,32375427
1055501	9,47417E-07	1,32375521
1062601	9,41087E-07	1,32375615
1065601	9,38438E-07	1,32375709
1074701	9,30491E-07	1,32375802
1082801	9,23531E-07	1,32375895
1085801	9,20979E-07	1,32375987
1092901	9,14996E-07	1,32376078
1093901	9,1416E-07	1,3237617

Podíamos seguir con más cifras, pero ya vemos la tendencia a la constante límite. Con hoja de cálculo es preferible dejarlo aquí.

Hemos probado con los inversos de los cuadrados y ha aparecido una convergencia más fuerte (como era de esperar) hacia la constante 0,43008339502. Puedes probar otras posibilidades.

SANDWICH DE SEMIPRIMOS

Unos comentarios de James Tanton (@jamestanton) en Twiter me han hecho interesarme por aquellos números tales que tanto su anterior como su posterior son semiprimos. No los recorreremos todos, porque son muchos, sino que los clasificaremos por tipos.

Todos los números que poseen esta propiedad han de ser pares, salvo el 5, porque si fueran impares, los semiprimos adyacentes deberían ser dobles de primos, que serían números consecutivos, lo que salvo el caso de 2 y 3 es imposible. Consecuencia inmediata es que un número primo mayor que 5 no puede estar encerrado entre dos semiprimos.

Los comentarios citados arriba se referían a los cuadrados, y estos ya están publicados en

http://oeis.org/A108278

Cuadrados “sandwicheados”

En realidad, en esa página figuran las bases, pero elevando al cuadrado nos resultarán los cuadrados pedidos:

144, 900, 1764,3600,10404, 11664, 39204, 97344, 213444, 272484, 360000, 656100, 685584, 1040400, 1102500, 1127844,1633284, 2108304, 2214144, …

En todos ellos el anterior y el posterior son semiprimos. Tomemos el cuadrado 213444=462^2. Su anterior 213443=461*463 y el posterior 213445=5*42689, ambos semiprimos. El primero nos lleva a una situación interesante, y es que si el cuadrado central es n^2, el anterior será n^2-1=(n-1)(n+1), y al ser semiprimo el producto ambos factores serán primos y más aún, primos gemelos. Es lo que ha ocurrido con el 144.

Si un cuadrado está rodeado por dos semiprimos, el anterior es producto de dos primos gemelos.

Respecto a los factores de n^2+1, han de ser del tipo 4k+1, según estudiamos hace tiempo. Puedes seguir el razonamiento en el apartado dedicado a “Un cuadrado y una unidad” en el documento

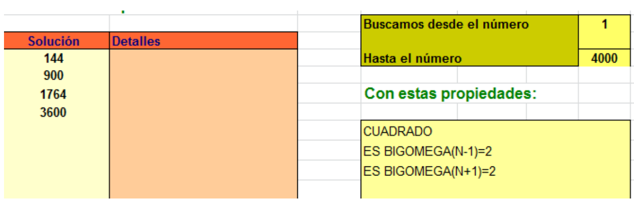
http://www.hojamat.es/publicaciones/hojanum1.pdf

Al deber ser pares, estos cuadrados serán todos múltiplos de 4.

Si deseas reproducirlos con PARI, este puede ser el código:

for(i=2,2000,n=i*i;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))

Con el Buscador:



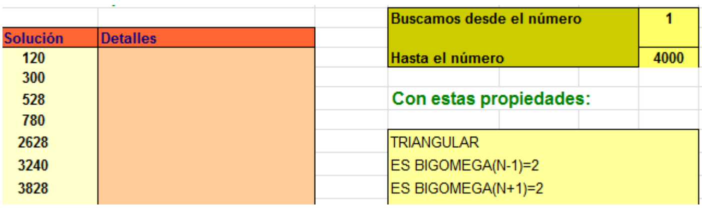
Triangulares entre semiprimos

También los triangulares pueden estar comprendidos entre dos semiprimos. Los primeros están publicados en http://oeis.org/A121898

120, 300, 528, 780, 2628, 3240, 3828, 5460, 13530, 18528, 19110, 22578, 25878, 31878, 32640, 37128, 49770, 56280, 64980, 72390, …

En PARI: ***for(i=2,2000,n=i*(i+1)/2;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))***

Con el Buscador



Solución	Detalles
120	
300	
528	
780	
2628	
3240	
3828	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	4000

Con estas propiedades:

TRIANGULAR
ES BIGOMEGA(N-1)=2
ES BIGOMEGA(N+1)=2

Además de ser pares, son múltiplos de 3, y por tanto de 6. En efecto, si un triangular no es múltiplo de 3 sólo puede ser porque su orden sea del tipo 3k+1, ya que entonces el triangular tendría la expresión (3k+1)(3k+2)/2, que no contiene ningún factor 3 (en los otros casos sí). Pero en este caso, al restarle 1 no obtendríamos un semiprimo. Lo desarrollamos:

$$T_{3k+1}-1=\frac{(3k+1)(3k+2)}{2}-1=\frac{9k^2+9k+2-2}{2}$$
$$=9\frac{k(k+1)}{2}=9T_k$$

Al tener el factor 9 no puede ser semiprimo. Además hemos descubierto que es nueve veces el triangular de orden ***k***.

Por ejemplo, el número triangular de orden 13, 91=13*14/2, no es múltiplo de 3, y su anterior, 90, no puede ser semiprimo, y es igual a 9*10=9*T(4)

El desarrollo anterior se puede invertir, es decir, que si multiplicamos por 9 un triangular y sumamos 1, obtenemos otro triangular no múltiplo de 3 o 6.

Sólo los números triangulares N múltiplos de 6 pueden tener semiprimos N-1 anteriores a ellos.

Oblongos entre semiprimos

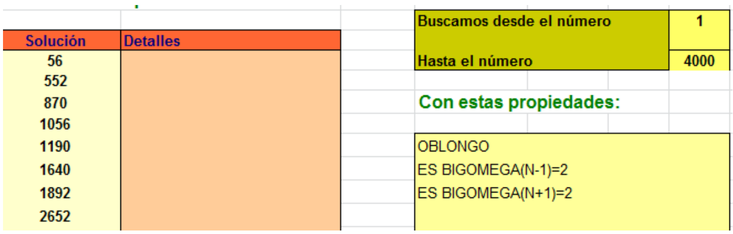
¿Ocurrirá algo similar con los oblongos? La respuesta es negativa.

Recordemos que los números oblongos son los dobles de los triangulares, es decir, los que se pueden expresar como N=k(k+1). Así, 56=7*8 es oblongo, y su anterior 55=5*11 y el posterior 57=3*19 son semiprimos. Cumple la condición de estar entre semiprimos, pero no es múltiplo de 3 (par sí tiene que ser).

Los primeros oblongos con la propiedad requerida son:

56, 552, 870, 1056, 1190, 1640, 1892, 2652, 4032, 5256, 5402, 6806, 8372, 9120, 9506, 9702, 10920, 11772, 12656, 12882, 15006, 15252, 15500, 16256, 16770, 17556, 18632, 23256, 24492, 27722, 29070, 30800, 33306, 33672, 34410, 36290, 40200, 40602, 44310, 45582, 46872, 49506, …

Con el Buscador



Solución	Detalles
56	
552	
870	
1056	
1190	
1640	
1892	
2652	

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	4000

Con estas propiedades:

OBLONGO
ES BIGOMEGA(N-1)=2
ES BIGOMEGA(N+1)=2

Esta sucesión estaba inédita y la hemos publicado en https://oeis.org/A276565

Tomamos uno de ellos, por ejemplo 16256=127*128, y por tanto, oblongo. Su anterior es semiprimo, ya que 16255=5*3251, y 16257=3*5419, también lo es. No es múltiplo de 3.

El posterior no puede ser múltiplo de 5, porque los oblongos terminan todos en 0, 2 o 6, y al sumar no obtendremos ni 5 ni 0 como última cifra.

El anterior no puede ser múltiplo de 3. Si lo es el oblongo, es claro que al restar 1 deja de serlo. Si no lo es, sería del tipo

$(3k+1)(3k+2)-1 = 9k^2+9k+1$ y tampoco.

Si deseas obtener más términos, puedes adaptar este código en PARI:

```
for(i=2,2000,n=i*(i+1);if(bigomega(n-
1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(n,"; ")))
```

Números de Fibonacci

Están publicados los números de la sucesión de Fibonacci comprendidos entre semiprimos. Sólo hay cuatro con pocas cifras: 5, 34, 144, 46368. Se conjetura que no hay infinitos.

Puedes estudiarlos en http://oeis.org/A167023

Cubos perfectos

Los cubos rodeados de semiprimos son muy escasos. El primero es 216=6^3, con 215=5*43 y 217=7*31.

Los siguientes llegan a ser casi inabordables: 216, 1302170688, 7211429568, 20346417000, 71887512312, 281268868608, 1394417360448, 17571944311992, 28350304855488, 170400029184000, 450335804625000, 504966851923968, 616121259098688, 1064394808685208, 3442267015299000, 3517494650695368, 3540860163178632, …

Es preferible tratar con sus bases. Las tienes publicadas en http://oeis.org/A268043

6, 1092, 1932, 2730, 4158, 6552, 11172, 25998, 30492, 55440, 76650, 79632, 85092, 102102, 150990, 152082, 152418, 166782, 211218, …

Estos números tienen una propiedad importante, y es que su anterior y posterior han de formar un par de primos gemelos. La idea es sencilla: si n^3-1 ha de ser semiprimo, al ser múltiplo de n-1, este ha de ser primo, pues en caso contrario el otro no sería semiprimo. Igual ocurre con n+1. Por ejemplo, 166782 está rodeado por los primos gemelos 166781 y 166783.

Los puedes encontrar con PARI:

for(i=2,2000,n=i^3;if(bigomega(n-1)==2&&bigomega(n+1)==2,print1(i,"; ")))

Potencias enteras

Hemos estudiado los cuadrados y cubos entre semiprimos, pero podríamos generalizar a todas las potencias de base y exponente enteros mayores que 1.

No es muy difícil encontrarlos si se dispone de una función ESPOTENCIA o similar. En nuestro equipo disponemos de ella, y hemos podido emprender la búsqueda, consiguiendo esta lista de los primeros:

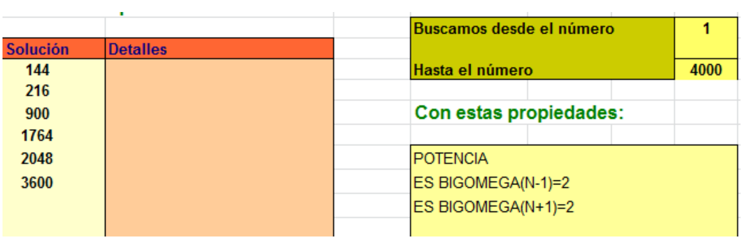
144, 216, 900, 1764, 2048, 3600, 10404, 11664, 39204, 97344, 213444, 248832, 272484, 360000, 656100, 685584, 1040400, 1102500, 1127844, 1633284, 2108304, 2214144, 3504384, 3802500, 4112784, 4536900, 4588164, 5475600, 7784100, 7851204, 8388608, 8820900, 9000000, 9734400…

Los hemos publicado en https://oeis.org/A276564

Puedes reproducirla con PARI:

for(i=2,10^7,if(ispower(i)&&bigomega(i-1)==2&&bigomega(i+1)==2,print1(i,", ")))

Con el Buscador



Con base prima hay muy pocos. Los primeros son 2048 y 8388608

Otros casos

Podríamos seguir el estudio con pentagonales (los primeros serían 5, 92, 590, 1080, 1820, 8400,…) o hexagonales (120, 780, 3828, 19110,…), pero por hoy ya está bien. Lo dejamos como propuesta.

ESCALADAS DE CONWAY

El año pasado, 2017, se notificó que una conjetura de Conway, conocida como "escalada a un primo" había resultado ser falsa. Tienes la noticia, comentarios y contraejemplos en estos dos blogs:

http://francis.naukas.com/2017/06/14/contraejemplo-a-una-conjetura-de-conway-sobre-los-primos/

https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-la-escalada-hasta-un-primo/

Si los has leído (y si no, te bastará con mi explicación) entenderás que el proceso que propone Conway es el de descomponer el número en sus factores primos agrupados con exponentes y ordenados en orden creciente, como $144=2^4*3^2$, y después escribir seguidos y mezclados bases y exponentes de las potencias resultantes (2432).

Si un número primo está elevado a la unidad, esta se ignora y no se añade al nuevo número.

Si llamamos f(n) a esa función obtendremos:

F(144)=2432

La idea de Conway es la de ir reiterando esta función hasta llegar a un número primo p, en el que es evidente que f(p)=p, dando fin al proceso.

En el caso del 144:
F(144)=2432, f(2432)=2719, que es primo y con él termina el proceso.

Los dos blogs citados te darán más detalles. Nuestro objetivo ahora es conseguir el algoritmo con el Visual Basic de las hojas de cálculo. Es, por tanto un interés operativo más que matemático.

Función fconway(n)

A continuación se inserta el listado para hoja de cálculo de la función de Conway, pero antes hay que acudir a la función *ajusta(n)*, que elimina del número **n** los espacios en blanco que Excel o Calc añaden a los números naturales. Su código es el siguiente:

Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a) ‘Convierte el número en un string
While Left$(d$, 1) = " " ‘Mientras esté precedido de un espacio, este se elimina
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1) ‘Se corta el string desde su segundo carácter
Wend
ajusta$ = d$
End Function

Una vez contamos con esta función, se tratará ahora de descomponer el número en factores y concatenar factores primos y exponentes, eliminando aquellos iguales a la unidad. Puede ser así:

Public Function fconway(n)

Dim primo(20), expo(20), numomega *‘Reservamos 20 memorias para primos y exponentes*
Dim s$
Dim f, a, e, i

a = n ‘Recibimos n en la variable a
f = 2: i = 0: numomega = 0 ‘numomega es el número de primos
While f * f <= a ‘Vamos extrayendo primos hasta la raíz cuadrada de a
e = 0
While a / f = Int(a / f)
e = e + 1 ‘Se toma nota del exponente, que va creciendo
a = a / f ‘Se elimina el factor primo encontrado
Wend
If e > 0 Then ‘Se incorpora el nuevo primo con su exponente a las memorias
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = f
expo(numomega) = e
End If
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 ‘Se avanza en posibles primos
Wend

If a > 1 Then ‘Se recoge el último primo
numomega = numomega + 1
primo(numomega) = a
expo(numomega) = 1
End If
s$ = "" ‘Construimos la concatenación de primos y exponentes mayores que 1
For i = 1 To numomega
s$ = s$ + ajusta(primo(i)) ‘Se incorpora el primo
If expo(i) > 1 Then s$ = s$ + ajusta(expo(i)) ‘Se añade el exponente si es mayor que 1
Next i
fconway = Val(s$) ‘Convertimos el string en número
End Function

Si escribimos un número cualquiera (en los blogs citados no se recomienda usar el 20) en una celda de Excel y tenemos implementada la función anterior

(debes entrar en Programador – VisualBasic. Puedes consultar
http://hojamat.es/guias/descubrir/htm/macros.pdf),

podemos calcularla en la celda inferior, y después extenderla hacia abajo hasta que el resultado se repita o alcancemos una magnitud para la que Excel pasa a notación científica. Puedes ver algún ejemplo en la imagen:

12	144	542	34
223	2432	2271	217
223	2719	3757	731
	2719	13172	1743
		223789	3783
		317219	31397
		745317	31397
		3282813	
		322315859	
		2314013733	
		3,2299E+10	

En el primero, se alcanza el primo inmediatamente. En el segundo, al segundo intento, como ya vimos más arriba. El siguiente sobrepasa la capacidad de Excel, y el cuarto llega al primo en cinco pasos.

Podemos convertir este proceso en una función, pero si llegamos a los límites de Excel habrá que devolver un valor que lo indique, como podría ser el cero. Hemos diseñado esta:

Public Function finconway(n)
Dim a, b

a = 1: b = n ‘Usamos dos variables para cada iteración
While a <> b And a < 100000000000# And a > 0 ‘Límites de la iteración
a = b ‘Guardamos **b** en la variable **a**
b = fconway(b) ‘Avanzamos un paso en la iteración
If a >= 100000000000# Then a = 0 ‘Si el número es muy grande, lo hacemos cero
Wend
finconway = a
End Function

Con esta función se resuelve rápidamente el ascenso a primo. Aquí tienes los resultados desde 5 hasta 15, por ejemplo:

N	FINCONWAY(N)
5	5
6	23
7	7
8	23
9	2213
10	2213
11	11
12	223
13	13
14	311
15	1129

Esta función, aplicada al 542, devolvería un 0, ya que sobrepasa el límite de Excel para la escritura de todas las cifras. Este inconveniente se salva usando otro lenguaje. Hemos adaptado y completado la función en PARI incluida en la sucesión http://oeis.org/A080670 para definir la función *finconway* en ese lenguaje.

Su código es:

fconway(n)=if(n>1, my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~, s=Str(s, f[i, 1], if(f[i, 2]>1, f[i, 2], ""))); eval(s), 1)
finconway(n)=my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b=fconway(b));a

Con ella es fácil reproducir los resultados de la tabla anterior:

```
? \r ini.txt
%7 = (n)->if(
,2],"")));eva
%8 = (n)->my(
5
23
7
23
2213
2213
11
223
13
311
1129
? _
```

Con el lenguaje PARI sí podemos encontrar el primo al que llegan las iteraciones con inicio en 542. Sería 131811420855589. En la imagen se puede observar cómo lo presenta PARI:

```
%1 = (n)->if(n>1,my(f=factor(n),s="");for(i=1,#f~,s=Str(s,f[i,1],i·
,2],"")));eval(s),1)
%2 = (n)->my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b=fconway(b));a
131811420855589
?
```

La conjetura

Si has leído las entradas de blog recomendadas más arriba, sabrás que existe un contraejemplo en el que la iteración no asciende a un primo, sino a un compuesto.

Se trata del valor
$13532385396179=13*53^2*3853*96179$

Con nuestra función en PARI se detecta su invariancia en la iteración:

fconway(n)=if(n>1, my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~, s=Str(s, f[i, 1], if(f[i, 2]>1, f[i, 2], ""))); eval(s), 1)

finconway(n)=my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b =fconway(b));a
print(finconway(13532385396179))

En la imagen observamos que el resultado es el mismo valor:

```
%15 = (n)->if(n>1,my(f=factor(n),s="");for(i=1,#f~,s=Str(s,f[i,1
i,2],""));eval(s),1)
%16 = (n)->my(a=1,b=n);while(a<>b&&a>>0,a=b;b=fconway(b));a
13532385396179
?
```

Con esto terminamos, ya que el único objetivo era usar medios elementales para reproducir los ascensos a primo de Conway y el contraejemplo descubierto recientemente

PRIMOS Y SUS PARIENTES

PRIMOS, SEMIPRIMOS Y CASI PRIMOS

Un número natural N es ***k-casi primo*** para otro natural k dado si la descomposición factorial de N contiene exactamente k números primos iguales o diferentes. Así, 27 es 3-casi primo, porque 27 =3*3*3, 225 es 4-casi primo, dado que 225 = 3*3*5*5. El valor de k para un número concreto nos lo da la función BIGOMEGA, que cuenta los factores primos con repetición.

Para k=1 tendremos los números primos, con un solo factor.

Para k=2 serán 2-casi primos los ***semiprimos***, que son producto de dos factores primos, como 35=3*5, o 77=7*11.

Averiguar si un número es semiprimo equivale a descubrir sus dos factores, pero si estos son muy grandes, la operación puede exigir varios años de cómputo en un ordenador potente. Por ello se usan en el método RSA de encriptación de datos mediante claves públicas y privadas.

Profundizando algo más en el tema, con unos sencillos convenios se puede considerar que un número semiprimo nos da dos informaciones distintas de manera única. Por ejemplo, si convenimos en que cada número que recibamos por algún medio se considere como un producto de filas y columnas, con el número de filas no superior al de columnas, al recibir un número semiprimo podremos construir un rectángulo a partir de él de forma única. Por ejemplo, si recibimos el número 91, lo podemos interpretar de forma única como el rectángulo 7*13. Es evidente que esto no ocurre con los demás números, como por ejemplo 63, que puede representar 7*9 o 3*21.

Esta propiedad permite transmitir ciertas informaciones de forma lineal simple. Si se recibe una serie de 35 dígitos como

27366524358291002738296634283912836,

con el convenio anterior nos han enviado esta matriz:

2736652
4358291
0027382
9663428
3912836

Las definiciones de semiprimo y k-casi primo nos permiten crear clases de equivalencia en los números naturales. Al conjunto de todos los k-casi primos se le representa por P_k. Así, P_1 estará formado por los números primos, P_2 por los semiprimos, P_3 por los 3-casi primos, etc.

Conseguir esta clasificación con hoja de cálculo requiere partir de un algoritmo de factorización de números naturales (sólo consideraremos un nivel elemental) e incluirle un contador de factores primos.

La siguiente tabla se ha conseguido con un algoritmo de este tipo:

P1	P2	P3	P4	P5	P6
2	4	8	16	32	64
3	6	12	24	48	96
5	9	18	36	72	144
7	10	20	40	80	160
11	14	27	54	108	216
13	15	28	56	112	224
17	21	30	60	120	240
19	22	42	81	162	324
23	25	44	84	168	336
29	26	45	88	176	352

La primera columna está formada por primos, la segunda por semiprimos, la tercera por 3-casi primos, y así hasta k=6. Una curiosidad divertida es la de seguir la secuencia natural de números 1, 2, 3, 4,… en esta tabla e interpretar sus oscilaciones.

El núcleo del algoritmo es el de averiguar k, (también conocida como la función BIGOMEGA), es decir, el número de factores primos de un número. Copiamos a continuación las líneas fundamentales de este algoritmo:

Se supone que **n** es el número, **f** el factor primo que se va probando y **m** el contador que recogerá el número de factores:

f=1 (se comienza con factor 1)
while n>1 (esta condición controla el final del algoritmo)
f=f+1 (se prueba otro número)
while n/f=int(n/f) (se pregunta si ha encontrado un divisor)
m=m+1 (si es divisor, aumenta el contador)
n=n/f (se divide el número entre el divisor encontrado para acelerar la búsqueda)
wend
wend
msgbox(m) (se comunica el resultado)

Es evidente que este algoritmo se ralentiza en cuanto n es un número de bastantes cifras, y de ahí la utilidad de los semiprimos en ciertas codificaciones.

¿Podríamos conseguir que cualquier número nos transmitiera dos números de forma simultánea sin ninguna ambigüedad, como ocurre con los semiprimos? La respuesta es afirmativa.

Observa estas factorizaciones: 24=4*6, 144=12*12, 600=24*25, 72=8*9, …

Los factores están elegidos de tal forma que dado un número (no necesariamente semiprimo) puedas adivinar qué factores te desean transmitir. Por ejemplo, ¿qué factores te transmite 120? Si has adivinado el método, sabrás que se trata de 120=10*12.

La idea es descomponer un número natural cualquiera en dos factores de forma que su diferencia sea mínima, escribiendo por convenio el menor delante del mayor.

¿Es única esta representación? Intenta demostrarlo o razonarlo.

Podemos llamar categoría rectangular C de un número N (la denotaremos por C(N)) a la mínima diferencia (en valor absoluto) existente entre a y b al recorrer todas las factorizaciones de dos factores, es decir la diferencia entre el par de factores que se han propuesto aquí. Por ejemplo C(600)=25-24=1, C(120)=12-10=2, C(23)=23-1=22

Los números con C(N)=0 serán los cuadrados, y los de C(N)=1 los oblongos. En los números primos se cumplirá que C(p)=p-1

En la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/propuestas/rutas/htm/ulam.htm

puedes consultar una curiosa relación de la función C(N) con la espiral de Ulam.

Notas

- El más pequeño k-casi primo es 2^k
- Los semiprimos intervienen en el siguiente teorema:

Teorema de Chen

Todo número par suficientemente grande es suma de un primo y del producto de dos primos (un semiprimo).

TOZUDOS SEMIPRIMOS

El número 5282284277692667149 es semiprimo, porque solo posee dos factores primos:

5282284277692667149=2298321847*2298322267. Lo curioso es que si encontramos la media de ambos primos, el resultado también es semiprimo:

(2298321847+2298322267)/2=2298322057=47809*48073, con ambos factores primos.

Pero si volvemos a hallar la media, obtenemos otro semiprimo:

(47809+48073)/2=47941=191*251

Y otro: (191+251)/2=221=13*17

Y otro más: (13+17)/2=15=3*5

Hasta llegar al último: (3+5)/2=4=2*2

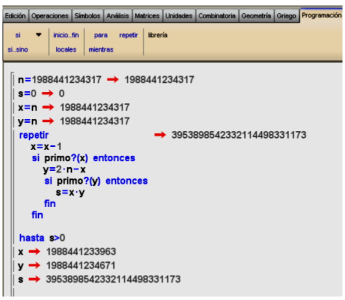
¿Es este un comportamiento frecuente o una rareza? ¿Hay muchos números semiprimos de esta clase?

La respuesta es que existen infinitos, siempre que sea verdadera la conjetura de Goldbach.

En efecto, cualquier número pequeño semiprimo puede generar una sucesión de otros semiprimos cada vez más grandes en los que la media de sus factores sea el semiprimo anterior. El proceso es muy sencillo:

1. Tomamos un semiprimo, por ejemplo 6. Le hallamos el doble, y al ser número par se podrá descomponer según Goldbach en suma de dos primos: 12=5+7

2. Multiplicamos los factores para conseguir un nuevo semiprimo: 5*7=35



3. Volvemos al paso 1 usando el nuevo resultado.

Podemos, aunque no es necesario, elegir los dos números primos más próximos entre sí (si existen varias soluciones). Así, del número 6 obtendríamos esta sucesión:

6=2*3; 35=5*7; 1189=29*41; 1410121=1129*1249; 1988441234317=1410103*1410139;

3953898542332114498331173=1988441233963*1988441234671

Y así sucesivamente. Como los números son enormes, hay que abandonar la hoja de cálculo. Con la calculadora Wiris se puede proseguir. En la imagen tienes reflejado el último paso.

Si la conjetura de Goldbach no es cierta, ocurrirá que el bucle **Repetir…hasta** pueda no tener fin en algún caso determinado. La intuición nos dice que eso no se dará.

Nota: Este procedimiento genera, a partir de n, un semiprimo de fórmula n^2-k^2, siendo k primo con n (¿por qué ocurre así?), pero no vale cualquier valor de k. Así, para n=15 y k=4 nos genera el semiprimo 11*19=152-42=225-16=209, y también serían válidos k=2 y k=8 (todos primos con 15), pero no nos valdría el caso k=11, por ejemplo. Esta consideración nos proporciona una cota para la generación de un semiprimo nuevo, que sería n^2

Otras ideas

Algunos semiprimos engendran a su vez otro semiprimo mediante alguna operación:

La secuencia siguiente la forman semiprimos en los que la suma de sus factores es también semiprima

4, 9, 14, 21, 25, 26, 33, 38, 46, 49, 57, 62, 69, 74, 85, 93, 94, 106, 121, 129, 133, 134, 145, 166, 169, 177, … (OEIS A115585)

En la siguiente, la media de sus factores es la que es semiprima

15 35 51 65 77 91 115 123 141 161 185 187 201 209 219 221 235 259 267, …

(OEIS A187400)

PROPORCIÓN ENTRE CUBO Y CUADRADO

Una entrada reciente del blog Números

(http://simplementenumeros.blogspot.com/2010/04/359-cinco-numeros-consecutivos.html)

y otra más antigua de mi blog

http://hojaynumeros.blogspot.com/2009/05/la-mitad-cuadrado-el-tercio-cubo.html

me han sugerido una cuestión:

Dados dos números primos distintos p y q, ¿es posible siempre encontrar un cubo perfecto y un cuadrado perfecto que cumplan

$$\frac{k^3}{m^2} = \frac{p}{q}$$

con k y m números naturales siendo p y q primos distintos?

La respuesta es afirmativa, y además, con infinitas soluciones ¿por qué?

Por ejemplo, para p=2 y q=5 las primeras soluciones son k=10, m=20, k=40, m=400, k=90, m=1350…

Soluciones

Existen infinitas soluciones. Se elige un número que sea cuadrado y cubo a la vez (hay infinitos. Basta con que sus factores primos estén todos elevados a una potencia múltiplo de seis)

$b^3 = c^2$

y ambos se multiplican por el producto p^3q^4

$p^3q^4\, b^3 = p^3q^4c^2$

y agrupando queda: $q(p^3q^3\, b^3) = p(p^2q^4c^2)$

El primer paréntesis es un cubo perfecto, luego lo podemos representar por k^3 y el segundo un cuadrado perfecto, sea m^2, lo que demuestra la propiedad:

$q\, k^3 = p\, m^2$, que equivale a la relación propuesta.

Por tanto, la primera solución es k_1=pq, $m_1=pq^2$ y después se puede ir multiplicando k por los cuadrados consecutivos y m por sus cubos: k_2 = 4pq y $m_2=8pq^2$, k_3 = 9pq y $m_3=27pq^2$, k_4 = 16pq y $m_2=64pq^2$

AL COMPLICAR SE SIMPLIFICA

El uso conjunto de las operaciones de sumar y multiplicar en los temas de Teoría de Números da lugar a resultados aparentemente paradójicos. Los conceptos de divisor y múltiplo, de número primo, compuesto, abundante o deficiente se basan en la operación de multiplicar, pero nos empeñamos en sumarlos. A veces lo que logramos con esto es que al complicar una situación desembocamos en una estructura menos compleja.

Un ejemplo claro es el de sumar números compuestos de varios divisores y que el resultado resulte ser un número primo. Así, $60=2^2*3*5$ y $931=7^2*19$ y sin embargo su suma 991 es un número primo. La operación de sumar ha significado una pérdida de complejidad.

Otro ejemplo: En una entrada de mi blog

(http://hojaynumeros.blogspot.com/2011/06/un-par-de-abundantes.html)

vimos que todo número par mayor que 46 es suma de dos abundantes. Esta operación también puede suponer una pérdida de complejidad. Así, 18 y 40, ambos abundantes, con su suma producen el número 58, que es deficiente.

Estudiaremos con detenimiento otro ejemplo: La función ***sigma***

(http://hojaynumeros.blogspot.com/2011/03/la-familia-de-las-sigmas-2.html)

suma todos los divisores de un número. Es una operación que requiere varios pasos y bastantes operaciones. **¿Podrá producir resultados primos o semiprimos?**

Podríamos intentar una búsqueda simple con hoja de cálculo: recorreríamos todos los números en un cierto rango, calculando su sigma y viendo si es prima o semiprima. El resultado sería el siguiente (para números menores que 1000):

Número N	Sigma	Tipo	Factores de N	Factores de Sigma(N)
3	4	Semiprimo	3	2 2
4	7	Primo	2 2	7
5	6	Semiprimo	5	2 3
8	15	Semiprimo	2 2 2	3 5
9	13	Primo	3 3	13
13	14	Semiprimo	13	2 7

16	31	Primo	2 2 2 2	31
18	39	Semiprimo	2 3 3	3 13
25	31	Primo	5 5	31
36	91	Semiprimo	2 2 3 3	7 13
37	38	Semiprimo	37	2 19
49	57	Semiprimo	7 7	3 19
50	93	Semiprimo	2 5 5	3 31
61	62	Semiprimo	61	2 31
64	127	Primo	2 2 2 2 2 2	127
73	74	Semiprimo	73	2 37
81	121	Semiprimo	3 3 3 3	11 11
100	217	Semiprimo	2 2 5 5	7 31
121	133	Semiprimo	11 11	7 19
144	403	Semiprimo	2 2 2 2 3 3	13 31
157	158	Semiprimo	157	2 79
169	183	Semiprimo	13 13	3 61
193	194	Semiprimo	193	2 97
225	403	Semiprimo	3 3 5 5	13 31
256	511	Semiprimo	2 2 2 2 2 2 2 2	7 73
277	278	Semiprimo	277	2 139

289	307	Primo	17 17	307
313	314	Semiprimo	313	2 157
361	381	Semiprimo	19 19	3 127
397	398	Semiprimo	397	2 199
400	961	Semiprimo	2 2 2 2 5 5	31 31
421	422	Semiprimo	421	2 211
457	458	Semiprimo	457	2 229
529	553	Semiprimo	23 23	7 79
541	542	Semiprimo	541	2 271
576	1651	Semiprimo	2 2 2 2 2 2 3 3	13 127
578	921	Semiprimo	2 17 17	3 307
613	614	Semiprimo	613	2 307
625	781	Semiprimo	5 5 5 5	11 71
661	662	Semiprimo	661	2 331
673	674	Semiprimo	673	2 337
729	1093	Primo	3 3 3 3 3 3	1093
733	734	Semiprimo	733	2 367
757	758	Semiprimo	757	2 379
841	871	Semiprimo	29 29	13 67
877	878	Semiprimo	877	2 439

961	993	Semiprimo	31 31	3 331
997	998	Semiprimo	997	2 499

Se ve que en algunos casos, como el del 576, la pérdida de complejidad es notable.

Concretemos un poco, y supongamos que N es semiprimo: N=p*q con p y q ambos primos. ¿Cuándo su ***sigma*** resultaría ser prima o semiprima?

Podemos razonar que p ha de ser igual a q: si son ambos iguales a 2, se cumple, porque 4=2*2 y sigma(4)=1+2+4=7 que es primo. En caso contrario, uno de ellos, supongamos que sea p, ha de ser impar, con lo que sigma(N)=(1+p)(1+q)=2h(1+q), con al menos tres factores, por lo que no puede ser primo ni semiprimo. En resumen: **N ha de tener la forma de N=p^2 con p primo.** Puedes comprobarlo en la tabla anterior, pues todos los valores de N que presentan dos factores son cuadrados de primos (aunque no están todos)

Número N	Sigma	Factores de sigma
4	7	7
9	13	13

25	31	31
49	57	3 19
121	133	7 19
169	183	3 61
289	307	307
361	381	3 127
529	553	7 79
841	871	13 67
961	993	3 331

En efecto, no están todos los cuadrados de primos, y además, los factores que aparecen en sigma(N) **son el 3 y números primos del tipo 6m+1**. ¿Por qué? Aclararemos algo a continuación. Repasaremos con ello la teoría de los restos cuadráticos:

Para este tipo de números sigma(N)=1+p+p^2. Como el caso de p=2 está resuelto, podemos suponer que p>2 y por tanto impar, N será impar y sigma(N) también. Por tanto, si poseen divisores h, estos serán mayores que 2. Llamemos k a un posible divisor de sigma(N). Al ser primo impar, podremos aplicar la teoría de los restos cuadráticos (ver Parra *Restos cuadráticos y Ley de reciprocidad cuadrática*

http://hojamat.es/parra/restocuad.pdf)

Si k es un divisor, se ha de cumplir que $1+p+p^2 \equiv 0$ (mod k). Si multiplicamos por 4 quedará:

$4+4p+4p^2 \equiv (2p+1)^2+3 \equiv 0$ (Mod k)   (1)

Esta congruencia puede darse en dos situaciones:

(a) Que sea k=3. Con ello se cumpliría (1) siempre que $2p+1 \equiv 0$ (mod 3), $2p \equiv 2$ (mod 3), $p \equiv 1$ (mod 3) (se puede dividir entre 2 porque es primo con k), es decir que **p ha de ser de la forma 3m+1**. Esta es condición necesaria para que k=3, pero no suficiente.

(b) Que k no sea 3. En ese caso el número -3 ha de ser resto cuadrático respecto a k

(Ver Parra http://hojamat.es/parra/restocuad.pdf). Para que esto se cumpla, **k ha de tener la forma k=6m+1**. Esto completa el razonamiento: k ha de ser 3 o del tipo 6m+1, como puedes comprobar en la tabla anterior.

Una vez determinada la naturaleza de los factores (que sean el 3 u otro primo de la forma 6m+1), debemos tener en cuenta que sigma(N) puede tener un sólo factor y por tanto ser primo, o bien dos, pasando a ser semiprimo.

(A) Sigma(N) es primo

Para el caso de sigma prima puedes consultar

https://oeis.org/A023194.

Es interesante que leas algunos comentarios, pero ten en cuenta que aquí solo hemos estudiado el caso en el que N era el cuadrado de un primo. Por tanto, nuestra secuencia de estos primos

2, 3, 5, 17, 41, 59, 71, 89, 101, 131, 167, 173, 293, 383, 677, 701, 743, 761, 773, 827, 839, 857, 911, 1091, 1097, 1163, 1181, 1193, 1217…

es una subsecuencia de https://oeis.org/A055638y coincide con https://oeis.org/A053182en la que figura un comentario de nuestro amigo Claudio Meller (http://simplementenumeros.blogspot.com

Todos sus elementos, salvo los primeros 2 y 3, son números primos de la forma 6m-1.

(A) Sigma(N) es semiprimo

En este caso los resultados son:

Primo	Sigma(p*p)	Factores de Sigma
7	57	3 19

11	133	7 19
13	183	3 61
19	381	3 127
23	553	7 79
29	871	13 67
31	993	3 331
43	1893	3 631
47	2257	37 61
53	2863	7 409
73	5403	3 1801
83	6973	19 367
97	9507	3 3169
103	10713	3 3571
113	12883	13 991
127	16257	3 5419
157	24807	3 8269
179	32221	7 4603

197	39007	19 2053
199	39801	3 13267
223	49953	3 16651
227	51757	73 709

Como se ve, los factores primos de Sigma sólo pueden ser el 3 o los del tipo 6m+1

PASITO A PASITO HACIA LA COMPLEJIDAD

Toma el número 807905281, que es primo. Súmale una unidad y lo habrás convertido en un semiprimo múltiplo de 2:

807905282 = 2*403952641

Una unidad más y ahora será un 3-casiprimo (tres factores primos) múltiplo de 3:

807905283 = 3*15733*17117

Pero sigue de uno en uno. Descubrirás que cada vez tendremos un factor primo más y que será múltiplo de 4, 5, 6, 7,… Observa:

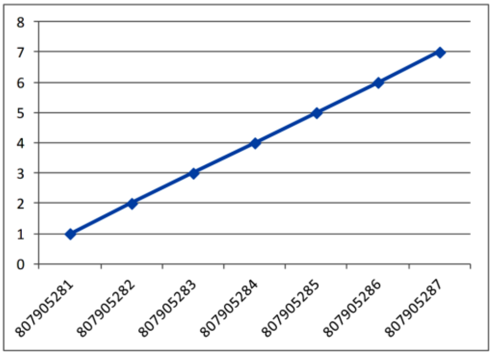
807905284 = 2*2*1871*107951

807905285 = 5*11*43*211*1619

807905286 = 2*3*3*3*37*404357

807905287 = 7*7*7*7*29*41*283

Si recordamos que la función BIGOMEGA cuenta los factores primos de un número teniendo en cuenta los repetidos, la situación anterior se podría representar así:



Pero hasta aquí llegamos, pues con una unidad más se disminuye el número de primos. En efecto, 807905288 = 2*2*2*53*1905437

¿Es frecuente este avanzar de unidad en unidad a estructuras más complejas? Pues sí y no. Muy frecuente no es, pero si nos conformamos con menos pasos, existen muchos ejemplos, ya publicados, y que puedes reproducir fácilmente con un par de funciones. Aprovecharemos estos ejemplos para que razonemos un poco.

Un paso

Es el caso más simple, el de N primo y N+1 semiprimo. Lo cumplen estos primos: 3, 5, 13, 37, 61, 73, 157, 193, 277, 313, 397, 421, 457, 541, 613, 661, 673, 733, … y está publicado en https://oeis.org/A005383

(a) Un razonamiento sencillo: Una condición equivalente para todos los primos N de la lista es que (N+1)/2 sea también primo. ¿Descubres la causa?

(b) Otro más difícil: Estas condiciones también equivalen a que sigma(N)/2 sea un número primo. ¿Por qué?

(c) Salvo el 3, todos los demás son primos del tipo 4k+1. Piensa en resto que debería tener N+1 con módulo 4.

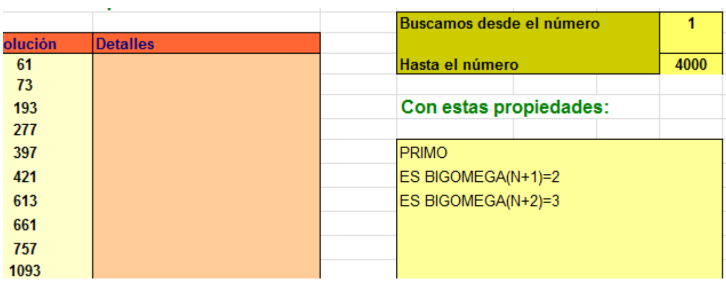
Dos pasos

Existen primos N en los que N+1 es semiprimo y N+2 tiene 3 factores primos. Son estos:

61, 73, 193, 277, 397, 421, 613, 661, 757, 1093, 1237, 1453, 1657, 2137, 2341, 2593, …

https://oeis.org/A112998

Es fácil detectarlos con el Buscador:



Es evidente que forman un subconjunto de los anteriores, y esto nos va ocurrir en cada paso que demos.

Piensa un poco: **(d)** Si N>5 (y todos lo son) N+2 ha de ser múltiplo de 3

Y otro poco más: **(e)** Todos los primos de la sucesión presentan resto 1 al dividirlos entre 12: 61=5*12+1; 73=6*12+1, …Razónalo (lo tienes en inglés en A112998)

Tres pasos

También los conocemos (https://oeis.org/A113000): 193, 421, 661, 1093, 1657, 2137, 2341, 2593, 6217, 7057, 8101, 9817, 12421, 12853, …

Subconjunto de los anteriores y con las mismas propiedades.

En ellos N+1 es par, n+2 múltiplo de 3 y N+3 múltiplo de 4. Si has desarrollado las cuestiones anteriores, no te costará entenderlo.

Más pasos

Para seguir jugando a esto necesitas las funciones ESPRIMO y BIGOMEGA, que es la función que cuenta los factores primos con multiplicidad (Ver su código en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2011/01/redondez-de-un-numero.html)

Puedes intentarlo con el Buscador, pero nos pasamos a VBasic.

Para crear un código de búsqueda puedes tener en cuenta que para el caso de k pasos, el número primo inicial ha de tener resto 1 tomando como módulo el MCM de los números 1,2,3…k (f) Si has entendido todo lo anterior sabrás la razón.

En Basic puedes intentar algo así:

Input k Escribimos el número de pasos
Input mcm Para dar más velocidad, escribimos ya calculado el MCM
Input n Final de búsqueda. Generalmente un número grande.

For i = 1 To n Step mcm los saltos de mcm en mcm ahorran muchos pasos de cálculo
a = 0
If esprimo(i) Then
  For p = 1 To k
  If bigomega(i + p) = p + 1 Then a = a + 1 La línea fundamental
  Next p
  If a = k Then Msgbox(i)
End If
Next i
End Sub

Por ejemplo, para k=4, bastante tiempo y paciencia, llegarías a esta sucesión:

15121, 35521, 52321, 117841, 235441, 313561, 398821, 516421, 520021, 531121, 570601, 623641, … http://oeis.org/A113008

Para comprobar tu código y ahorrar tiempo, aquí tienes el primer número primo de cada caso:

2, 3, 61, 193, 15121, 838561, 807905281, 19896463921, 3059220303001, 3931520917431241, …

https://oeis.org/A072875

Y para ampliar y asombrarte con el trabajo de algunos, estudia esta página:

http://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_425.htm

Pasos hacia atrás

Después de publicar lo anterior, nuestro amigo Claudio Meller nos escribió destacando propiedades muy parecidas. En concreto:

47 primo
46 = 2 x 23
45 = 3 x 3 x 5

107 primo
106 = 2 x 53
105 = 3 x 5 x 7
104 = 2 x 2 x 2 x 13

71999 primo

71998 = 2 x 35999
71997 = 3 x 103 x 233
71996 = 2 x 2 x 41 x 439
71995 = 5 x 7 x 11 x 11 x 17
Si nos dan un empujoncito salimos corriendo a descubrir cosas nuevas. Así que Claudio ha sido en este caso el motor de arranque de nuevas búsquedas.

En efecto, los pasos no tienen que ser necesariamente hacia un crecimiento. Pueden decrecer, como en los ejemplos propuestos por nuestro amigo. Investigando en OEIS y con nuestros buscadores podemos presentar lo siguiente:

Primos p con p-1 semiprimo

5, 7, 11, 23, 47, 59, 83, 107, 167, 179, 227, 263, 347, 359, 383, 467, …

https://oeis.org/A005385

Como en apartados anteriores, p-1 ha de ser múltiplo de 2 y de otro primo q=(p-1)/2 Por tanto ese nuevo primo q sería del tipo de Sofie Germain.

(Ver http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo_de_Sophie_Germain y http://oeis.org/A005384)

Primos p con p-1 semiprimo y p-2 3-casiprimo

47, 107, 167, 263, 347, 359, 467, 479, 563, 863, 887, 983, 1019, 1187, 1283, 1907, 2039, 2063, 2099, 2447, 2819, 2879, …

En ellos p-1 es par, p-2 múltiplo de 3 y p es del tipo 12k-1

Esta sucesión estaba inédita en OEIS y la acabamos de publicar incluyendo a Claudio Meller como "sugeridor". Está en http://oeis.org/A201147

Con tres pasos

107, 263, 347, 479, 863, 887, 1019, 2063, 2447, 3023, 3167, 3623, 5387, 5399, 5879, 6599, 6983, 7079, 8423, 8699, 9743, 9887, …

En ellos p-1 es par, p-2 múltiplo de 3, p-3 múltiplo de 4 y p es del tipo 12k-1

También la acabamos de publicar con la cita correspondiente a Claudio en http://oeis.org/A201220

Más pasos

Los primeros números naturales que inician sucesiones similares son

2, 5, 47, 107, 71999, 392279, 4533292679

http://oeis.org/A093552

Por ejemplo, tenemos:

4533292679=4533292679
4533292678=2*2266646339
4533292677=3*251*6020309
4533292676=2*2*11*103029379
4533292675=5*5*17*1871*5701
4533292674=2*3*3*41*661*9293
4533292673=7*7*13*13*29*43*439

Después de publicar lo anterior he seguido descubriendo más cosas:

Saltos de dos unidades

Existen números p primos con p+2 semiprimo

2, 7, 13, 19, 23, 31, 37, 47, 53, 67, 83, 89

Ver http://oeis.org/A063637

Otra forma de definirlos: Son primos de la forma **p*q-2**, con **p** y **q** primos.

N primo y N-2 semiprimo

11, 17, 23, 37, 41, 53, 59, 67, 71, 79, 89, 97, 113

http://oeis.org/A063638

Son primos de la forma **p*q + 2**, siendo **p** y **q** primos.

Saltos de tres unidades

Existen números p primos con p+3 semiprimo

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 59, 71, 79, 83, 103,…

http://oeis.org/A092109

Son del tipo p=4k+3 y cumplen que (p+3)/2 es primo

Existen números p primos con p-3 semiprimo

7, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 89, 97, 109, 137

http://oeis.org/A089531

Sus propiedades son simétricas de las de los anteriores

Soluciones

Soluciones:

(a) Si N es primo y N+1 semiprimo, como N+1 es par, ha de ser múltiplo de 2, luego (N+1)/2 ha de ser primo para que se cumpla que N+1 sea semiprimo. Recíprocamente: si (N+1)/2 es primo, N+1 es semiprimo, pues N+1=2p con p primo.

(b) El directo es muy sencillo, pues sigma(N)=1+N por ser primo, luego sigma(N)/2 es primo. El recíproco hay que verlo con más cuidado: si sigma(N)/2 es primo, sigma(N)=2p con p primo. Pero la fórmula de sigma(N) se compone de varios factores del tipo 1+q+q2+q3+… con q factor primo de N. En este caso sólo puede haber un factor primo, ya que 1+q>2, luego el 2 se ha producido como factor de 1+q+q2+q3+…Para que 1+q+q2+q3+…=2p ha de reducirse a 1+q. En efecto, si la potencia mayor es impar, la suma de potencias 1+q+q2+…sería impar y no podría ser múltiplo de 2. Si la mayor es par, se puede descomponer en

(1+q)+q(1+q)+q2(1+q)+…=(1+q)(1+q+q2+…) y ambos factores serían mayores que 2, lo que no es lo supuesto.

(c) Si N=4k+3 entonces N+1=4(k+1) con lo que no podría ser semiprimo.

(d) N es primo, luego no será múltiplo de 3. N+1 es del tipo 2p con p primo. Ese primo no puede ser 3, porque entonces N+1=6 y N=5 y hemos afirmado que es mayor. Si no es 3, no será tampoco múltiplo de 3, pues entonces N+1 no sería semiprimo. Por tanto, N+1 no es múltiplo de 3, Como los múltiplos de 3 aparecen de 3 en 3 números, N+2 sí tendrá que serlo.

(e) Si N es primo, su resto módulo 12 sólo puede ser **1, 5, 7 u 11**. Por tanto, los restos que producirá N+1 serán

2, 6, 8 o 0 y los de N+2 **3, 7, 9 y 1**. Hay que desechar estos:

11- Si el resto es 11, N+1 sería múltiplo de 12, y no podría ser semiprimo.

5- N+2 sería del tipo 12k+7, lo que impediría que fuera múltiplo de 3.

7- N+1 sería del tipo 12k+8=2*2*(3k+1) y no sería semiprimo

Luego sólo nos queda que el resto sea 1.

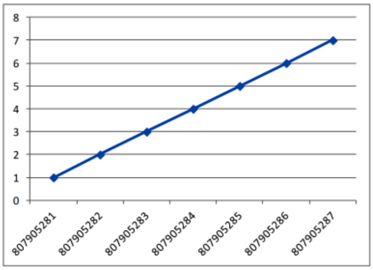
En la cuestión de si p es primo y p+3 semiprimo, podemos razonar que p es del tipo 4k+3, pues si fuera un primo de Gauss con p=4k+1, p+3 no sería semiprimo, porque sería múltiplo de 4. El que (p+3)/2 sea primo es porque p+3 es par (en el p=2 no se cumple la propiedad) y por tanto p+3=2q siendo q primo.

MÁS PASOS HACIA LA COMPLEJIDAD

En el apartado anterior estudiamos los casos en los que partiendo de un número simple, como es un primo, al avanzar o retroceder unidad a unidad iban apareciendo números con cada vez más factores primos: semiprimos, 3-casiprimos, 4-casiprimos,…hasta que se rompía esa tendencia. Dábamos el ejemplo de 807905281, que es primo y cumple que

807905282 = 2*403952641
807905283 = 3*15733*17117
807905284 = 2*2*1871*107951
807905285 = 5*11*43*211*1619
807905286 = 2*3*3*3*37*404357
807905287 = 7*7*7*7*29*41*283

Si recordamos que la función BIGOMEGA cuenta los factores primos de un número teniendo en cuenta los repetidos, la situación anterior se podría representar así:



¿Por qué avanzar de uno en uno?

Se dan casos en los que N es primo y N+2 semiprimo:

2, 7, 13, 19, 23, 31, 37, 47, 53, 67, 83, 89

Están publicados en http://oeis.org/A063637

Toma un número de la sucesión. Por ejemplo, el 53. Le sumas 2 y se convierte en 55=5*11, que es el semiprimo más cercano (esto no lo exigimos y ya lo veremos más adelante), porque 54=2*3*3*3

Estos números son de la forma p*q-2, con p y q primos.

También puede ser N primo y N-2 semiprimo

11, 17, 23, 37, 41, 53, 59, 67, 71, 79, 89, 97, 113

http://oeis.org/A063638

Estos números son de la forma p*q+2, con p y q primos.

Saltos de tres unidades

Existen números p primos con p+3 semiprimo

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 59, 71, 79, 83, 103, …

http://oeis.org/A092109

Son del tipo p=4k+3 (¿por qué?) y cumplen que (p+3)/2 es primo (piensa que p+3 es par y semiprimo)

Existen números p primos con p-3 semiprimo

7, 13, 17, 29, 37, 41, 61, 89, 97, 109, 137

http://oeis.org/A089531

Sus propiedades son simétricas de las de los anteriores

Función DISTSEMI

En lugar de seguir buscando saltos mayores podemos definir dos funciones: DISTSEMI, que medirá la distancia mínima k tal que P sea primo y P+k sea semiprimo y DISTSEMI2, que hará lo mismo por la izquierda, ver el valor mínimo k para el que P sea primo y P-k semiprimo.

El código de la primera podría ser

```
Function distsemi(p)
Dim d, k
Dim noess

d = 0
If esprimo(p) Then
k = 0
noess = True
While noess
k = k + 1
If essemiprimo(p + k) Then d = k: noess = False
Wend
End If
distsemi = d
End Function
```

Se entiende fácilmente, e igual, con dos pequeñas variaciones podemos definir DISTSEMI2.

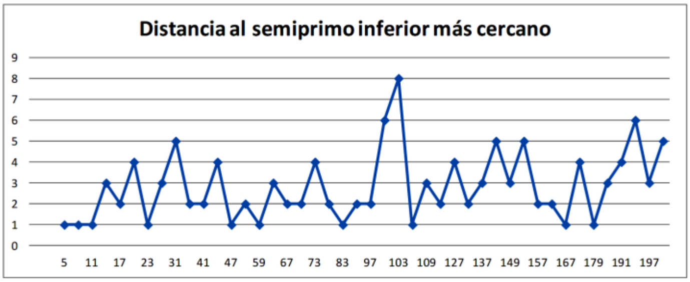
Los valores de esta segunda función están publicados en http://oeis.org/A121885

No se puede definir para P=2 ni para P=3. Para los siguientes a partir del 5 tenemos los valores

5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
1	1	1	3	2	4	1	3	5	2

Salvo para 2 y 3 esta función está definida para todo número natural, porque el conjunto de los semiprimos inferiores al mismo no está vacío, ya que al menos contiene al 4, y al ser un conjunto acotado de naturales tendrá un máximo Q (ver http://oeis.org/A102415) y la diferencia entre P y Q será el valor de DISTSEMI2 buscado.

Su gráfica para los primeros primos tiene este aspecto



Si vas leyendo los valores de X que se corresponden con valores concretos de Y te resultarán sucesiones similares a las que hemos presentado al principio. Así, los mínimos se corresponden con los primos P en los que P-1 es semiprimo, contenidos en https://oeis.org/A005385 y ya tratados en mi blog.

En el nivel 2 están estos números primos

17, 37, 41, 53, 67, 71, 79, 89, 97, 113, 131, 157, 163, 211, 223, 239, 251, 269, 293, 307, 311, 331, 337, 367, 373, 379, 397, 409, 419, 439, 449, 487, 491, 499, …, en los que p-2 es el semiprimo más cercano por la izquierda Los hemos publicado en

https://oeis.org/A217195

con el siguiente código:

(PARI) ***forprime(p=3, 9999, bigomega(p-2)==2 && bigomega(p-1)!=2 & print1(p", "))*** Y en el 3

13, 29, 61, 109, 137, 149, 181, 197, 229, 257, 277, 281, 317, 349, 389, 401, 457, 461, 541, 557, 569, 617, 677, 761, 797, 821, 929, 937, 977, …

(Los publicamos en https://oeis.org/A217197)

Con el código

(PARI) forprime(p=5, 9999, bigomega(p-3)==2 && bigomega(p-1)!=2 && bigomega(p-2)!=2 & print1(p", "))

Entre los máximos destacan el 103 (ver gráfico), que necesita 8 pasos hacia atrás para encontrar el primer semiprimo. Entre los primos menores que 1000 el máximo se da en el 647, que está a 12 unidades de su máximo semiprimo inferior y entre los menores de 10000 se da en el 6381, con DISTSEMI2(6581)=22

Aquí tienes una lista de los números que presentan máximos respecto a sus anteriores:

13	3
19	4
31	5
101	6

103	8
607	10
647	12
1433	15
2699	18
6581	22
17989	24
32803	26
36011	30
36013	32
36017	36

No crecen mucho los valores máximos, porque al ir aumentando el valor de P van siendo posibles cada vez más combinaciones de dos primos que podrán estar bastante cerca de P. Esto es una observación nada más, sin fundamento riguroso.

Se impone una conjetura: ***¿Tenderá a cero el cociente DISTSEMI2(P)/P con P primo al tender P a infinito?*** Lo dejamos ahí para quien tenga más preparación en estos temas.

Función DISTSEMI

Igual que hemos hecho para semiprimos inferiores lo podemos intentar para los superiores. Definiremos DISTSEMI(P) para P primo como la diferencia con el menor semiprimo superior a él

Esta función también está definida para todo número primo, incluidos el 2 y el 3, porque todo primo P es inferior al semiprimo 2P, luego el conjunto de semiprimos mayores que P no está vacío y poseerá un mínimo, que será el buscado.

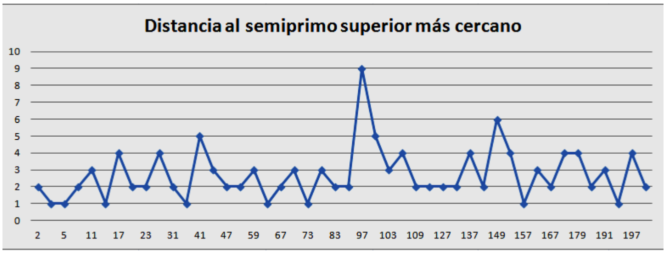
Sus primeros valores son

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
2	1	1	2	3	1	4	2	2	4	2	1

Una lista más completa es 2, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 2, 4, 2, 1, 5, 3, 2, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 9, 5…

Esta sucesión no estaba publicada en OEIS, por lo que la hemos incorporado con el número A217612 (http://oeis.org/A217612)

Sí figuran en el catálogo los valores de los semiprimos en los que se convierte P al sumarle DISTSEMI(P) (ver http://oeis.org/A102414).



Sus valores también crecen muy lentamente. Su máximo para primos menores que 10000 es de 23, que se alcanza en P=8819. Estos son los primeros máximos:

2	2
11	3
17	4
41	5
97	9
599	12
1423	14
2683	18
6563	20

8819	23
32779	28
35983	36

También podemos conjeturar que DISTSEMI(P)/P tiende a cero al crecer P indefnidamente.

Otras cuestiones

Puede ocurrir que DISTSEMI(N)=DISTSEMI2(N), con lo que N sería la media aritmética de dos semiprimos (ver http://oeis.org/A103654)

También que DISTSEMI(N)=1 con lo que N y (N+1)/2 son ambos primos (ver http://oeis.org/A005383) (¿por qué?)

Para DISTSEMI(N)=2 resultan estos números

2, 7, 19, 23, 31, 47, 53, 67, 83, 89, 109, 113, 127, 131, 139, 167, 181, 199, 211, 233, 251, 257, 263, 293, 307, 317, 337, 353, 359, 379, 389, 401, 409, 443, 449, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 557, 563, 571, 577, …

Esta sucesión es una subsucesión de http://oeis.org/A063637

En ella están aquellos en los N y N+2 son semiprimos, pero N+1 no. Así, el 13 está en http://oeis.org/A063637 pero DISTSEMI(13)=1 y por eso no está en nuestra sucesión.

NOTA: Existen pares y tríos de semiprimos consecutivos, pero no conjuntos de 4, porque uno de ellos sería múltiplo de 4.

Podríamos seguir buscando más valores, pero hay que respetar el cansancio de los lectores.

VA A RESULTAR QUE ERES PRIMO

Hoy vamos de pseudoprimos. Si recordáis, el Pequeño teorema de Fermat afirma que si **m** es primo, se cumple que para todo **a** coprimo con **m** es verdadera esta congruencia:

$\mathbf{a}^{\mathbf{m-1}} \equiv 1 \pmod{m}$

En cualquier manual puedes estudiarlo y seguir su demostración. Es recomendable igualmente visitar las páginas

http://mathworld.wolfram.com/FermatsLittleTheorem.html
http://hojamat.es/parra/modular.pdf
http://hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.pdf

El recíproco no es cierto. Si para un **a** primo con **m** se cumple $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, entonces m no tiene que ser necesariamente primo. A estos números compuestos que cumplen el teorema les llamaremos pseudoprimos de Fermat para ese número **a** (hay otros, como los de Euler y los de Poulet, pero los dejamos para otra ocasión)

Hay algunos pseudoprimos que cumplen la condición $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, para todos los números primos con él. A estos números se les llama de números de Carmichael o pseudoprimos absolutos.

Vemos algún ejemplo de lo explicado:

91 pasa la prueba con 3 pero no es primo Es pseudoprimo para el 3. En efecto, lo vemos por duplicación de exponentes: $3 \equiv 3 \pmod{91}$, luego $3^2 \equiv 9 \pmod{91}$; $3^4 \equiv 81 \pmod{91}$; $3^8 \equiv 9 \pmod{91}$; $3^{16} \equiv 81 \pmod{91}$; $3^{32} \equiv 9 \pmod{91}$; $3^{64} \equiv 81 \pmod{91}$ y queda

$3^{90}=3^{64+16+8+2}\equiv 81*81*9*9\equiv 1 \pmod{91}$;

Sin embargo, 91 no es primo, porque equivale a 7*13. Es pseudoprimo para el 3

Hemos presentado los números de Carmichael o primos absolutos. Son estos:

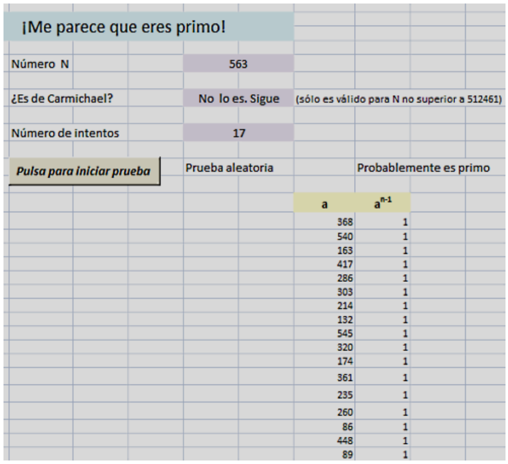
561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973, 75361, 101101, … (http://oeis.org/A002997)

En ellos la prueba de primalidad basada en el teorema de Fermat falla siempre. Por ejemplo, el 561 se daría como primo y resulta que es 561= 3* 11* 17. Volveremos sobre ellos más adelante.

Experimentación con hoja de cálculo

Los algoritmos aleatorios para intentar descubrir si N es primo, se basan en someterlo a la prueba del Pequeño Teorema con varios números aleatorios menores que N y primos con él. Si la prueba da positiva para todo ellos, le daremos a N el calificativo de “primo probable”, y si falla una vez, será con seguridad compuesto. Hemos construido un modelo con hoja de cálculo con objetivos puramente didácticos, sin ninguna otra pretensión.

Confiamos que sirva de estímulo a quienes deseen profundizar más en el tema.



Como vemos en la imagen, se admite un número candidato a primo. Si resulta que es de Carmichael, se aconseja no seguir, aunque puedes hacerlo. Fijas el número de intentos aleatorios (en la imagen 17) y si en todos ellos se cumple $\mathbf{a}^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$, se califica como primo posible. Si falla uno de ellos, con seguridad es compuesto.

El proceso es muy rápido porque hemos usado la exponenciación modular explicada anteriormente.

Se ha añadido un botón para descomponer el número en factores primos y así tener la seguridad de que hemos acertado. Si el número es grande puede tardar mucho la comprobación, pero se puede abortar con la tecla ESC.

Puedes experimentar con él descargándolo desde la dirección

http://hojamat.es/blog/pseudoprimos.xslm

Nuestro deseo es que te aficiones a estos temas de los criterios de primalidad. Hay mucho escrito sobre eso y puede hasta ser divertido.

PRIMOS POR TODAS PARTES

¿Sabes qué propiedad comparten estos números?

21, 33, 57, 69, 85, 93, 105, 129, 133, 145, 177, 195, …

Pues son números compuestos que tienen todos sus factores primos distintos (son números libres de cuadrados) y el promedio de esos factores es un número primo.

Por ejemplo 145=5*29, y el promedio de ambos es (5+29)/2= 17, que es primo.

195=3*5*13, y el promedio es (3+5+13)/3 = 21/3 = 7, también primo.

¿Cuáles serán los siguientes?

Notas

Esta secuencia ha sido publicada en **https://oeis.org/A187073**

Posteriormente, el colaborador de **http://hojamat.es/** Rafael Parra Machío les dio el nombre de números ***arolmar,*** dedicándoles un estudio publicado en dicha página web

(**http://hojamat.es/parra/arolmar.pdf**)

Con la nueva versión del Buscador de números naturales

(ver http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm)

se pueden buscar estos números con las condiciones contenidas en la imagen:

Solución	Detalles
21	5
33	7
57	11
69	13
85	11
93	17
105	5
129	23
133	13
145	17
177	31
195	7

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

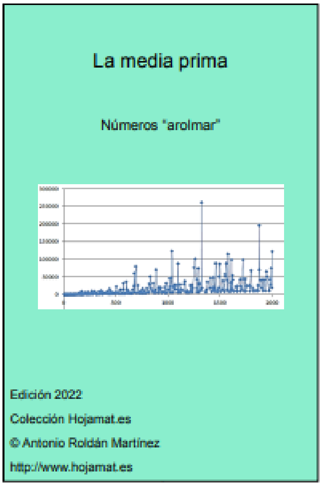
NO PRIMO
LIBREDECUADRADOS
ES PRIMO(SOPF(N)/OMEGA(N))
EVALUAR SOPF(N)/OMEGA(N)

Se exige que los números sean compuestos libres de cuadrados y que el promedio de sus factores primos sea también primo.

Aparece cada número acompañado del promedio de sus factores primos.

Posteriormente hemos desarrollado, por pura curiosidad, todas las propiedades de estos números AROLMAR en una publicación:

http://www.hojamat.es/publicaciones/arolmar.pdf



No tiene ninguna importancia matemática. Sólo curiosidades.

SEMIPRIMOS CONSECUTIVOS

No es la primera vez que relacionamos semiprimos. En una entrada de mi blog

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2016/04/volvemos-los-numeros-arolmar-5.html)

describimos los semiprimos arolmar. También hemos publicado en OEIS sucesiones relacionadas con ellos, como http://oeis.org/A187400.

Los semiprimos son aquellos números en cuya descomposición factorial aparecen sólo dos números primos, iguales, como en 9=3*3, o distintos, 6=2*3. En este documento no exigiremos que los dos factores de estos números sean distintos, por lo que nuestro estudio abarcará también los cuadrados de primos, es decir, todo el conjunto

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 49, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 106, 111, 115, 118, …

(http://oeis.org/A001358)

Todos ellos se caracterizan mediante la función BIGOMEGA, que cuenta los factores de cada número contando las repeticiones. En nuestro caso basta exigir que BIGOMEGA valga 2 para asegurar que un número es semiprimo. Si deseáramos que los factores fueran distintos, también nos aseguraríamos de que OMEGA, que cuenta los factores sin repetición, también valiera 2.

A partir de ahora nos dedicaremos a los semiprimos consecutivos, como 10=2*5 y 14=2*7. En este caso comparten el factor 2, pero esto no ocurre en general, hay consecutivos que no comparten factores, como 51=3*17 y 55=5*11.

Una primera cuestión que nos plantearemos es si la suma o diferencia de dos semiprimos consecutivos puede ser también un número semiprimo. Tenemos implementada la función ESSEMIPRIMO para hojas de cálculo, lo que facilita las búsquedas.

```
Public Function essemiprimo(n) As Boolean
Dim a, b
a = mayordiv(n)
b = n / a
If esprimo(a) And esprimo(b) Then essemiprimo = True Else essemiprimo = False
End Function
```

El problema es que usa la función mayordiv, por lo que lo dejamos aquí y pasamos al lenguaje PARI, que posee todas las funciones implementadas, es gratuito y de no muy difícil aprendizaje. En este lenguaje los semiprimos se caracterizan con la condición

bigomega(p)==2

Cada vez que encuentres una expresión similar en nuestras codificaciones sabrás que nos referiremos a que ese número es semiprimo.

Por ejemplo, con esta condición se puede encontrar el semiprimo más pequeño que es mayor que n mediante esta función:

proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if (bigomega(p)==2,s=1;r=p)); return p}

En esta función la variable p va avanzando de unidad en unidad (p+=1) y creamos un bucle que no para hasta encontrar un semiprimo (***bigomega(p)==2)***, en cuyo caso la variable de control **s** pasa de 0 a 1, para salir del bucle.

Si esta función la aplicamos a un semiprimo p, obtendremos un par de semiprimos consecutivos, con p y proxsem(p), que es la estructura con la que vamos a comenzar.

Semiprimos consecutivos con suma también semiprima

Muchos pares de semiprimos consecutivos cumplen esto para la suma. Los primeros son:

4	[2,2]	6	[2,1][3,1]	10	[2,1][5,1]
6	[2,1][3,1]	9	[3,2]	15	[3,1][5,1]
25	[5,2]	26	[2,1][13,1]	51	[3,1][17,1]
34	[2,1][17,1]	35	[5,1][7,1]	69	[3,1][23,1]
38	[2,1][19,1]	39	[3,1][13,1]	77	[7,1][11,1]
39	[3,1][13,1]	46	[2,1][23,1]	85	[5,1][17,1]
46	[2,1][23,1]	49	[7,2]	95	[5,1][19,1]
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	106	[2,1][53,1]
57	[3,1][19,1]	58	[2,1][29,1]	115	[5,1][23,1]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	134	[2,1][67,1]
69	[3,1][23,1]	74	[2,1][37,1]	143	[11,1][13,1]
77	[7,1][11,1]	82	[2,1][41,1]	159	[3,1][53,1]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	178	[2,1][89,1]
93	[3,1][31,1]	94	[2,1][47,1]	187	[11,1][17,1]
95	[5,1][19,1]	106	[2,1][53,1]	201	[3,1][67,1]

En la tabla, creada con Excel, figura junto a cada número su descomposición en factores, sabiendo que el primer número del corchete es el factor primo y el segundo su exponente. Las dos primeras columnas contienen el par de semiprimos consecutivos y en la tercera su suma, también semiprima. Nos sorprendió su abundancia, pues creíamos que no aparecerían muchos.

Algunos comparten un factor, como 6, 9 y su suma 15, pero no es lo normal, En este caso, y en el anterior de 4, 6 y 10, es posible porque 2+3=5, suma prima de primos que sólo se da en los primos gemelos, pero según hemos observado, no dan lugar a semiprimos consecutivos. En la misma tabla, un poco más abajo, vemos que 34=2*17 no es consecutivo con 38=2*19, ya que se interpone 35=5*7. No hemos encontrado otros ejemplos con factores comunes.

Debemos inferir que aquí influye más la casualidad que las propiedades de los semiprimos en el hecho de que aparezca suma semiprima, como ocurre en el último ejemplo, en el que el par está formado por 129=3*43, 133=7*19 y su suma 262=2*131. Si recorres la tabla observarás que este caso se repite: dos semiprimos impares que suman un par con factor 2 y otro primo. No parece existir otra relación entre ellos.

Para buscarlos con PARI puedes usar esta codificación:

proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if (bigomega(p)==2,s=1;r=p));p}

{for(i=1,2000,if(bigomega(i)==2,a=proxsem(i);if(bigomega(a+i)==2,print1(i,", "))))}

En la primera línea se define la función proxsem (próximo semiprimo) y en la segunda se emprende la búsqueda. El resultado es, para el primer semiprimo del par, el siguiente:

4, 6, 25, 34, 38, 39, 46, 51, 57, 65, 69, 77, 87, 93, 95, 106, 111, 118, 129, 133, 145, 146, 161, 166, 169, 177, 178, 187, 194, 201, 205, 206, 209, 213, 218, 221, 249, 262, 278, 291, 298, 305, 309, 314, 323, 334, 335, 341, 355, 361, 377, 381, 394, 395, 407, 422, 446, 447, 473, 478, 485, 489, 497, 501, 502, 559, 566, 583, 626, 629, 633, 655, 662, 671, 681, 689, 694, 698, 699, 723, …

Este resultado estaba inédito y lo hemos publicado en http://oeis.org/A272306.

Semiprimos consecutivos con diferencia también semiprima

Estos otros semiprimos se diferencian en un semiprimo con el siguiente semiprimo.

10, 15, 51, 58, 65, 87, 111, 123, 129, 146, 209, 226, 237, 249, 274, 278, 291, 305, 335, 346, 365, 371, 377, 382, 403, 407, 427, 447, 454, 485, 489, 493, 497, 505, 529, 538, 545, 573, 591, 597, 629, 635, 649, 681, 699, 707, 713, 749, 767, 781, 785, 803, 807, 831, 843, 889, 901, …

Los hemos obtenido en PARI con el código

proxsem(n)={local(p,s,r);s=0;p=n;while(s==0,p+=1;if (bigomega(p)==2,s=1;r=p));p}

{for(i=1,2000,if(bigomega(i)==2,a=proxsem(i);if(bigomega(a-i)==2,print1(i,", "))))}

Con Excel:

10	[2,1][5,1]	14	[2,1][7,1]	4	[2,2]
15	[3,1][5,1]	21	[3,1][7,1]	6	[2,1][3,1]
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	4	[2,2]
58	[2,1][29,1]	62	[2,1][31,1]	4	[2,2]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	4	[2,2]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	4	[2,2]
111	[3,1][37,1]	115	[5,1][23,1]	4	[2,2]
123	[3,1][41,1]	129	[3,1][43,1]	6	[2,1][3,1]
129	[3,1][43,1]	133	[7,1][19,1]	4	[2,2]
146	[2,1][73,1]	155	[5,1][31,1]	9	[3,2]
209	[11,1][19,1]	213	[3,1][71,1]	4	[2,2]
226	[2,1][113,1]	235	[5,1][47,1]	9	[3,2]
237	[3,1][79,1]	247	[13,1][19,1]	10	[2,1][5,1]
249	[3,1][83,1]	253	[11,1][23,1]	4	[2,2]
274	[2,1][137,1]	278	[2,1][139,1]	4	[2,2]
278	[2,1][139,1]	287	[7,1][41,1]	9	[3,2]
291	[3,1][97,1]	295	[5,1][59,1]	4	[2,2]
305	[5,1][61,1]	309	[3,1][103,1]	4	[2,2]
335	[5,1][67,1]	339	[3,1][113,1]	4	[2,2]
346	[2,1][173,1]	355	[5,1][71,1]	9	[3,2]
365	[5,1][73,1]	371	[7,1][53,1]	6	[2,1][3,1]
371	[7,1][53,1]	377	[13,1][29,1]	6	[2,1][3,1]

No debemos pensar que esta tabla equivale a la anterior con las columnas cambiadas, pues fallaría el hecho de que los semiprimos han de ser consecutivos. Hemos publicado esta sucesión en

http://oeis.org/A272307

Intersección de ambos

Un subconjunto interesante de la primera sucesión (A272306) es el siguiente, su intersección con A272307:

51, 65, 87, 111, 129, 146, 209, 249, 278, 291, 305, 335, 377, 407, 447, 485, 489, 497, 629, 681, 699, 749, 767, 785, 917, 939, 951, 989, 1007, 1018, 1037, …

Recogemos en la tabla cada término con su siguiente semiprimo y la diferencia entre ambos

N1		N2		SUMA		DIFERENCIA	
51	[3,1][17,1]	55	[5,1][11,1]	106	[2,1][53,1]	4	[2,2]
65	[5,1][13,1]	69	[3,1][23,1]	134	[2,1][67,1]	4	[2,2]
87	[3,1][29,1]	91	[7,1][13,1]	178	[2,1][89,1]	4	[2,2]
111	[3,1][37,1]	115	[5,1][23,1]	226	[2,1][113,1]	4	[2,2]
129	[3,1][43,1]	133	[7,1][19,1]	262	[2,1][131,1]	4	[2,2]
146	[2,1][73,1]	155	[5,1][31,1]	301	[7,1][43,1]	9	[3,2]
209	[11,1][19,1]	213	[3,1][71,1]	422	[2,1][211,1]	4	[2,2]
249	[3,1][83,1]	253	[11,1][23,1]	502	[2,1][251,1]	4	[2,2]
278	[2,1][139,1]	287	[7,1][41,1]	565	[5,1][113,1]	9	[3,2]
291	[3,1][97,1]	295	[5,1][59,1]	586	[2,1][293,1]	4	[2,2]
305	[5,1][61,1]	309	[3,1][103,1]	614	[2,1][307,1]	4	[2,2]
335	[5,1][67,1]	339	[3,1][113,1]	674	[2,1][337,1]	4	[2,2]
377	[13,1][29,1]	381	[3,1][127,1]	758	[2,1][379,1]	4	[2,2]
407	[11,1][37,1]	411	[3,1][137,1]	818	[2,1][409,1]	4	[2,2]
447	[3,1][149,1]	451	[11,1][41,1]	898	[2,1][449,1]	4	[2,2]

No siempre resultan cuadrados en la diferencia, después aparecen otros semiprimos. El primero que aparece es el 15, correspondiente al semiprimo 5818 y su consecutivo 5833.

Números consecutivos, ambos semiprimos, cuya suma es semiprima:

Dos semiprimos consecutivos pueden serlo también como números (N y N+1). Ya están publicados en http://oeis.org/A188059 (sólo el semiprimo más pequeño del par)

25, 34, 38, 57, 93, 118, 133, 145, 177, 201, 205, 213, 218, 298, 334, 361, 381, 394, 446, 501, 633, 694, 698, 842, 865, 878, 898, 921, 1114, 1141, 1226, 1285, …

Por ejemplo, 57=3*19, 58=2*29, y su suma 115=5*23 también es semiprimo.

Semiprimos consecutivos que suman un primo

Terminamos con otras dos curiosidades, aunque podríamos abordar más. Dos semiprimos consecutivos pueden producir un número primo al sumar o restar. Estos que siguen suman un primo:

9, 14, 21, 22, 26, 33, 35, 62, 74, 82, 86, 115, 141, 155, 158, 226, 259, 267, 295, 326, 346, 358, 362, 393, 417, 453, 482, 623, 703, 718, 734, 771, 799, 914, 933, 934, 955, 995, …

Por ejemplo, 33=3*11 es semiprimo. Su consecutivo es 34=2*17, y su suma 67 es prima.

Los hemos publicado en http://oeis.org/A272308, y puedes estudiar allí varias formas de generarlos.

Igualmente, existen semiprimos consecutivos con diferencia prima. Los primeros son:

4, 6, 22, 26, 35, 39, 46, 49, 55, 62, 69, 74, 77, 82, 91, 95, 106, 115, 119, 134, 143, 155, 159, … y los hemos publicado en http://oeis.org/A272309

Por ejemplo 69=3*23 y 74=2*37 se diferencian en 7, que es primo.

Como en otras ocasiones, comenzamos hoy, 12/7/17, con factoriales:

12717=5!×5!-(7!+7!+5!)/3!+4!-3!-1!

El miércoles va con el tres:

12717=(33×(3+3/3)+3^3-3!/3)×3^3×3

Una simetría de dígitos para despedir el día:

12717=2^3×7×227+3+2

NÚMEROS 3-FRIABLES

Estudiaremos ahora los números que sólo poseen como factores primos el 2 y el 3. De nuevo nos inspiramos en una sucesión de OEIS. Esta vez en la A003586 (http://oeis.org/A003586), que presenta los que llama "3-smooth numbers", que se puede traducir como "liso o alisado (o regular) de grado 3". En francés se les denomina 3-friables, y en nuestro idioma "friable" equivale a "fácilmente desmenuzable". Si alguien conoce otra denominación española puede comunicármelo. Mientras tanto, utilizaré una denominación similar a la francesa. Hendrik Lenstra les llama *armónicos*, en recuerdo de un texto de Phillipe de Vitry, obispo de Meaux, compositor del siglo XIV.

Me quedaré con la nomenclatura francesa: Un número es B-friable si todos sus factores primos son menores o iguales a B. En nuestro caso los números que estudiaremos son 3-friables. No nos son desconocidos, porque vimos en una entrada de mi blog que los máximos productos de sumandos en las particiones de un número eran de este tipo

(ver http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2016/11/maximo-producto-en-la-particion-de-un_23.html)

Simplemente son números cuyos únicos factores primos son el 2 o el 3 (o ambos), es decir, que tienen la forma N=2^i*3^j con i,j≥0.

Los primeros son estos:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96, 108, 128, 144, 162, 192, 216, 243, 256, 288, 324, 384, 432, 486, …

Es fácil ver que desde el 1=2^0*3^0 hasta el final, todos tienen como únicos factores primos el 2 y/o el 3.

Existe una prueba muy sencilla para averiguar si un número es de este tipo. Consiste en dividir entre 2 y entre

3 mientras sea posible, es decir, mientras el número y los cocientes sucesivos sean múltiplos de uno de los dos. Si al final del proceso nos queda un 1, es que los únicos factores son 2 y 3, como se pide. Lo podemos concretar mediante la función *solo23*, que devuelve VERDADERO o FALSO. Adjuntamos la versión para el Basic de hojas de cálculo:

Public Function solo23(n) As Boolean
Dim m
m = n ‘m representa los cocientes sucesivos
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: Wend ‘Divide entre 2 mientras se pueda
While m Mod 3 = 0: m = m / 3: Wend ‘Hace lo mismo con el 3
If m = 1 Then solo23 = True Else solo23 = False ‘Si al final queda un 1, es de ese tipo
End Function

La siguiente tabla aparece en la hoja con bastante rapidez:

1
2
3
4
6
8
9
12
16
18
24
27
32
36
48
54
64
72
81
96

La versión en PARI puede ser esta:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,300,a=m23(i);if(a,print1(i,", ")))

Es idéntica a la anterior, pero con otras reglas de sintaxis.

Esta misma idea puede servir para descomponer un número 3-friable en sus dos componentes 2^p y 3^q. Insertamos las funciones COMP2 Y COMP3 que no necesitan explicación:

Public Function comp2(n)
Dim m
m = n
While m Mod 3 = 0: m = m / 3: Wend 'Divide entre 3 mientras se pueda
comp2 = m
End Function

Public Function comp3(n)
Dim m
m = n
While m Mod 2 = 0: m = m / 2: Wend 'Divide entre 2 mientras se pueda
comp3 = m
End Function

En la siguiente tabla se han descompuesto los primeros números 3-friables:

N	comp2	comp3
1	1	1
2	2	1
3	1	3
4	4	1
6	2	3
8	8	1
9	1	9
12	4	3
16	16	1
18	2	9
24	8	3
27	1	27
32	32	1
36	4	9

Generación recursiva

Es tentador generar nuevos términos si se conocen los anteriores. Se puede lograr siguiendo algunas ideas sugeridas en la sucesión A003586 (Hai He y Gilbert Traub, Dec 28 2004). El procedimiento se basa en que las potencias de 2 aparecen con más frecuencia que las de 3. Usamos estas potencias 3^q como indicadores del progreso de creación: mientras se pueda, se añaden factores 2 a los términos anteriores, y cuando ya sea imposible, se aumenta el exponente del 3 y se toma como nuevo término.

Dada una potencia de 3 cualquiera, 3^q, que sea término de la sucesión:

(1) Se prueba a multiplicar por 2 todos los términos anteriores que den lugar así a términos nuevos

(2) Si se agotan las multiplicaciones por 2 (al sobrepasar 3^q), se pasa a 3^(q+1) y se vuelve al 1.

El problema de este procedimiento es que para multiplicar por 2 quizás debamos retroceder bastante en la sucesión, con lo que habría que definir variables locales que almacenaran los términos, con ocupación de memoria y la ignorancia previa de qué dimensión darles. Para resolverlo usaremos la primera columna de una hoja de cálculo. Definiremos como u(k) el valor de la celda k de la primera columna, y usaremos una subrutina es_u(k,v) para escribir el valor v en esa celda k. Lo escribimos para Excel:

Public Function u(i)
u = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, 1).Value ‘la variable u(i) representa la celda i
End Function
Sub es_u(i, a)
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(i, 1).Value = a ‘esta rutina lee el valor de la celda i
End Sub

Con la ayuda de estas dos rutinas, podemos ya presentar el algoritmo completo:

Sub engendram23()
Dim k, j, n

Call es_u(1, 1) ‘rellena con un 1 la primera celda de la columna 1
k = 1 ‘la variable k lleva la cuenta de los términos engendrados
j = 1 ‘la variable j lleva la cuenta de los exponentes del 3
For n = 1 To 100 ‘así se generan 100 términos. Lo podemos cambiar.
k = k + 1 ‘se busca un nuevo elemento
If 2 * u(k - j) < 3 ^ j Then ‘se retrocede para multiplicar por 2

Call es_u(k, 2 * u(k - j)) *'si no se llega a la potencia 3^j, se almacena un nuevo término*

Else

Call es_u(k, 3 ^ j): j = j + 1 'si ya no es posible multiplicar por 2, se almacena 3^j y se incrementa

End if

Next n

End Sub

	A
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	8
7	9
8	12
9	16
10	18
11	24
12	27
13	32
14	36
15	48
16	54
17	64

Aquí tienes el resultado de los primeros, ordenado por filas:

¿Por qué no un producto cartesiano?

Los anteriores cálculos se han introducido para que los números 3-friables aparezcan ordenados, pero si renunciamos a ese detalle, se pueden generar sencillamente con un producto cartesiano entre el conjunto de las potencias de 2 y el de 3. Si trabajamos con hoja de cálculo podemos posteriormente ordenar la columna que los contiene.

Así hemos procedido acudiendo a nuestra hoja *Cartesius* (http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Hemos definido dos conjuntos de potencias (2 y 3) que hemos combinado formando un producto cartesiano, indicando a la hoja que nos presente el producto de cada par. Las instrucciones han sido estas:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)	
Xtotal=2	
x1=1..40	
x1=suc(2^(n-1))	
x2=1..25	
x2=suc(3^(n-1))	

Se adivina que se han definido dos conjuntos, uno de potencias de 2 a partir de 1 (de ahí el **n-1**) y otro de potencias de 3. A los pares que resultan se les ha convertido en producto, creando así una columna desordenada de números del tipo 2^p*3^q. Después sólo queda copiar esa columna en otra hoja y proceder a ordenarla. De esa forma dispondremos de (en este caso 1000) los números 3-friables hasta donde deseemos.

En esta captura de pantalla puedes ver algunos de ocho cifras:

192	10077696
193	10616832
194	11337408
195	11943936
196	12582912
197	12754584
198	13436928
199	14155776
200	14348907

Número de divisores y sigmas de los números 3-friables

Las funciones dependientes de divisores serán en este caso muy simples, ya que sólo manejaremos los exponentes de 2 y 3. Vemos algunas:

Número de divisores (función TAU)

Nos basaremos en la expresión general de estos números, sea

$$N = 2^p 3^q$$

Consultamos nuestra publicación sobre funciones multiplicativas (http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf) y vemos que TAU se expresa respecto a los exponentes como

$$D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \dots (1 + a_k)$$

En este caso D(N)=(1+p)(1+q). Por tanto, nunca tendrán un número de divisores primo si son múltiplos de ambos 2 y 3, pero sí pueden serlo si sólo son múltiplos de uno de ellos. En otros casos sí será semiprimo el número de divisores, como en el caso 2^2*3^6 cuyo número de divisores es 3*7, semiprimo.

También se puede dar la casualidad, al tener pocos factores, de que el número 3-friable sea múltiplo de TAU. Pues bien, resultan muchos números con esta propiedad. Los primeros son:

1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, 96, 108, 128, 288, 384, 864, 972, 1152, 1944, 3456, 6144, 6561, 6912, 7776, 13122, 18432, 26244, 31104, 32768, 52488, 55296, 62208, 69984, 98304, …

Los puedes conseguir con PARI:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,10^5,if(m23(i)&&i%sigma(i,0)==0,print1(i,", ")))

Función SIGMA

La función SIGMA suma todos los divisores de un número, al igual que la anterior los cuenta. Su expresión es

$$\sigma(N) = \prod \frac{{p_i}^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Es fácilmente adaptable a nuestro caso. Sería así:

$$\sigma(N) = (2^{p+1} - 1)(3^{q+1} - 1)/2$$

Por ejemplo, el elemento 384=2^7*3 tendrá (1+7)(1+1)=16 divisores. En efecto, son estos: 384, 192, 128, 96, 64, 48, 32, 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.

Su suma, la función SIGMA, tendrá el valor (2^8-1)(3^2-1)/2=255*4=1020, como puedes comprobar sumando los 16 divisores.

¿Puede ser prima la sigma de estos números?

Para ello, uno de los factores debería ser primo, y el otro la unidad. Si observas los paréntesis de la fórmula de arriba, sólo valdrán 1 si p=0 o q=0. Sólo pueden tener sigma prima aquellos elementos que sólo sean múltiplos de 2 o de 3. En concreto son los siguientes:

2, 4, 9, 16, 64, 729, 4096, 65536, 262144, …

Los puedes conseguir con este algoritmo en PARI

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=1,300000,a=m23(i);if(a&&isprime(sigma(i)),print1(i,", ")))

Vemos que aparecen números de la forma 2^p, como 2, 4, 16, 64, 4096, y otros del tipo 3^q, que serían 9 y 729. Los vemos por separado:

Los elementos del tipo 2^p serán aquellos en los que 2^(p+1)-1 sea primo, pero esos son los primos de Mersenne: 3, 7, 31, 127, 8191, …, por lo que serán los únicos casos posibles, según la tabla siguiente:

Número	Sigma	Exponente Mersenne en 2^p-1
2	3	2
4	7	3
16	31	5
64	127	7
4096	8191	13
65536	131071	17
262144	524287	19
1073741824	2147483647	31

Aquí tienes la lista de los primeros casos del tipo 2^p:

2, 4, 16, 64, 4096, 65536, 262144, 1073741824, 1152921504606846976, 309485009821345068724781056, 81129638414606681695789005144064, 85070591730234615865843651857942052864, …

Es fácil ver que en esta tabla sigma(sigma(n))=2n. En efecto, los primeros de la tabla son fácilmente comprobables: sigma(sigma(4))=sigma(7)=7+1=2*4, …Mediante cálculos tendríamos que

sigma(sigma(2^p))=sigma(2^(p+1)-1)=2^(p+1)-1+1,

por ser prima la sigma, luego

Sigma(sigma(2^p))=2^(p+1)=2*2^p

Por tener esta propiedad, a estos números se les llama *superperfectos*, y están publicados en

http://oeis.org/A019279

Los del tipo 3^q tendrán sigma prima si (3^(q+1)-1)/2 es primo, lo que obliga a que q sea par, como ocurre en los casos vistos de 9=3^2 y 729=3^6 y podemos añadir 3^12=531441. Esta es la lista de los primeros:

9, 729, 531441,
25031555049932416013155719860858 49,
463839768658810197932815016789059145431896769 8009, …

Están publicados en http://oeis.org/A255510

¿Podría ser semiprima?

La sigma de los números 3-friables también puede ser semiprima. Basta exigir en los algoritmos que bigomega(N) sea igual a 2, si recordamos que BIGOMEGA cuenta los factores primos con repetición. Si unimos las funciones solo23 (o m23 en PARI) con bigomega obtendremos las soluciones. En la tabla puedes estudiar los primeros ejemplos, obtenidos con hoja de cálculo

N	sigma(N)	Factores
3	4	[2,2]
8	15	[3,1][5,1]
18	39	[3,1][13,1]
36	91	[7,1][13,1]
81	121	[11,2]
144	403	[13,1][31,1]
256	511	[7,1][73,1]
576	1651	[13,1][127,1]
1024	2047	[23,1][89,1]
1458	3279	[3,1][1093,1]
2916	7651	[7,1][1093,1]

La primera columna contiene los números (3-friables), la segunda su sigma y la última los dos factores de la misma que la convierten en semiprima.

Podemos ampliar la lista usando PARI:

m23(n)={local(m,v);m=n;while(m/2==m\2,m=m/2);while(m/3==m\3,m=m/3);if(m==1,v=1,v=0);v}

for(i=2,10^11,if(m23(i)&&bigomega(sigma(i))==2,print1(i,", ")))

Obtendremos:

3, 8, 18, 36, 81, 144, 256, 576, 1024, 1458, 2916, 6561, 11664, 36864, 46656, 59049, 589824, 1062882, 2125764, 2359296, 2985984, 4194304, 8503056, 34012224, 43046721, 47775744, 191102976, 387420489, 2176782336, 9663676416, 31381059609, 34828517376, 68719476736, 139314069504, …

Este algoritmo es muy lento, por lo que podemos usar la idea del producto cartesiano que desarrollamos anteriormente. Sólo hay que ordenar al final la lista que creemos término a término. Quedaría así:

l=List();for(i=0,40,for(j=0,25,a=2^i*3^j;if(bigomega(sigma(a))==2,listput(l,a))));listsort(l);print(l)

Nos da más términos de una forma muy rápida:

3, 8, 18, 36, 81, 144, 256, 576, 1024, 1458, 2916, 6561, 11664, 36864, 46656, 59049, 589824, 1062882, 2125764, 2359296, 2985984, 4194304, 8503056, 34012224, 43046721, 47775744, 191102976, 387420489, 2176782336, 9663676416, 31381059609, 34828517376, 68719476736, 139314069504, 782757789696, 1099511627776, 570630428688384, …

Y los que son sólo potencias de 2

8, 256, 1024, 4194304, 68719476736, 1099511627776, 281474976710656, 288230376151711744, 73786976294838206464, 48357032784585166988 24704, 79228162514264337593543950336, 1267650600228229401496703205376, 5070602400912917605986812821504, 324518553658426726783156020576256, Se encuentran fácilmente con PARI:

```
for(n=1,120,a=2^n;if(bigomega(sigma(a))==2,print1(
a,", ")))
```

Se corresponden con los exponentes 3, 8, 10, 22, 36, 40, ,48, 58, 66, 82, 96, 100, 102, 108, …

Indicatriz de Euler

Para estos números N es muy fácil obtener la indicatriz, número de números coprimos con N y menores que él. Disponemos de una fórmula sencilla, publicada en muchos medios

$$\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

En este caso: φ(N)=φ(2^p*3^q)=2^p*3^q*(1-1/2)(1-1/3)=2^p*3^(q-1)

Existen relaciones muy sencillas en este caso entre N y φ(N)

(a) Si q>0 y p>0 , la indicatriz **es un tercio del número**, como es fácil de ver por su expresión.

(b) Si q=0 tenemos que usar $\varphi(N)=\varphi(2^p)=2^p*(1-1/2)=2^(p-1)$ y sería **la mitad**.

(c) Si p=0 tenemos $\varphi(N)=\varphi(3^q)=3^q*(1-1/3)=3^(q-1)*2$ y equivaldría a los dos tercios de **N**.

En la siguiente tabla lo puedes comprobar: los cocientes entre N y su Indicatriz siempre son 3, 2 o 1,5, según si son potencias dobles de 2 y 3 o sólo de 2 o sólo de 3:

N	PHI(N)	COCIENTE
2	1	2
3	2	1,5
4	2	2
6	2	3
8	4	2
9	6	1,5
12	4	3
16	8	2
18	6	3
24	8	3
27	18	1,5
32	16	2
36	12	3
48	16	3
54	18	3
64	32	2
72	24	3
81	54	1,5
96	32	3
108	36	3

Consecuencia importante: **La indicatriz de un número 3-friable es también 3-friable**.

Las propiedades que hemos estudiado se pueden unificar en una sola fórmula:

$\varphi(6N)=2N$

Recorremos los casos:

Si $q>0$ y $p>0$, $6N=2^{(p+1)}*3^{(q+1)}$, luego la indicatriz valdrá un tercio, es decir $2^{(p+1)}*3^q$, que equivale a 2N

Si $q=0$, $6N=2^{(p+1)}*3$, y la indictariz también será un tercio, es decir $2^{(p+1)}=2N$

Si $p=0$, $6N=2*3^{(q+1)}$. La indicatriz vuelve a ser un tercio, y queda $2*3^q=2N$

Divisores unitarios

Un divisor k de N es unitario si es primo con el cociente N/k, que por tanto también sería unitario. Los unitarios forman pares, comenzando con (N,1). Es sencillo razonar que en los números 3-friables 2^p*3^q con $p>0$ y $q>0$ sólo existirá otro par, el $(2^p,3^q)$. Por tanto, la función USIGMA, suma de unitarios, valdrá en este caso

$Usigma(n)=2^p*3^q+2^p+3^q+1=(2^p+1)(3^q+1)$.

Podemos interpretarlo como que se incrementan en una unidad las componentes 2^p y 3^q y después se multiplican, siempre que $p>0$ y $q>0$. Hemos construido una tabla en la que se confirma que usigma es igual a ese producto.

N	comp2	comp3	comp2+1	comp3+1	USIGMA
6	2	3	3	4	12
12	4	3	5	4	20
18	2	9	3	10	30
24	8	3	9	4	36
36	4	9	5	10	50

SEMIPRIMOS DE LA FORMA N²+K (1)

Una forma de obtener ideas es la de elegir un número al azar y buscarlo en OEIS (http://oeis.org), la Enciclopedia de sucesiones enteras. En una de estas exploraciones aparecieron las relaciones de los números semiprimos con los cuadrados. Me pareció un tema que podía dar juego, y aquí lo tenéis.

Comenzamos con aquellos semiprimos que sobrepasan a un cuadrado en un número **k** prefijado. Recorreremos algunos casos de k.

Podemos imaginar una función en la que identificamos **n** como semiprimo le restamos **k** y vemos si es cuadrado. Por motivos de rendimiento, es preferible pensarlo al revés, que sería averiguar si el número es de la forma n^2+k y después comprobar si es semiprimo. Se puede disponer de una función *essemiprimo* (o, en algunos lenguajes de programación, hacer bigomega(n)=2), pero integraremos esa comprobación en el código general.

Se puede usar una función (***semiconcuad(n,k))*** construida para Excel o Calc, pero fácilmente trasladable a otros lenguajes. Usaremos en ella la función *escuad*, que identifica los cuadrados y que puede tener este listado:

```
Public Function escuad(n) As Boolean

If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad
= False
End If
End Function
```

También usamos la función *esprimo* que puedes encontrar en cualquier buscador escribiendo "*función esprimo hoja*". Se ha usado mucho en mi blog, por lo que se puede omitir cualquier explicación sobre ella.

```
function semiconcuad(n,k) as boolean
dim d,m,r,q
dim noes as boolean
```

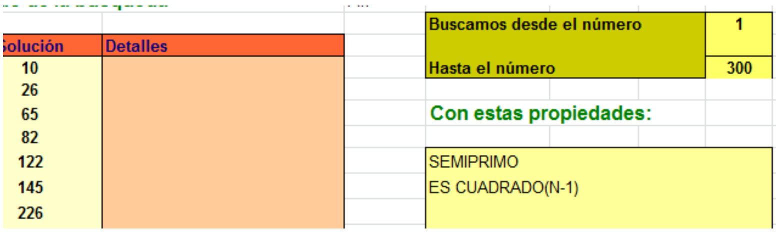
If not escuad(n-k) or n=1 then semiconcuad=false:exit function
'Si n-k no es cuadrado o n=1, sale del algoritmo
d=2:noes=true:r=sqr(n) 'La raíz cuadrada de n es el tope de los divisores propios
while d<=r and noes 'Se busca si es semiprimo
q=int(n/d) 'Para cada divisor se busca el complementario
if n=d*q and esprimo(q) and esprimo(d) then noes=false 'Busca dos factores primos
d=d+1
wend
semiconcuad=not noes 'Es semiprimo
end function

Caso k=1

Si aplicamos una búsqueda para k=1 resultan estos primeros semiprimos:

10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501, 2602, 2705, 3365, 3482, 3601, 3722, 3845, 4097, 4226, 4762, 5042, 5777, 6085, 6242, 6401, 7226, 7397, 7745, 8465, 9026, 9217, 10001

Son fáciles de reproducir con el Buscador:



Están publicados en http://oeis.org/A144255

En esa publicación se destaca que sus factores primos serán distintos, porque n^2+1 no puede ser cuadrado. Por ejemplo, $26=5^2+1=2*13$.

Las bases de los cuadrados no presentan ninguna pauta aparente: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 15, 19, 22, 25, 28, 29, 30, 34, 35, 39, …

Con la función presentada más arriba es fácil encontrar los primeros semiprimos de la forma **n^2+k**. Es útil si deseamos saber si un número cualquiera cumple lo exigido, pero si solo nos interesa el listado, se puede sustituir por una subrutina. La que sigue escribe con rapidez las primeras 50 soluciones para k=1 en la celda 9,9 de la primera hoja:

```
sub listsemiconcuad() as boolean

dim d,m,r,q,k
dim res$
dim noes as boolean

k=1:res$=""
for n=1 to 50
m=n^2+1
d=2:noes=true:r=sqr(m)
while d<=r and noes
q=int(m/d)
if m=d*q and esprimo(q) and esprimo(d) then noes=false:res$=res$+", "+str$(m)
d=d+1
wend
next n
call escribestring(0,8,8,res$)
end sub
```

Se obtiene el listado:

10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501

Es interesante el listado en PARI publicado en esa página, pero requiere alguna corrección. Puedes usar este:

print(select(n->bigomega(n)==2, vector(100, n, n^2+1)))

Caso K=2

Con nuestra función *semiconcuad*, haciendo k=2, es fácil obtener un listado:

6	2	[2,1][3,1]
38	6	[2,1][19,1]
51	7	[3,1][17,1]
123	11	[3,1][41,1]
146	12	[2,1][73,1]
291	17	[3,1][97,1]
326	18	[2,1][163,1]
731	27	[17,1][43,1]
843	29	[3,1][281,1]
1227	35	[3,1][409,1]
1371	37	[3,1][457,1]
1766	42	[2,1][883,1]
1851	43	[3,1][617,1]

En la tabla figuran el número semiprimo, la base del cuadrado correspondiente y la factorización del primero. Los semiprimos aquí tampoco serán cuadrados.

Con el Buscador:

Solución	Detalles
6	
38	
51	
123	
146	
291	

Buscamos desde el número	4
Hasta el número	300

Con estas propiedades:

SEMIPRIMO
ES CUADRADO(N-2)

Las bases de los cuadrados en la segunda columna están publicadas en http://oeis.org/A242330

Con PARI obtenemos estas soluciones en forma de lista

print(select(n->bigomega(n)==2, vector(100, n, n^2+2)))

[6, 38, 51, 123, 146, 291, 326, 731, 843, 1227, 1371, 1766, 1851, 2306, 2603, 2811, 2918, 3027, 3602, 4227, 4358, 4763, 5186, 5331, 5627, 6243, 6891, 7058, 7571, 8102, 8651, 9411]

Igualmente, para k=3:

4	1	[2,2]
39	6	[3,1][13,1]
259	16	[7,1][37,1]
327	18	[3,1][109,1]
403	20	[13,1][31,1]
579	24	[3,1][193,1]
679	26	[7,1][97,1]
1027	32	[13,1][79,1]
1159	34	[19,1][61,1]
1299	36	[3,1][433,1]
1603	40	[7,1][229,1]
1939	44	[7,1][277,1]

Las bases de los cuadrados, 1, 6, 16, 18, 20, 24, … están publicadas en http://oeis.org/A242331. Aquí sí hay una solución cuadrada, el 4, igual a 1^2+3.

K=-1

Este caso es interesante, porque en él el semiprimo equivale a $n^2-1=(n+1)(n-1)$ lo que nos lleva a que sus factores son primos gemelos, y por tanto el semiprimo pertenecerá a http://oeis.org/A037074

Los primeros serán:

15	4	[3,1][5,1]
35	6	[5,1][7,1]
143	12	[11,1][13,1]
323	18	[17,1][19,1]
899	30	[29,1][31,1]
1763	42	[41,1][43,1]
3599	60	[59,1][61,1]
5183	72	[71,1][73,1]

En la factorización de la derecha aparecen claramente los pares de primos gemelos.
Los números de la segunda columna, bases de los cuadrados correspondientes, será, pues, los promedios de los pares de primos gemelos.

Se puede plantear algo similar para los cubos, buscando semiprimos de la forma $\mathbf{n^3+k}$, pero está casi todo publicado y no tiene interés añadido.

MEDIAS DE TRES PRIMOS CONSECUTIVOS

Puede ser interesante estudiar la media aritmética de tres números primos consecutivos. En algunos casos, coincide con el primo central, que en ese caso sería *equilibrado*. No es esto infrecuente, pues los primos pueden ser del tipo 4k+1 o 4k-1, y también 6k+1 y 6k-1, además de otras pautas. También puede ocurrir que la media sea un tipo especial de número, como cuadrado, triangular u oblongo. Organizaremos búsquedas ordenadas y, entre ellas aparecerán casos que ya estén estudiados o que presenten propiedades interesantes.

Primo equilibrado

Con cualquier lenguaje de programación bastará exigir que

(prevprime(n)+n+postprime(n)/3=n

Se entiende que *prevprime* y *postprime* son los primos adyacentes a n. En todos los lenguajes se usan palabras similares. Aquí usamos PRIMANT y PRIMPROX, funciones propias para hojas de cálculo.

Así que nuestra función para detectar primos equilibrados será:

```
Function primoequil$(n)
Dim s$

s = ""
If esprimo(n) Then
If (primant(n) + n + primprox(n)) / 3 = n Then s = Str$(primant(n)) + " ; " + Str$(primprox(n))
End If
primoequil = s
End Function
```

Le hemos dado carácter de *string* para que recoja los dos primos adyacentes.

Los primeros primos de este tipo son

5	3 ; 7
53	47 ; 59
157	151 ; 163
173	167 ; 179
211	199 ; 223
257	251 ; 263
263	257 ; 269
373	367 ; 379
563	557 ; 569
593	587 ; 599
607	601 ; 613
653	647 ; 659
733	727 ; 739
947	941 ; 953
977	971 ; 983

Junto a cada uno figuran sus dos primos contiguos. Podemos añadir las diferencias con el centro, para más información.

5	3 ; 7; 2
53	47 ; 59; 6
157	151 ; 163; 6
173	167 ; 179; 6
211	199 ; 223; 12
257	251 ; 263; 6
263	257 ; 269; 6
373	367 ; 379; 6
563	557 ; 569; 6
593	587 ; 599; 6
607	601 ; 613; 6
653	647 ; 659; 6
733	727 ; 739; 6
947	941 ; 953; 6
977	971 ; 983; 6
1103	1097 ; 1109; 6
1123	1117 ; 1129; 6
1187	1181 ; 1193; 6
1223	1217 ; 1229; 6
1367	1361 ; 1373; 6
1511	1499 ; 1523; 12

Estos números están publicados en http://oeis.org/A006562

5, 53, 157, 173, 211, 257, 263, 373, 563, 593, 607, 653, 733, 947, 977, 1103, 1123, 1187, 1223, 1367, 1511, 1747, 1753, 1907, 2287, 2417, 2677, 2903, 2963, 3307, 3313, 3637, 3733, 4013, 4409, 4457, 4597, 4657, 4691, 4993, 5107, 5113, 5303, 5387, 5393, …

En la tabla de arriba, salvo el caso especial de 3, 5 y 7, todas las diferencias son múltiplos de 6 ¿Será así siempre?

En mi blog ya se ha razonado la respuesta afirmativa:

Las diferencias, salvo en el 5, son múltiplos de 6. La razón es que a partir del 5 todos los primos son del tipo 6n+1 o 6n+5. En las ternas que se forman tienen que ser todos del mismo tipo, ya que si el primero es 6n+1 y el segundo 6m+5, el tercero tendría el tipo 6m+5+(6k+4)=6h+3, no primo. Igualmente, si el primero es tipo 6n+5 y el segundo 6m+1, el tercero sería 6m+1+(6h+2). Lo puedes ver con Z_6: Si el primero tuviera resto 1 y el último resto 5, el promedio presentaría resto 3 y no sería primo. Igual con los otros casos.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/07/formas-de-ser-un-numero-equilibrado-3.html

Por ejemplo, el primer primo que es media entre su anterior y posterior con diferencia 30 es 69623, que forma la progresión (69593, 69623, 69653)

En esta imagen, tomada del Buscador, comprobamos este hecho, salvo, como ya se ha indicado, en el 5:

Solución	Detalles
5	2
53	6
157	6
173	6
211	12
257	6
263	6
373	6
563	6
593	6
607	6
653	6

Buscamos desde el número	3
Hasta el número	1000

Con estas propiedades:

PRIMO
ES N=(PRIMANT(N)++N+PRIMPROX(N))/3
EVALUAR N-PRIMANT(N)

Se ha conjeturado que existen infinitos primos equilibrados.

Desviaciones respecto al equilibrio

Si el primo central no es equilibrado, la media será mayor o menor que él, se desviará una “distancia” o diferencia. Salvo con el 2, siempre será par.

Podemos introducir esa distancia como parámetro en la función anterior:

```
Function primoequil(n, d)
Dim s, m
s = 0
If esprimo(n) Then
m = (primant(n) + n + primprox(n)) / 3 - n
If m = d Then s = m
End If
primoequil = s
End Function
```

Tal como está planteado, se desecharán las medias que no sean enteras, y el resultado será 0. Así que esta función devuelve un cero si no se da la diferencia dada, o esa diferencia si es válida. Por ejemplo, con ella hemos encontrado los primeros números en los que la media sobrepasa al primo central en 2 unidades:

N	D	M
509	2	511
997	2	999
1237	2	1239
1459	2	1461
1499	2	1501
2069	2	2071
2179	2	2181
2399	2	2401
2447	2	2449
3067	2	3069
4079	2	4081
4099	2	4101

No abundan las diferencias grandes: el número 5749 es el primero que presenta una diferencia de 8, porque la media es 5757. De igual manera, 15823 es el primero que presenta diferencia 10. Estos son los siguientes:

40289 d=16

45439 d=12

Podíamos buscar diferencias negativas:

Estos son los primeros primos con diferencia -4 (para ello hay que cambiar la declaración de variables a *integer*)

541	-4
1777	-4
4391	-4
4441	-4
5261	-4
7411	-4
7451	-4
7901	-4
9091	-4
9127	-4
9967	-4

Media triangular

Podemos ahora investigar cómo son las medias entre tres números primos consecutivos, de qué tipo son. Las más interesantes son las de tipo polinómico, como triangulares, cuadradas y cúbicas. Recorreremos estos tres tipos abordando la búsqueda desde dos puntos de vista. Por un lado nos basaremos en los tres primos consecutivos, y, por otro, en los valores de N en los que se basan las fórmulas polinómicas.

Comenzamos con medias triangulares. Elegimos primos, y le calculamos la media de ellos con los dos siguientes. Si es triangular, la aceptamos. Usaremos PARI porque los números a manejar serán grandes.

El criterio para saber si un número es triangular es el conocido de que 8*n+1 sea cuadrado. De esta forma, la búsqueda queda así en PARI:

18713, 27253, 35227, 45433, 138587, 251677, 283861, 425489, 462221, 463189, 486583, 634493, 694409, 826211, 943231, 1103341, 1163557, 1181927, 1214453, 1282387, 1462891, 1509439, 1925681, 1931569, …

(Publicados en http://oeis.org/A226150)

Hemos usado aquí, en la web de PARI/GP https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html un código mucho más simple que en la página enlazada:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&issquare(8*r+1)}

for(i=2,2*10^6,if(ok(i),print1(i,", ")))

```
18713, 27253, 35227, 45433, 138587, 251677, 283861, 425489, 462221, 463189, 486583,
634493, 694409, 826211, 943231, 1103341, 1163557, 1181927, 1214453, 1282387, 146289
1, 1509439, 1925681, 1931569,
```

El otro procedimiento consiste en ir recorriendo los números triangulares n(n+1)/2 y detectar los primos más cercanos consecutivos. Como vimos en la primera parte de este estudio, la media de tres primos puede caer a la derecha o a la izquierda del central, por lo que esa detección se ha de efectuar dos veces. En este listado para Excel se comprende bien:

```
Function media_tres_prim(n)
Dim a, p, q, r, s, u, v, m
m = 0
a = n * (n + 1) / 2 'Se construye el número triangular
p = primprox(a): q = primprox(p): r = primant(a): s = primant(r)
u = (p + q + r) / 3: v = (s + r + p) / 3'Se estudian dos posibles medias
If u = a Then m = r 'La media queda a la derecha
If v = a Then m = s 'O a la izquierda
media_tres_prim = m
End Function
```

De una forma bastante rápida se reproduce el listado anterior y, además, nos devuelve los órdenes N de los números triangulares

N	Primo inicial
193	18713
233	27253
265	35227
301	45433
526	138587
709	251677
753	283861
922	425489
961	462221
962	463189
986	486583
1126	634493
1178	694409
1285	826211
1373	943231
1485	1103341
1525	1163557
1537	1181927
1558	1214453
1601	1282387
1710	1462891
1737	1509439
1962	1925681
1965	1931569

Se comprende que es un método mucho más eficiente. Los números de la primera columna están publicados en http://oeis.org/A226147

Media cuadrada

Para encontrar casos con media cuadrada, bastará cambiar **n(n+1)/2** por **n^2** en Excel y **8*n+1** por **n** en **PARI**

En Excel nos resultarían:

N	Primo inicial
49	2393
161	25913
219	47951
351	123191
363	131759
469	219953
575	330611
597	356387
671	450227
877	769117
909	826271
933	870479
1013	1026143
1225	1500613
1231	1515347
1303	1697797
1359	1846861
1381	1907141
1419	2013541
1489	2217107
1577	2486873
1653	2732383
1797	3229189
1815	3294191

Las bases de la primera columna están publicadas en http://oeis.org/A226146

A226146 Numbers n such that n^2 is an average of three successive primes. 2

49, 161, 219, 351, 363, 469, 575, 597, 671, 877, 909, 933, 1013, 1225, 1231, 1303, 1359, 1381, 1419, 1489, 1577, 1653, 1797, 1815, 1989, 2083, 2117, 2177, 2241, 2289, 2301, 2403, 2483, 2493, 2517, 2611, 2617, 2653, 2727, 2779, 2869, 2931, 3029, 3051, 3261, 3515, 3617 (list; graph; refs; listen; history; text;

En PARI, el primer primo resulta así:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&issquare(r)}

for(i=2,1600000,if(ok(i),print1(i,", ")))

Simplemente hemos sustituido issquare(8*r+1) por issquare(m)

```
2393, 25913, 47951, 123191, 131759, 219953, 330611, 356387, 450227, 769117, 826271,
870479, 1026143, 1500613, 1515347,
```

Media cúbica

Cambiando n^2 o n*(n+1)/2 en la función de arriba por n^3, resultan las bases y los primos iniciales de la terna para este caso:

53	148867
131	2248069
179	5735291
219	10503443
227	11697073
419	73560043
489	116930119
633	253636087
733	393832819
913	761048471
925	791453099
1021	1064332237
1223	1829276531
1247	1939096199

1263 2014698431

Y su código en PARI:

ok(n)={my(m=nextprime(n+1),p=nextprime(m+1),r=(n+m+p)/3);isprime(n)&&ispower(r,3)}

for(i=2,10^7,if(ok(i),print1(i,", ")))

Por terminar las búsquedas, nos quedamos con las potencias cuartas:

Cuarta potencia

7	2393
35	1500613
69	22667111
85	52200611
91	68574943
117	187388689

Queda a los lectores el reto de adaptar el código para este caso y probar otros números poligonales.

SEMIPRIMOS DE LA FORMA N^2+K (2)

Hay semiprimos que son cuadrados, como 4=2*2 o 9=3*3, pero existen muchos que no lo son, pero que se acercan a uno de ellos. Hoy buscaremos estos semiprimos, intentando, de forma simultánea buscar o descubrir algunas de sus propiedades.

Comenzaremos con unos que ya están publicados, los de tipo n^2+1, con lo que practicaremos de cara a los otros casos. Son estos:

A144255 ....
.. Semiprimes of the form n^2+1.

10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501, 2602, 2705, 3365, 3482, 3601, 3722, 3845, 4097, 4226, 4762, 5042, 5777, 6085, 6242, 6401, 7226, 7397, 7745, 8465, 9026, 9217

(http://oeis.org/A144255)

Al no tener ninguna prisa en la búsqueda, practicaremos varias técnicas.

Buscador de Naturales

En estas semanas estamos ampliando las prestaciones de nuestro Buscador, que tiene décadas de vida y le viene bien un repaso. Es descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador

Para encontrar el listado anterior basta con exigir que el número sea semiprimo y que su anterior sea cuadrado. Lo logramos así:

SEMIPRIMO
ES CUADRADO(N-1)
EVALUAR FACTORES

La exigencia de ser semiprimo es directa, por lo que solo escribimos SEMIPRIMO, pero la otra se refiere a N-1, y eso supone usar la partícula ES. La tercera condición produce la descomposición factorial de los números encontrados, que es claramente propia de un semiprimo:

Solución	Detalles
10	2 5
26	2 13
65	5 13
82	2 41
122	2 61
145	5 29
226	2 113
362	2 181
485	5 97
626	2 313
785	5 157

Obtenemos los primeros términos copiados más arriba.

Con una función de Excel

Aquí usamos a menudo la función ESCUAD para averiguar si un número es cuadrado y ESSEMIPRIMO para detectar los semiprimos. Basta unirlos convenientemente con la partícula AND:

ESSEMIPRIMO(N) AND ESCUAD(N-1)

Con este criterio y un bucle de búsqueda logramos un resultado similar al anterior:

N	FACTORES N-1	FACTORES N
10	[3,2]	[2,1][5,1]
26	[5,2]	[2,1][13,1]
65	[2,6]	[5,1][13,1]
82	[3,4]	[2,1][41,1]
122	[11,2]	[2,1][61,1]
145	[2,4][3,2]	[5,1][29,1]
226	[3,2][5,2]	[2,1][113,1]
362	[19,2]	[2,1][181,1]
485	[2,2][11,2]	[5,1][97,1]
626	[5,4]	[2,1][313,1]
785	[2,4][7,2]	[5,1][157,1]
842	[29,2]	[2,1][421,1]
901	[2,2][3,2][5,2]	[17,1][53,1]

En la tabla comprobamos que N-1 es cuadrado y N es semiprimo.

Con el lenguaje PARI

Podemos usar esta función, a la que hemos añadido un bucle de búsqueda:

es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}

for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))

Escrita en la web de PARI (https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html) produce el mismo resultado:

```
? es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}
for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))
10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901,
```

```
es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}
for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))
```

A partir de ahora acudiremos a estas tres herramientas, pero dando menos detalles.

Propiedades de estos números

Iwaniec probó que existen infinitos números de este tipo.

Es claro que n^2+1 no puede ser cuadrado, luego sus factores serán distintos, y el más pequeño será menor que n. A esos factores se les pueden aplicar algunas ideas contenidas en

http://hojaynumeros.blogspot.com/2022/10/regresos-5-un-cuadrado-y-una-unidad-1.html

En efecto, al ser n^2+1 suma de dos cuadrados, sus factores serán el 2 o del tipo 4k+1.

Un cálculo ilustrativo es el de la media geométrica de los dos factores, que, evidentemente, se situará cercana al valor de n. Esta media será la raíz cuadrada del número. Su discrepancia con la media aritmética medirá el nivel de desigualdad entre los dos factores del número semiprimo:

Media aritmética	Media geométrica	D
3,5	3,16227766	0,3377
7,5	5,099019514	2,401
9	8,062257748	0,9377
21,5	9,055385138	12,445
31,5	11,04536102	20,455
17	12,04159458	4,9584
57,5	15,03329638	42,467
91,5	19,02629759	72,474
51	22,02271555	28,977
157,5	25,01999201	132,48
81	28,01785145	52,982
211,5	29,01723626	182,48
35	30,01666204	4,9833

De la misma forma, podemos encontrar semiprimos del tipo n^2+2

6	2	[2,1][3,1]
38	6	[2,1][19,1]
51	7	[3,1][17,1]
123	11	[3,1][41,1]
146	12	[2,1][73,1]
291	17	[3,1][97,1]
326	18	[2,1][163,1]
731	27	[17,1][43,1]
843	29	[3,1][281,1]
1227	35	[3,1][409,1]
1371	37	[3,1][457,1]
1766	42	[2,1][883,1]
1851	43	[3,1][617,1]

En este caso los factores no han de ser necesariamente 2 o del tipo 4k+1. Basta comprobarlo en la tabla anterior.

Como curiosidad, estos son los del tipo n^2+3:

4	1	[2,2]
39	6	[3,1][13,1]
259	16	[7,1][37,1]
327	18	[3,1][109,1]
403	20	[13,1][31,1]
579	24	[3,1][193,1]
679	26	[7,1][97,1]
1027	32	[13,1][79,1]
1159	34	[19,1][61,1]
1299	36	[3,1][433,1]
1603	40	[7,1][229,1]
1939	44	[7,1][277,1]

K=-1

Un caso interesante es el de K=-1, es decir, semiprimos del tipo n^2-1. En ellos el semiprimo tendrá como factores (n+1)(n-1), o lo que es lo mismo, será producto de dos primos gemelos. Lo puedes comprobar en la siguiente tabla, en la que en la primera columna figuran los semiprimos, en la segunda las raíces de los cuadrados y en la siguiente los primos gemelos con exponente 1:

15	4	[3,1][5,1]
35	6	[5,1][7,1]
143	12	[11,1][13,1]
323	18	[17,1][19,1]
899	30	[29,1][31,1]
1763	42	[41,1][43,1]
3599	60	[59,1][61,1]
5183	72	[71,1][73,1]

Con esta propiedad figuran estos semiprimos como producto de primos gemelos: en OEIS:

A037074 ....
... Numbers that are the product of a pair of twin primes.

15, 35, 143, 323, 899, 1763, 3599, 5183, 10403, 11663, 19043, 22499, 32399, 36863, 39203, 51983, 57599, 72899, 79523, 97343, 121103, 176399, 186623, 213443, 272483, 324899, 359999, 381923, 412163, 435599, 656099, 675683, 685583

http://oeis.org/A037074

Encontrarlos con nuestras herramientas es fácil:

Buscador de naturales:

Solución	Detalles
15	3 5
35	5 7
143	11 13
323	17 19
899	29 31
1763	41 43

Hasta el número
Con estas propiedades
SEMIPRIMO
ES CUADRADO(N+1)
EVALUAR FACTORES

No necesita explicación, pues similar al caso anterior. Se distinguen bien los pares de primos gemelos.

Con Excel

Cambiamos la condición a

ESSEMIPRIMO(N) AND ESCUAD(N+1)

En la tabla hemos destacado que la raíz de N+1 es la media aritmética de los dos primos gemelos:

N	Primos gemelos	Raiz
15	[3,1][5,1]	4
35	[5,1][7,1]	6
143	[11,1][13,1]	12
323	[17,1][19,1]	18
899	[29,1][31,1]	30
1763	[41,1][43,1]	42
3599	[59,1][61,1]	60
5183	[71,1][73,1]	72

Estas propiedades nos garantizan que el conjunto de estos semiprimos es infinito,

Como el par de primos gemelos es siempre del tipo (6k-1, 6k+1), salvo el par (3, 5), los números encontrados tendrán la fórmula $(6k)^2-1=36k^2-1$ con lo que n+1 será múltiplo de 36, como es fácil observar en la tabla, que en su tercera columna solo contiene múltiplos de 6, salvo el primero.

Si expresamos el número $36k^2-1$ como $9(2k)^2-1$ descubriremos que las soluciones presentan resto -1 módulo 9, o lo que es lo mismo, resto 8. Pero con este módulo el resto es equivalente a sumar las cifras eliminando 9, es decir su *raíz digital*. Por eso en OEIS se destaca:

Todos los semiprimos encontrados, salvo el primero, poseen raíz digital 8.

Por ejemplo, en 5183 tenemos 5+1+8+3=17 y 1+7=8.

Puedes repasar la raíz digital en

https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_root

Al ser las funciones PHI y SIGMA multiplicativas, y ser PHI(p)=p-1 y SIGMA(p)=p+1 en los números primos, si los aplicamos a este caso del producto N=p(p+2) de dos primos gemelos, obtendremos:

PHI(N)=(p-1)(p+2-1)=(p-1)(p+1)
SIGMA(N)=(p+1)(p+2+1)=(p+1)(p+3)

La diferencia entre ambas será (p+1)*4=(p+1+p+1)*2=2*(p+p+2),es decir el doble de la suma de los dos primos gemelos. Lo verás en esta tabla:

N	Primos gemelos	PHI	SIGMA	DIFERENCIA
15	[3,1][5,1]	8	24	16
35	[5,1][7,1]	24	48	24
143	[11,1][13,1]	120	168	48
323	[17,1][19,1]	288	360	72
899	[29,1][31,1]	840	960	120
1763	[41,1][43,1]	1680	1848	168
3599	[59,1][61,1]	3480	3720	240
5183	[71,1][73,1]	5040	5328	288

Resumiendo*:*

En un producto de primos gemelos, la diferencia entre su número de divisores y el de coprimos menores que él es la suma de los dos primos.

Con estas ideas ya puedes experimentar con otros valores de K, como 4, 9, -4, -9 y otros. Lo dejamos abierto

LOS PRIMOS COMO CONJUNTO

PRIMO Y SU NÚMERO DE ORDEN

En el mes de septiembre, en un diálogo a través de Twiter, Benjamin Vitale

(http://benvitalenum3ers.wordpress.com/) me hizo notar que 3559 es el número primo de número de orden 499, y que ambos números tienen la misma suma de cifras, 22. Aquí respondemos, cuando es posible, a todas las ideas que nos llegan con una cuestión a resolver, y no es la primera vez que estas nos llegan de Ben Vitale. En este caso podría ser: ***¿Qué detalles pueden tener en común un número primo y su número de orden en la lista de los mismos?***

En sus cifras

Coincidencia entre cifras

No sólo pueden coincidir en la suma de sus cifras. Será relativamente fácil que lo hagan en la última cifra. En efecto, los primos 17, 31, 83, 109, 157, 563, 587, 599, 661, 811, 823, 859, … Por ejemplo, el 17 es el primo número 7 y 31 el número 11. Puedes estudiarlos mejor en http://oeis.org/A085598

Es más difícil que ambos números coincidan en sus dos últimas cifras. Los primeros números que cumplen esto son (los presentamos por pares, número de orden y primo):

(243,1543), (519, 3719), (589, 4289), (703, 5303), (741, 5641), (823, 6323), (901, 7001), (959, 7559), (973, 7673), (1033, 8233), (1081, 8681), (1197, 9697), (1223, 9923), (1443, 12043), (1477, 12377), (1491, 12491),(1541, 12941), (1723, 14723) (1751, 14951), …

En todos ellos coinciden las dos últimas cifras del primo y de su número de orden. Para encontrarlos necesitamos dos funciones: CORTACIFRAS y PRIMONUM.

Cortar cifras

La primera no es difícil de programar en cualquier lenguaje. Su misión es seleccionar algunas cifras de la expresión decimal de un número. La versión más simple, sin control de errores, es esta:

CORTACIFRAS(P,M,N)=(P MOD 10^N)\10^(M-1),

en la que P es el número, M el inicio del corte y N el final, ambos incluidos (pueden ser iguales y entonces se corta una sola cifra). El significado de la fórmula es que calculas el módulo o residuo de P respecto a 10^N y el resultado lo divides de forma entera entre 10^(M-1)

Si del número 288762 deseas seleccionar las cifras que van de la segunda a la quinta deberás efectuar estos cálculos:

288762 MOD 10^5 = 88762 y ese número lo divides sin decimales entre 10^(2-1), es decir 8876.

En hoja de cálculo se expresaría así:

=COCIENTE(RESIDUO(288762;10^5);10).

Compruébalo.

En PARI es más sintético: ***(288762%10^5)\10***

Encontrar el número primo dado su número de orden

Esta función PRIMONUM es más difícil de conseguir. En PARI está yá implementada: ***prime(k),*** pero no para números grandes. En el resto del texto usaremos esta notación prime(k) que resulta muy sintética. En hoja de cálculo no está disponible de entrada, aunque sí en algún complemento. Un código que resulta un poco lento podría ser este:

Public Function primonum(n)
Dim p, c, i

```
'encuentra el primo cuyo número de orden es n

c = 0: i = 2
While c < n
If esprimo(i) Then c = c + 1: p = i
i = i + 1
Wend
primonum = p
End Function
```

Con estas dos funciones y una estructura tipo FOR_NEXT puedes encontrar los primos deseados. Hemos usado también este programa en PARI:

```
cutdigit(a,p,q)=(a%10^q)\10^(p-1)
{for(n=5,5000,p=prime(n);if(cutdigit(p,1,2)==cutdigit(n,1,2),print(p)))}
```

En primer lugar hemos definido ***cutdigit*** para seleccionar cifras y después la hemos usado entre 1 y 2 para averiguar si coinciden las cifras en ***k*** y ***prime(k)***

Hemos publicado la tabla para prime(k) en https://oeis.org/A232102 y la de k ya estaba publicada en https://oeis.org/A067838

Modificando lo anterior podemos buscar la igualdad en las tres últimas cifras. Los resultados son estos:

(1491, 12491), (1723, 14723), (4119, 39119), (4437, 42437),

(6347, 63347), (6931,69931), (7817, 79817), (9551, 99551),

(12083, 129083), (12637, 135637),(13647, 147647),

(15103, 165103), (16637, 183637), (17181, 190181),…

Los números primos los hemos publicado en https://oeis.org/A232104 y sus números de orden los tienes en https://oeis.org/A067841

Con cuatro tenemos que forzar la máquina, porque en Basic resulta lento y en PARI la función prime(k) sólo está definida hasta un tope, que en nuestro caso se supera después de obtener el primo número 24833. Hemos tenido que acudir a la función primenext (o nuestra primprox), pero no daremos detalles. El resultado es, para los números de orden:

9551, 15103, 18697, 23071, 24833, 48229, 53853, 58681, 83819, 91617, 93909, 107647, 115259, 120487, 126497, 156991, 160681, 162857, 177477, 181833, 189143, 194229, 208679, 213703, 221569, …

Y para los números primos:

99551, 165103, 208697, 263071, 284833, 588229, 663853, 728681, 1073819, 1181617, 1213909, 1407647, 1515259, 1590487, 1676497, 2116991, 2170681, 2202857, 2417477, 2481833, 2589143, 2664229, 2878679, 2953703, 3071569, …

Las hemos incorporado a https://oeis.org/A232189 y https://oeis.org/A232188 respectivamente.

No seguimos presentando sucesiones, por nuestro deseo de no cansar. Sólo destacaremos que los primos 407647 y 1515259, de órdenes respectivos 107647 y 115259 son los primeros en presentar una coincidencia de cinco cifras, y prime(303027)=4303027, prime(440999)=6440999 son los primeros en coincidir en seis.

De los de coincidencia en siete cifras damos el primero: prime(5517973)=95517973, pero le siguen más. Hay que forzar el PARI y con las hojas de cálculo mejor lo olvidamos.

Coincidencia total

Existen primos cuyo número de orden constituye todo su final en cifras. Son los llamados ***primos automórficos***, y están publicados en http://oeis.org/A046883. Por ejemplo, el primo número 9551 resulta ser 99551 y el 303027, 4303027, coincidencia en las últimas cifras.

Operaciones con cifras

Las coincidencias en la suma de cifras similares a las de 499 y 3559 están recogidas en http://oeis.org/A033548 y reciben el nombre de "primos de Honaker". Puedes ver en la siguiente dirección un ejemplo notable de este tipo de primos:

http://primes.utm.edu/curios/page.php/37778931862957154241011.html

Hemos investigado las coincidencias en el producto de cifras, pero no presenta gran interés, ya que las cifras 0 aumentan las posibilidades de coincidencia. Te lo dejamos como propuesta. Los primeros son: 17, 181, 409, 443, 491, 601, 809, 1013, 1069, …

Está publicadas relaciones basadas en la concatenación de cifras:

Concatenar p y prime(p) y que resulte un primo:

A084667: La concatenaciones primeras son (separamos con un guión el número de orden y el primo) 2-3, 4-7, 6-13, 12-37, 17-59, 18-61, 23-83, 27-103, 30-113, 35-149, 36-151,…

Concatenación inversa

A084669: Si invertimos la concatenación también obtenemos ejemplos:

5-3, 23-9, 67-19, 73-21, 157-37, 307-63, 389-77, 419-81, 449-87, 587-107, …

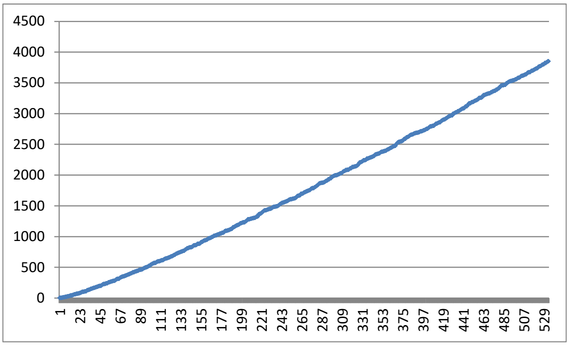
Hemos investigado también las diferencias entre prime(k) y k, pero o están publicadas o carecen de interés.

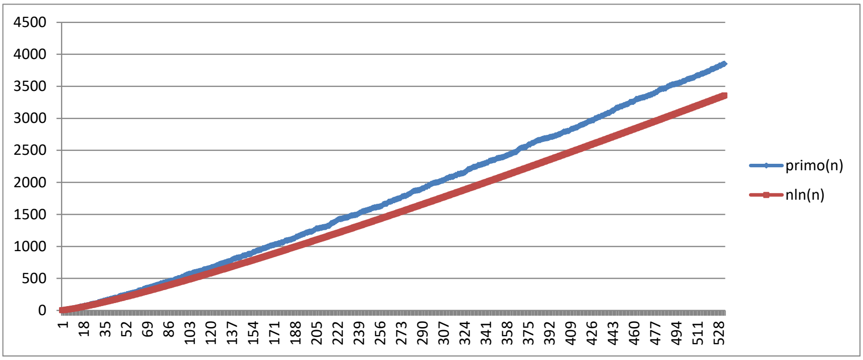
RESTOS EN LA FUNCIÓN PRIMO(N)

Seguimos con nuestra tendencia a jugar y experimentar con los conceptos matemáticos. Ahora lo haremos con la enumeración de los números primos, por la que asignamos a cada número natural N el número primo que ocupa el lugar N en su orden natural. Esta función así construida la podemos llamar PRIMO(N), prime(n) en inglés, o, como hemos usado este año en mi blog, PRIMNUM(N). Para simplificar la escritura usaremos P(N).

Esta función, como es de esperar, está bien estudiada. En http://oeis.org/A000040 tienes muchos detalles. Si la representamos (de forma falsamente continua) notamos que es casi lineal, con concavidad hacia arriba.

En la página de OEIS citada se incluye la propiedad de que P(n) es siempre mayor que **nln(n)**. En efecto, si representamos ambas funciones en un mismo gráfico, observamos que son muy similares. Ambas tienden “suavemente” a infinito conjuntamente con **n**.





Relaciones lineales

Esto nos va a servir para lo siguiente: Para cualquier valor de N, podemos encontrar el cociente entero P(N)\N y el resto correspondiente. Por ejemplo, P(22)=79, porque este es el primo que ocupa el lugar 22. Podemos expresarlo así: 79=3*22+13. Esto siempre es posible, y el cociente entero será igual o mayor que 1, porque P(N)>N. Aquí nos interesará el resto 13.

Todo número primo se puede expresar mediante el cociente entero entre su número de orden y el resto correspondiente.

En la gráfica esto equivaldría a dibujar una línea recta que corta exactamente a la gráfica de los primos en el punto (N,P(N)).

Restos posibles

El resto de la división entera entre un primo y su número de orden puede presentar muchos valores distintos. Vemos algunos de los primos publicados:

2, 3, 11, 13, 37, 43, 1087, 64591, 64601, 64661, … se caracterizan porque su resto respecto a su número de orden es 1. Por ejemplo, 64661 es el primo número 6466 y se cumple que 64661=6466*10+1. Estos números primos los tienes en http://oeis.org/A048891

También aparecen restos 2

(ver http://oeis.org/A156152).

Por ejemplo, P(73)=367=73*5+2. Y también 3 (A171430) o resto -1 (A052013)

¿Aparecerán todos los restos si recorremos los números primos y los dividimos entre sus números de orden? En http://oeis.org/A004648 tienes su enumeración ordenada:

0, 1, 2, 3, 1, 1, 3, 3, 5, 9, 9, 1, 2, 1, 2, 5, 8, 7, 10, 11, 10, 13, 14, 17, 22, 23…

Al recorrer los primeros 1000 primos echamos de menos algún resto, como el 18 o el 20 ¿acabarán apareciendo? Para averiguar esto usaremos una técnica similar a otras que han aparecido en mi blog: fijamos un número grande, como el 10^6, y para cada valor de resto que elijamos, por ejemplo ese 18 que no aparece, recorremos todos los primos menores que el tope y les calculamos su resto respecto al número de orden. Si aparece el que queremos, ya lo hemos encontrado; si no, aumentamos el tope. Lo podemos construir en el Basic de las hojas de cálculo:

Public Function primoresto(n)
Dim a, i, p, r
a = 2: i = 1: r = -1: p = -2 Iniciamos la lista de primos y la variable r a -1
While p <> n And i <= 10 ^ 6 Bucle hasta la solución o hasta el tope
p = a - i * Int(a / i) Buscamos el resto entre el primo a y su orden i
If p = n Then r = a Si el resto coincide con el número propuesto, ya tenemos solución
i = i + 1 Si no, avanzamos en la lista de primos
a = primprox(a)
Wend
primoresto = r
End Function

Si la función devuelve el valor -1, es que no se ha encontrado solución y hay que subir el tope. Con esta función y con Excel, que es una hoja rápida, hemos encontrado estos valores:

Posible resto	Mínimo primo que produce este resto
1	3
2	5
3	7
4	379
5	23
6	401
7	61
8	59
9	29
10	67
11	71
12	467
13	79
14	83
15	179
16	431
17	89
18	176557
19	191
20	24419
21	491
22	97
23	101
24	499
25	1213
26	3169
27	3191
28	523
29	229
30	3187
31	223
32	3203
33	8609
34	3163
35	251
36	176509
37	257
38	24509
39	263
40	3253
41	269
42	547
43	3347
44	1304867
45	293
46	571

Llama la atención el mínimo primo que presenta resto 18. Efectivamente, 176557 es el primo número 16049 y el cociente entre ellos es 11 y el resto 18, como cabía esperar. Más impresionante es el correspondiente a 44, nada menos que 1304867. Para avanzar más hemos traducido el algoritmo a PARI

```
resprime(n)={local(a,i,r,p);a=2;i=1;r=-1;p=-2;while(p<>n&&i<=10^6,p=a%i;if(p==n,r=a);i+=1;a=nextprime(a+1));return(r)}

{for(i=1,50,print(resprime(i)))}
```

Con él, subiendo el tope a 10^8, hemos descubierto que el resto 110 no aparece hasta el primo 514279133

¿Existirá siempre un número primo que produzca un resto igual a un número que elijamos? No lo sabemos. Lo dejamos como conjetura:

Conjetura: Para cada número natural n>1 existe un número primo P(k) que produce un resto respecto a k igual a n.

Si alguien sabe algo más lo publicaremos como extensión.

SUMA DE NÚMEROS PRIMOS CONSECUTIVOS

¿Qué ocurre si sumamos dos primos consecutivos mayores que 2?

En primer lugar, nunca da un semiprimo: ambos son impares, luego la suma tendrá el factor 2. Por otra parte, la suma es el doble de su media aritmética, que por estar entre ellos no será un número primo, luego aportará a la suma al menos dos factores primos más, por lo que nunca será semiprimo.

Según sean ambos primos del tipo 4k+1 o 4k+3, se puede obtener un múltiplo de 4 o uno de 2 que no sea de 4. Es curioso ver que si la diferencia entre ellos no es múltiplo de 4, la suma sí lo es. Al contrario, si la diferencia entre ellos es divisible entre 4, la suma no lo será. Intenta razonarlo, que no es difícil. Por ejemplo, 7+11=18, que no es múltiplo de 4, mientras que 11-7 sí lo es. Por contra, 17 y 19 se diferencian en 2 y su suma 36 es múltiplo de 4.

Sucesión de sumas

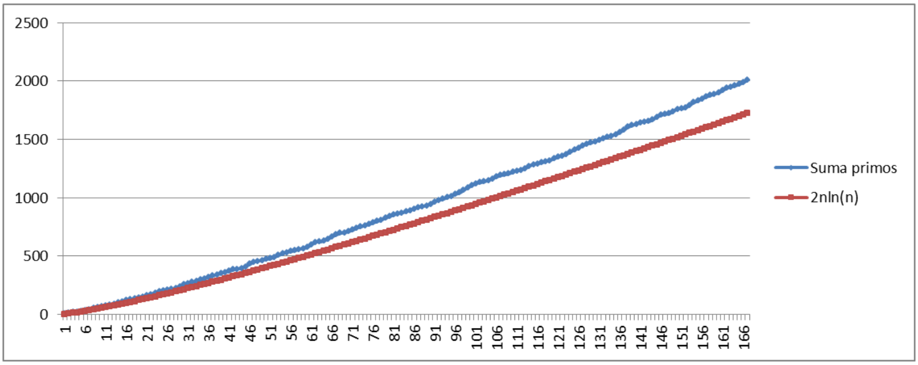
Al contrario ¿Qué números pares son suma de números primos consecutivos? Tienes el resultado, con el añadido del 5, en http://oeis.org/A001043

5, 8, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 52, 60, 68, 78, 84, 90, 100, 112, 120, 128, 138, 144, 152, 162, 172, 186, 198, 204, 210, 216, 222, 240, 258, 268, 276, 288, 300, 308…

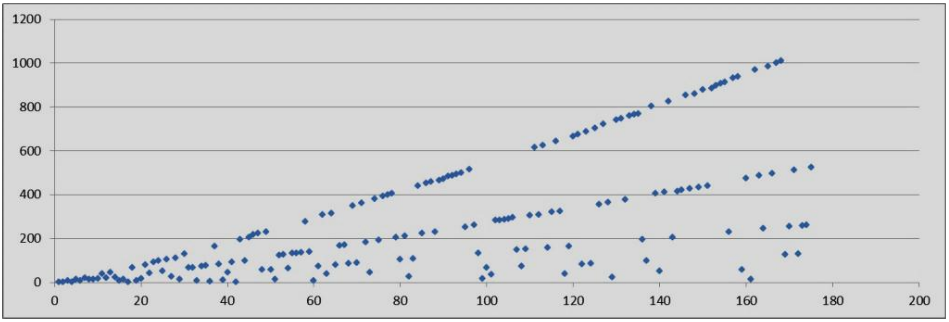
(En todas las sucesiones incluiremos sólo el primo más pequeño del par. El otro lo puedes encontrar con las funciones PRIMPROX o NEXTPRIME).

Prescindiendo del 5, caso aislado, podemos encontrar algunas características interesantes:

Su gráfica está muy bien aproximada por defecto mediante **2nln(n)**. Esto ocurre porque nln(n) es cota inferior cercana de la función prime(n), y al sumar primos consecutivos se aproxima como si fuera el doble.



Si prescindimos del 5, todos serán pares y tendrán un Mayor divisor impar (MDI) que siempre será propio. El gráfico de los MDI es este



La primera rama se corresponde con los MDI cuando el 2 está elevado a la unidad, la segunda para los múltiplos de 4 y así hasta abajo.

Estaba inédita la sucesión de las valuaciones de esas sumas respecto a 2:

3, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 4, 3, 7, 1, 4, 3, … y la hemos publicado en https://oeis.org/A237881 con la inclusión del caso 2+3

Charles R Greathouse IV ha añadido las acotaciones **a(n) << log n**; en particular, **a(n) <= log_2 n + log_2 log n + O(1)**.

En PARI se podría buscar así:

{for(i=1,200,k=valuation(prime(i)+prime(i+1),2);print1 (k,", "))}

Observando la gráfica de más arriba nos podemos preguntar con qué frecuencia aparecen los valores 1, 2, 3,… en la sucesión, para un rango determinado.

Para valores naturales, los números con valuación 0 tendrán frecuencia doble que los de valuación 1, y estos el doble que los de valuación 2, aproximadamente. Aquí tienes la distribución de frecuencias para números inferiores a 10000:

Valuación	Fecuencia
0	5000
1	2500
2	1250
3	625
4	313
5	156
6	78
7	39
8	20
9	10
10	5
11	2
12	1
13	1

La explicación de la tabla es muy sencilla: tendrán valuación 0 los números impares menores que 10000, que son 5000. Los de valuación 1 serán números doble de un impar, por lo que estos no podrán pasar de 2500. Así podemos ir razonando: valuación 2 la tendrán los números que son cuádruples de un impar, en total 1250, y así hasta el final:

Valuación	Fecuencia
0	1
1	21086
2	14417
3	7286
4	3597
5	1802
6	917
7	457
8	224
9	104
10	52
11	34
12	12
13	5

En los números naturales, cada valuación presenta una frecuencia doble respecto a la siguiente (salvo redondeos)

¿Ocurrirá lo mismo con nuestra sucesión en la que las valuaciones se aplican sobre sumas de primos consecutivos? En principio no lo esperamos, pero vamos a experimentarlo.

Hemos recogido las valuaciones de todas las sumas tipo prime(i)+prime(i+1) menores de 50000, con este resultado:

La valuación 0 corresponde al caso 2+3.

Llama la atención que se cumple aproximadamente el hecho de que cada valor tenga el doble de frecuencia que el siguiente salvo el de 1, cuyo valor 21086 no se aproxima al doble de la siguiente, 14417. La razón es que la suma de primos del tipo 4k+1 con los de 4k+3 produce un exceso de múltiplos de 4.

La suma es cuadrado

En http://oeis.org/A061275 se recogen los casos en los que la suma de dos primos consecutivos da un cuadrado:

17, 47, 71, 283, 881, 1151, 1913, 2591, … (primer primo del par)

Por ejemplo, $17+19=36=6^2$.

Igualmente $47+53=100=10^2$, $71+73=144=12^2$

El cuadrado será par, y por tanto un múltiplo de 4. Si un elemento del par de primos es del tipo 4n+1, el otro deberá ser de la clase 4n+3, para que no resulte un múltiplo de 2 que no lo sea de 4, y así impida que resulte un cuadrado. Como los primeros se pueden descomponer en sumas de cuadrados, un elemento del par tendrá siempre la forma $A^2-B^2-C^2$. Por ejemplo, en el par (103049, 103067), $103067=454^2-157^2-280^2$.

Con el Buscador

Solución	Detalles
17	
47	
71	
283	
881	
1151	
1913	

Buscamos desde el número	3
Hasta el número	2000

Con estas propiedades:

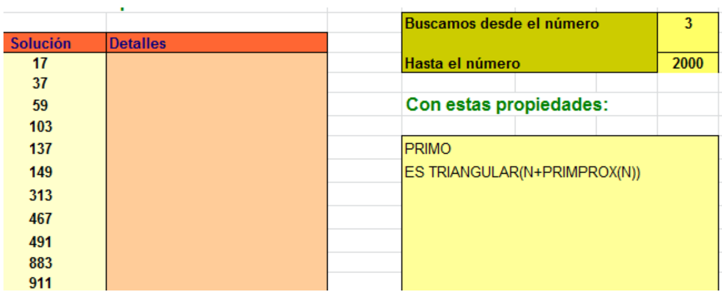
PRIMO
ES CUADRADO(N+PRIMPROX(N))

Suma triangular

Están contenidos en https://oeis.org/A225077:

17, 37, 59, 103, 137, 149, 313, 467, 491, 883, 911, 1277, 1423, 1619, 1783, 2137, 2473, 2729, 4127, 4933, 5437, 5507, 6043, 6359, 10039, 10453, 11717, …

Así, el par de primos gemelos (2087,2089) tiene como suma 41616=288*289/2, que es el triangular número 288.



Suma doble de un cuadrado

Este caso es interesante porque en ellos la media aritmética de los dos primos consecutivos sería un cuadrado. Así ocurre con 1087 y 1091, cuyo promedio es 1089, el cuadrado de 33.

En ese caso un primo es n^2-k y el otro n^2+k. Si k=1 tendríamos un par de primos gemelos. Sólo hemos encontrado el par (3,5), cuya media es el cuadrado de 2.

No puede haber más, porque para que n^2-1 sea primo, ha de ser n-1=1 y eso sólo ocurre en n=2 y el par (3,5).

Los términos de esta sucesión son

3, 7, 61, 79, 139, 223, 317, 439, 619, 1087, 1669, 2593, 3593, 4093, 5179, 6079, 8461, 12541, 13687, 16633, 19037, 19597, 25261, 27211, 28219, 29581, 36857, 38011, 39199, 45361, 46649, 47521, 51977, 56167… https://oeis.org/A225195

Forman una subsucesión de http://oeis.org/A053001, que contiene los números primos mayores que son anteriores a un cuadrado. Los que estudiamos aquí cumplen esa condición, porque al ser el cuadrado la media entre dos primos consecutivos, el menor de ellos tendrá la propiedad pedida en A053001.

Con el Buscador

Solución	Detalles
3	
7	
61	
79	
139	
223	
317	
439	
619	
1087	
1669	

Buscamos desde el número	3
Hasta el número	2000

Con estas propiedades:

PRIMO
ES CUADRADO((N+PRIMPROX(N))/2)

Otros casos

La suma puede ser una potencia perfecta:

3, 17, 47, 61, 71, 107, 283, 881, 1151, 1913, 2591, 3527, 4049, 4093, 6047, 7193, 7433…

https://oeis.org/A091624

Como casos particulares están publicados los cuadrados (http://oeis.org/A061275) y los cubos (https://oeis.org/A061308)

O el doble de una potencia perfecta:

3, 7, 61, 79, 139, 223, 317, 439, 619, 1087, 1669, 1723, 2593, 3593, 4093, 5179, 6079, 8461, 12541, 13687, 16633, 17573, 19037, 19597,…

En este caso la media de los dos primos será una potencia perfecta, y ambos se pueden representar por k^m-h y k^m+h, con k y h coprimos y no siendo h una potencia de exponente m (¿por qué?)

No es difícil encontrarlos. Con esta línea de PARI lo consigues.

{forprime(i=3,10^6,k=(i+nextprime(i+1))/2;if(ispower(k),print(i,", ")))}

(La hemos publicado en https://oeis.org/A242380)

Un caso particular interesante es cuando la media es un cubo. Los primos consecutivos serían del tipo k^3-h y k^3+h, con k y h coprimos y no siendo h un cubo. De esto también se deduce que un elemento de la sucesión es el mayor primo anterior a un cubo, y que por tanto pertenece también a la secuencia

http://oeis.org/A077037

Son estos:

61, 1723, 4093, 17573, 21943, 46649, 110587, 195103, 287491, 314423, 405221, 474547, 1061189, 1191013, 1404919, 1601609, 1906621, 2000371, 2146687, 2196979, 3241783, 3511799, 4912991, 5268017, 6229501, 6751267, 6858997, 7077883, 11239421, 20346407, 21951997, 26198063, …

Los puedes reproducir con PARI

{for(i=3,3*10^7,if(isprime(i),k=(i+nextprime(i+1))/2;if(ispower(k,3),print(i,", "))))}

(publicados desde mi blog en

https://oeis.org/A242382)

En realidad se pueden probar otros casos por puro entretenimiento, y después incorporarlos a OEIS para que queden en esa extensa base de datos. Pueden ser estos:

Media oblonga

Se conocen ya los primos consecutivos cuya suma es un número oblongo (del tipo n(n+1) o bien doble de un triangular). Están contenidos en

http://oeis.org/A154634.

Los que aportamos desde mi blog son aquellos cuya media es oblonga:

5, 11, 29, 41, 53, 71, 239, 337, 419, 461, 503, 547, 599, 647, 863, 1051, 1187, 1481, 1721, 1801, 2549, 2647, 2969, 3539, 4421, 6317, 7129, 8009, 10301, 12653, 13567, 14033, 17291, 18353, 19181, 19457, 20021, 22943, 23561, 24179, 27059, 29063, 29753, 31151, 33301…

(https://oeis.org/A242383)

Una propiedad curiosa es que están contenidos en http://oeis.org/A161550. La razón es que si un número primo pertenece a la sucesión que presentamos, en la que su media con el próximo primo es un oblongo del tipo $n(n+1)=n^2+n$, es claro que será el máximo primo inferior a n^2+n, que es la definición de A161550. Por el contrario, un término de esta sucesión no tiene que cumplir nuestra condición. Así, el 19 es el máximo primo inferior a

$4^2+4=20$, pero su media con el siguiente primo no es 20: (19+23)/2=21.

Los puedes encontrar con PARI:

{for(i=3,10^5,if(isprime(i),k=(i+nextprime(i+1))/4;if(issquare(8*k+1),print1(i,", "))))}

En el código se buscan pares de primos cuya suma dividida entre 4 produzca un triangular. Es otra forma de definirlos.

Suma del tipo n*(n+2)

Estos números del tipo n*(n+2) se pueden expresar también como $(n+1)^2-1$. Salvo el caso n=1 ninguno puede ser primo. No es muy frecuente el que dos primos consecutivos produzcan este tipo de número. Los primeros son estos:

3, 11, 59, 139, 179, 311, 419, 541, 919, 1399, 1621, 2111, 3119, 5099, 6379, 8059, 8839, 9377, 15661, 16007, 16741, 17107, 21011, 21839, 23539, 24419, 28081, 30011, 31489, 33533, 35617, 37811, 39461, 41759, 44699, 45293, 60899, 68819, 71059, 78007, 83639, 84457, 86111, 87767, 92867, 99901, …

Según el párrafo anterior se pueden ir sumando los pares de números primos consecutivos, sean p y q, y exigir que p+q+1 sea un cuadrado. Así los hemos encontrado con hoja de cálculo y con PARI:

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(issquare(k+l+1),print1(k,", "));k=l)}

Si efectuamos las sumas entre los pares de números consecutivos encontrados, es evidente que n*(n+2) será par, luego n también lo será. Si elegimos un número primo de la sucesión, por ejemplo el 2111, su próximo primo será 2113, y su suma 4224 es igual a 64*(64+2), con n=64, par.

Media del tipo n*(n+2)

Es un caso similar al anterior, pero con cambios importantes. Los primeros primos que cumplen esto son

13, 97, 113, 193, 283, 397, 479, 673, 953, 1439, 1597, 2297, 2699, 3469, 4219, 4483, 5323, 7219, 8273, 9209, 9403, 10799, 12097, 13219, 14879, 15373, 15619, 21313, 23399, 26237, 27883, 32029, 32749, 34217, 37243, 39989, 41203, 42433, 43669, 46219, 55219, 60509, 62497, 72353, 75619, 93001, …

El código para encontrarlos es

{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(issquare((k+l)/2+1),print1(k,", "));k=l)}

En ellos la media de los dos consecutivos incrementada en una unidad se convierte en un cuadrado. Por ejemplo, el primo consecutivo a 9209 es 9221. Su media 9215 y si le sumamos una unidad resulta 9216=96^2

Por último, capicúas

Terminamos con dos ejemplos más. El primero recoge los pares de primos cuya suma es capicúa de al menos dos cifras:

109, 211, 347, 409, 1051, 1493, 2111, 2273, 3167, 4219, 4441, 10099, 10853, 10903, 11353, 11909, 12823, 12973, 13421, 13831, 14543, 14639, 20551, 21011, 21347, 21661, 21863, 22271, 23581, 23981, 30047, 30557, 31259, 31307, 31963, 32069, 32213, 32467, 32869, 33029, 33479, 33587, 34487, 34693, 34847, 40351, 41011, 41617, 41911, 42169, 43427, 43481, 43987, 44491, 44647, …

Encontrarlos con PARI es algo más complicado: la función reverse invierte el orden de las cifras del número y la palind devuelve VERDADERO si el número tiene al menos dos cifras y es igual a su simétrico en cifras. El resto es fácil de entender:

reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)

```
{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(palind(k,l),pri
nt1(k,", "));k=l)}
```

Los tienes en https://oeis.org/A242386

Con media capicúa

Con una codificación similar se pueden encontrar aquellos primos consecutivos cuya media es capicúa:

97, 109, 281, 359, 389, 409, 509, 631, 653, 691, 743, 827, 857, 907, 937, 967, 1549, 2111, 2767, 4219, 4441, 7001, 9007, 9337, 9661, 10099, 11503, 12919, 13421, 16759, 17569, 21011, 21611, 23831, 26261, 26861, 28181, 29287, 29483, …

```
reverse(n)=concat(Vecrev(Str(n)))
palind(n)=(Str(n)==reverse(n)&&n>10)
{k=2;while(k<10^5,l=nextprime(k+1);if(palind(k+l),pri
nt1(k,", "));k=l)}
```

(https://oeis.org/A242387)

NÚMEROS ESPECIALES BASADOS EN PRIMOS

NÚMEROS DE POLIGNAC

Estos números se definen a partir de la conjetura de Polignac, que pronto se descubrió que era falsa. Afirma que todo número impar es suma de un primo y de una potencia de 2. Números tan pequeños como 127 no la cumplen, por lo que duró poco como conjetura.

Llamaremos número de Polignac a aquel número impar que no cumpla la conjetura explicada, que no pueda expresarse como $p+2^x$. Se supone implícitamente que x puede valer 0, porque en ningún listado se toma el 3 como número de Polignac, ya que $3=2+2^0$

Son números de Polignac el 1 y el ya citado 127.

Insertaremos cuanto antes elementos de búsqueda, por lo que procede ahora el diseñar una función que nos indique si un número es de Polignac o no. No resulta difícil, porque las potencias de 2 crecen con rapidez y su cota es la llamada *valuación* del número N respecto a 2, que es el máximo exponente de una potencia de 2 que sea igual o menor que el número. Es fácil ver que se obtiene como INT(log(N)/LOG(2)). Con esa cota, vamos construyendo potencias de 2, y si al restar del número N resulta un número primo, será señal de que no es un número de Polignac.

El listado de la función puede ser el siguiente:

```
Function espolignac(n) as boolean
dim x
dim vale as boolean

vale=false:x=1 'El valor 1 es el inicio de las potencias de 2
if n/2<>n\2 then 'Examina si el número es impar
while x<=n and not vale 'Se recorren las potencias de 2
if esprimo(n-x) then vale=true 'Criterio de Polignac
x=x*2 'Siguiente potencia de 2
wend
espolignac=not vale
else
espolignac=false 'Si es par, no es de Polignac
end if
end function
```

Puedes conseguir nuestra función “*esprimo*” si buscas en Google “*función esprimo hoja*”

Con esta función es fácil encontrar números de Polignac. En la imagen tienes los primeros, obtenidos con hoja de cálculo:

1
127
149
251
331
337
373
509
599
701
757
809
877
905
907
959
977

Están publicados en http://oeis.org/A006285

A006285 Odd numbers not of form p + 2^x (de Polignac numbers).

(Formerly M5390)

1, 127, 149, 251, 331, 337, 373, 509, 599, 701, 757, 809, 877, 905, 907, 959, 977, 997, 1019, 1087, 1199, 1207, 1211, 1243, 1259, 1271, 1477, 1529, 1541, 1549, 1589, 1597, 1619, 1649, 1657, 1719, 1759, 1777, 1783, 1807, 1829, 1859, 1867, 1927, 1969, 1973

Esta lista se puede reproducir con el lenguaje PARI. El código propuesto en la página citada es algo difícil de entender, por lo que se puede acudir a este otro:

```
espolignac(n)={x=1;if(n/2 <> n\2,v=0;while(x<=n&&v==0, r=n-x; if(isprime(r), v=1); x=2*x);e=1-v,e=0);e}
```

```
for(n=1,1000,if(espolignac(n),print(n)))
```

Entre ellos existen primos y compuestos. También figuran en el listado algunos números impares consecutivos, como 905 y 907.

Erdös probó que existen infinitos números de este tipo, como los que tienen la forma

1260327937 + 2863311360k.

Puedes leer su fórmula en

http://www.bitman.name/math/article/388

Disponiendo de la función *espolignac* no es difícil encontrar los pares de números de Polignac consecutivos en este listado. Los primeros, menores de 10000, son estos:

905	907
3341	3343
3431	3433
4151	4153
4811	4813
4841	4843
5729	5731
7387	7389
7811	7813
8921	8923

Entre los números de Polignac, como ya se ha indicado, existen muchos primos. Los primeros son los siguientes:

127, 149, 251, 331, 337, 373, 509, 599, 701, 757, 809, 877, 907, 977, 997, 1019, 1087, 1259, 1549, 1597, 1619, 1657, 1759, 1777, 1783, 1867, 1973, 2203, 2213, 2293, 2377, 2503, ...

Están publicados en http://oeis.org/A065381

Aportación nuestra

Semiprimos

También hay semiprimos entre los números de Polignac. Los primeros son:

905, 959, 1199, 1207, 1211, 1243, 1271, 1477, 1529, 1541, 1589, 1649, 1807, 1829, 1927, 1969, 1985, …

Basta añadir a la condición *espolignac* la de ser semiprimo.

Con PARI podemos ampliar la lista, ya que los semiprimos se identifican porque su función bigomega es igual a 2.

```
espolignac(n)={x=1;if(n/2 <>
n\2,v=0;while(x<=n&&v==0, r=n-x; if(isprime(r), v=1);
x=2*x);e=1-v,e=0);e}
```

```
for(n=1,10000,if(espolignac(n)&&bigomega(n)==2,wr
ite1("final.txt",n,", ")))
```

Así quedaría el listado hasta 10000:

905, 959, 1199, 1207, 1211, 1243, 1271, 1477, 1529, 1541, 1589, 1649, 1807, 1829, 1927, 1969, 1985, 2171, 2231, 2263, 2279, 2429, 2669, 2983, 2993, 3029, 3149, 3215, 3239, 3341, 3353, 3431, 3505, 3665, 3817, 3845, 3985, 4063, 4151, 4195, 4573, 4589, 4633, 4717, 4781, 4811, 4841, 4843, 4855, 5143, 5609, 5617, 5729, 5731, 5755, 5761, 5771, 5917, 5951, 6001, 6065, 6119, 6161, 6193, 6283, 6403, 6433, 6463, 6509, 6535, 6539, 6731, 6757, 6821, 6941, 7169, 7199, 7289, 7319, 7343, 7379, 7387, 7405, 7431, 7747, 7783, 7799, 7807, 7811, 7813, 7913, 7961, 8023, 8031, 8141, 8159, 8257, 8399, 8411, 8587, 8621, 8873, 8915, 8921, 8981, 9101, 9115, 9307, 9517, 9557, 9569, 9641, 9809, 9959,

Como curiosidad, ninguno de los primeros números del listado es múltiplo de 3. Hay que esperar a llegar a 7431 y 8031 para que aparezca.

De igual forma se pueden buscar otros tipos.

Cuadrados:

1
40401
62001
96721
121801
192721
326041
410881
555025
660969
683929
772641
786769
822649

Triangulares

1
46971
79003
93961
166753
203203
224785
286903
334153

Entre la sucesión de Fibonacci solo hemos encontrado dos (con cota 100000), el 1 y el 1597.

Como no se advierte ninguna propiedad especial, lo dejamos por ahora.

NÚMEROS DE FORTUNE

A los números que vamos a estudiar se les suele llamar afortunados, pero esa denominación puede confundirse con otras parecidas, como “números felices” o “de la suerte”. Por ello los nombraremos según el primer matemático que los estudió, que fue Reo Franklin Fortune.

Para definirlos bien podemos comenzar recordando los números de Euclides. Son aquellos formados por el producto de los primeros números primos con el añadido de una unidad:

$E(n)=p_1*p_2*p_3*.*p_n+1$

(Ver
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Euclides
y
http://oeis.org/A006862)

Los conocimos en la demostración clásica de la infinitud de números primos, y unos son primos y otros compuestos, como 30031=59*509.

Al primer sumando en la definición se le llama *primorial,* y ya lo hemos estudiado en mi blog

http://hojaynumeros.blogspot.com/2012/02/el-primorial.html

El primorial se suele representar como N#, siendo N el número de factores primos consecutivos de su producto. Por ejemplo, 4#=2*3*5*7=210.

Llamemos Q(n) al primer primo posterior al número de Euclides E(n) de orden **n**, es decir, posterior a n#+1. Puede ocurrir que la diferencia P(n) = Q(n)-n# sea un número primo, y en ese caso diremos que P(n) es **un número afortunado o de Fortune**. Este autor conjeturó que todos ellos serían primos. Es una cuestión no demostrada aún.

Por ejemplo, 2*3*5=30 es el tercer primorial, por lo que 31 es un número de Euclides. Su primo más próximo en orden creciente es 37, y la diferencia 37-30=7 es prima, luego 7 es un número afortunado.

En siguiente página de MathWorld puedes consultar lo más importante sobre estos números.
http://mathworld.wolfram.com/FortunatePrime.html

Búsquedas

Podemos reproducir la lista de números afortunados según el orden creciente de primoriales. El inconveniente, nada grave con una hoja de cálculo, es que resultarán desordenados y duplicados, pues existen soluciones iguales para distintos órdenes. Probamos con este tipo de búsqueda. Usaremos la siguiente función:

Function fortune(n)
dim i,k,p,q,j

k=0
j=2
p=1
for i=1 to n
p=p*j ‘Los primoriales se van formando en la variable ***p***
j=primprox(j) ‘Se añade un nuevo primo
next i
q=primprox(p+1)-p ‘Se restan el siguiente primo y el primorial
if esprimo(q) then k=q ‘Si la diferencia es prima, ***q*** es afortunado***.***
fortune=k
end function

La función devuelve un cero si el primo buscado no es afortunado o un número primo si lo es. Con ella podemos descubrir los primeros números de Fortune. Solo podemos llegar al orden 9 porque se produce desbordamiento:

Orden	Núm. Fortune
1	3
2	5
3	7
4	13
5	23
6	17
7	19
8	23
9	37

Están publicados en http://oeis.org/A005235 de forma no ordenada y con duplicados: 3, 5, 7, 13, 23, 17, 19, 23, 37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79, 151, 197, 101, 103, …

Para retardar el desbordamiento podemos usar la versión en PARI:

```
fortune(n)=my(k=0,j=2,p=1);for(i=1,n,p=p*j;j=nextpri
me(j));q=nextprime(p+1)-q;if(isprime(q),k=q);k
print(fortune(4))
```

Este sería el resultado:

```
1, 3
2, 5
3, 7
4, 13
5, 23
6, 17
7, 19
8, 23
9, 37
10, 61
11, 67
12, 61
13, 71
14, 47
15, 107
16, 59
17, 61
18, 109
19, 89
20, 103
? _
```

No parece que el tema dé para más con las herramientas de cálculo que usamos. Si consultas el tema en otras páginas descubrirás que es una cuestión limitada.

CADENAS DE CUNNINGHAM.

Este estudio se dedica a explicar los procedimientos para estudiar las cadenas de Cunningham con ayuda de la hoja de cálculo y del lenguaje PARI. Su definición y propiedades las puedes consultar en

https://es.m.wikipedia.org/wiki/Cadena_de_Cunningham

Para comenzar nuestro trabajo, solo necesitamos conocer la generación de una cadena de este tipo:

- Elegimos un número primo cualquiera.
- Lo sometemos a la recurrencia $p_{i+1} = 2p_i + 1$ (cadena de Cunnigham de primera especie) o bien a la recurrencia $p_{i+1} = 2p_i - 1$ (cadena de Cunningham de segunda especie).
- Interrumpimos la recurrencia cuando el resultado no sea primo.

Aquí solo estudiaremos las cadenas de primera especie, porque contienen las propiedades más interesantes.

Todos los elementos de una de estas cadenas serán primos de Sophie Germain salvo el último y todos serán primos *seguros* salvo el primero.

(Ver
https://es.m.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo_de_Sophie_Germain
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Safe_prime)

Una cadena de este tipo se llama completa si no se puede prolongar más, tanto con términos mayores como menores. Esas son las que estudiaremos aquí.

Es fácil ver que el primer término no ha de ser “primo seguro”, pues (p-1)/2 no pertenece a la cadena y no es primo. Igualmente, el último no puede ser de Sophie Germain, porque 2p+1 no será primo.

En primer lugar crearemos una función que nos devuelva la cadena de Cunningham que se puede generar a partir un número primo, aunque este no sea el origen de una cadena completa, por ser a su vez generado por otro primo anterior. La función posee este código:

Function cunningham$(p)
Dim s$
Dim m

s$ = "" ‘Esta variable recibirá la cadena en modo texto
If esprimo(p) Then ‘Solo se trabaja con primos

m = 2 * p + 1 ‘Primer paso en la iteración
While esprimo(m) ‘Mientras sea primo, se continua
s$ = s$ + Str$(m) ‘Se recogen los elementos de la cadena
m = 2 * m + 1
Wend
End If
cunningham = s
End Function

Con esta función es fácil ver si un número primo produce una cadena de al menos dos elementos. Los primeros resultados son:

Inicio	Cadena
2	5 11 23 47
3	7
5	11 23 47
11	23 47
23	47
29	59
41	83 167
53	107
83	167
89	179 359 719 1439 2879

En esta tabla observamos algún detalle interesante:
Los inicios 2, 3, 5, 11, 23, …, como era de esperar, son primos de Sophie Germain, en los que si p es primo,

2p+1 también lo es. Los tienes en

http://oeis.org/A005384.

Los finales de cadena son primos que no pertenecen a ese tipo, como el 7 y el 47. Vemos en la tabla cierres con 47, 107 o 167.

Las cadenas se solapan, porque 11 pertenece a una y genera otra. Para evitar esto, la condición de que el número inicial sea primo habrá de ser completada con la de que (p-1)/2 no lo sea (*And Not esprimo((p - 1) / 2)*). De esa forma crearemos cadenas completas, sin solapamientos. Añadimos esa condición a la función y obtenemos:

Inicio	Cadena
2	5 11 23 47
3	7
29	59
41	83 167
53	107
89	179 359 719 1439 2879
113	227
131	263
173	347
191	383
233	467
239	479
251	503
281	563
293	587
419	839

Ahora ya sí tenemos cadenas completas, en las que según la teoría, los inicios son primos de Sophie Germain pero no primos seguros, que es la condición que habrás leído en la teoría.

Estos inicios de cadenas los tienes en http://oeis.org/A059453.

Llama la atención que muchas cadenas solo tienen dos elementos. Para estudiar sus longitudes bastará cambiar el código de la función, de forma que devuelva esa variable. Podemos asignar un 0 a los números que no son posibles inicios y después, con el mismo algoritmo, devolver las longitudes de las cadenas en lugar de su contenido.

El nuevo código sería:

Function lcunningham$(p)
Dim s
Dim m

If esprimo(p) And Not esprimo((p - 1) / 2) Then
s = 1
m = 2 * p + 1

```
While esprimo(m)
s = s + 1
m = 2 * m + 1
Wend
End If
lcunningham = s
End Function
```

Ahora la variable ***s*** cuenta los elementos en lugar de incorporarlos al texto. La nueva tabla sería esta:

Inicio	Longitud
2	5
3	2
29	2
41	3
53	2
89	6
113	2
131	2
173	2
191	2
233	2
239	2
251	2
281	2
293	2

Para estadísticas y clasificaciones es más útil que la que devuelve un texto. La podemos traducir a PARI.

lc(p)=my(c=0,m=2*p+1);if(p==2,c=5,if(isprime(p)&&!isprime((p-1)/2),c=1;while(isprime(m),c+=1;m=2*m+1)));c

Aquí asignamos un 5 al valor 2, para sacarlo del algoritmo general, y el resto es traducción del lenguaje de Excel.

Los inicios de la tabla anterior se pueden reproducir con ***forprime(n=2,500,if(lc(n)>=2,print1(n,", ")))***

Así resultan los primeros inicios:
2, 3, 29, 41, 53, 89, 113, 131, 173, 191, 233, 239, 251, 281, 293, 419, 431, 443, 491, …

Sustituyendo lc(n)>=2 por otras condiciones, como lc(n)==2, lc(n)==3, lc(n)<5…podemos clasificar las cadenas según su longitud. Esto ya está estudiado, por lo que nos limitaremos a comprobar algunos resultados:

lc(n)==3

Nos resultan las cadenas de longitud 3, con inicios
41, 1031, 1451, 1481, 1511, 1811, 1889, 1901, 1931, 3449, 3491, 3821, 3911, …

Están recogidos en http://oeis.org/A059762.

Ic(n)==5

2, 53639, 53849, 61409, 66749, 143609, 167729, 186149, 206369, 268049, 296099, 340919, 422069, 446609,

Observamos que entre 2 y 50000 no hay soluciones. Puedes estudiar estos números en

http://oeis.org/A059764.

Si cambiamos la condición, es posible que los resultados no estén publicados.

Ic(n)>=4

2, 89, 509, 1229, 1409, 2699, 3539, 6449, 10589, 11549, 11909, 12119, 17159, 19709, 19889, 22349, 26189, 27479, 30389, 43649, …

En efecto, al menos en OEIS no se recoge esta sucesión. No seguimos, porque se reduciría a una casuística.

Parece ser que se ha llegado a encontrar cadenas de 13 elementos (en el momento de escribir esto probablemente se habrá sobrepasado este número).
Con nuestras herramientas podemos encontrar los primeros números que son inicios de cadenas de longitud ocho. Los primeros son 19099919 y 52554569.

Con la función *cunningham* podemos encontrar esas cadenas:

19099919, 38199839, 76399679, 152799359, 305598719, 611197439, 1222394879, 2444789759.
52554569, 105109139, 210218279, 420436559, 840873119, 1681746239, 3363492479, 6726984959.

También hemos encontrado la primera cadena con nueve elementos:

85864769, 171729539, 343459079, 686918159, 1373836319, 2747672639, 5495345279, 10990690559, 21981381119.

Con hoja de cálculo no llegaremos más allá.

Estadísticas

Es curioso que el número de cadenas por intervalos se mantiene casi constante. En la siguiente tabla hemos estudiado intervalos de 5000 números, tomando nota del número de cadenas y el promedio de sus longitudes:

Total de cadenas y longitud media

De 1 a 5000	597	1,20771
De 5001 a 10000	517	1,15474
De 10001 a 15000	481	1,18087
15001 a 20000	477	1,15304
20001 a 25000	462	1,13853
25001 a 30000	446	1,06867
30001 a 35000	458	1,12664
35001 a 40000	439	1,14806
40001 a 45000	433	1,13857
45001 a 50000	432	1,12269

Observamos una gran semejanza en los datos, con ligera tendencia a disminuir.

Se observa la misma tendencia si los intervalos tienen longitud 50000:

De 50000 en 50000

De 2 a 50000	4742	1,15099

De 50001 a 100000	4180	1,13254
De 100001 a 150000	4005	1,12784
150001 a 200000	3886	1,11863

Se deja como propuesta comparar estos datos con las distribuciones de números primos y de los de Sophie Germain.

TIPOS DE PRIMOS Y CURIOSIDADES

DOS BÚSQUEDAS DE PRIMOS

(a) Sólo existen dos números de cinco cifras que cumplen

- Son capicúas
- Son primos
- La suma de sus dígitos coincide con la suma de los dígitos de sus cuadrados. Esa suma es la misma en ambas soluciones.

¡A por ellos!

(b)

Sólo existe un número primo de cuatro cifras que cumple que si sumamos el número primo anterior a él con el posterior, la suma es divisible por 7, por 11 y por 13.

Si exigimos que también sea divisible entre 3, hay que irse a cinco cifras, y ahí se encuentran varias soluciones, entre ellas dos que también producen un múltiplo de 5.

A ver qué encuentras.

Soluciones

(a)

77977	37	6080412529	37
97579	37	9521661241	37

(b)

Solución 4003 y de cinco cifras 24023, 30029, 42043, 51047, 87083, 90089 y 99103

24023	48048
30029	60060
42043	84084
51047	102102
87083	174174
90089	180180
99103	198198

UNO DE OLIMPIADAS

Hoy toca proponer un problema de olimpiadas matemáticas. No es difícil:

Probar que existen infinitos valores enteros de a que cumplen esta propiedad: La expresión n^4+a siendo n un número natural cualquiera nunca produce un número primo.

Solución

El valor de **a** debe ser independiente de **n**, por lo que probamos números que se basen en otra variable, por ejemplo **k**. Por razones de simetría podemos probar con **a=4k⁴** para k>1, y esto nos da la solución: sumamos y restamos $4n^2k^2$ y obtenemos:

$n^4+4k^4+4n^2k^2-4n^2k^2 = (n^2+2k^2)^2 – (2nk)^2 = (n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)$

lo que nos demuestra que $n^4 + a$ se puede descomponer en un producto de dos factores. Ahora hay que asegurarse de que el segundo no sea igual a 1, para poder afirmar que es compuesto:

$n^2+2k^2-2nk = (n-k)^2+k^2 >= k^2 > 1$

Luego existen infinitos valores de **a** para los que $\mathbf{n^4+a}$ es compuesto.

PRIMOS Y SUMA O DIFERENCIA DE CUADRADOS

Muchas entradas de mi blog se inician en los cálculos sobre fechas que publico en Twitter. El día 28/4/18 presentaba la propiedad de que $28418=23^2+167^2=43^2+163^2$, es decir, que 28418 equivale a una suma de cuadrados de números primos de dos formas distintas. Si en esta igualdad de sumas transponemos cuadrados, se convierte en la igualdad de diferencias. Así, $167^2-163^2=43^2-23^2$, y $167^2-43^2=163^2-23^2$.

Estudiaremos en este capítulo qué números equivalen a la suma de cuadrados de números primos y separadamente, los que equivalen a diferencias, en ambos casos de dos o más formas distintas. Terminaremos el estudio con algunas relaciones entre ambos.

Así que las equivalencias entre sumas y las diferencias, como es evidente, están relacionadas. Esto excluye al número primo 2, por lo que en lo que sigue sólo intervendrán primos impares. Comenzamos con la suma de cuadrados.

Números equivalentes a dos sumas de cuadrados de primos

Estos números están publicados en
http://oeis.org/A226539

338, 410, 578, 650, 890, 1010, 1130, 1490, 1730, 1802, 1898, 1970, 2330, 2378, 2738, 3050, 3170, 3530, 3650, 3842, 3890, 4010, 4658, 4850, 5018, 5090, 5162, 5402, 5450, 5570, 5618, 5690, 5858, 6170, 6410, 6530, 6698, 7010, 7178, 7202, 7250, 7850, 7970, …

Como en mi blog se usa la hoja de cálculo, se puede intentar reproducirlos con una función apropiada en el Basic de Excel o LibreOffice Calc. Puede ser la siguiente, en la que **n** es el número a analizar y **k** el número de sumas de cuadrados de primos que sean equivalentes. El resultado es el listado, en forma de cadena de texto, de los primos de cada par o la palabra **"NO"** si no existen soluciones.

```
public function sumaprimcuad$(n,k)
dim  b, c,i,m
dim ca$

ca="" ‘Cadena vacía que recibirá las soluciones
m=0 ‘Contador de soluciones
b=sqr(n/2) ‘Tope para ensayar primos
for i=1 to b ‘La variable i recorre los valores de los primos
if esprimo(i) then
c=int(sqr(n-i^2+1e-5)) ‘Se investigará si el segundo sumando es primo
if esprimo(c) and i^2+c^2=n then m=m+1: ca$=ca$+" "+ajusta(i)+" "+ajusta(c)+" & "
end if ‘Si hay solución se incrementa m y se copia en ca$
next i
if m=k then sumaprimcuad=ca else sumaprimcuad="NO"
end function
```

Aplicando esta función a un bucle de búsqueda se obtienen las primeras soluciones para el caso k=2, que es el que nos interesa en este estudio. Cada solución viene acompañada de sus dos pares de primos:

338   7 17 & 13 13 &
410   7 19 & 11 17 &

578   7 23 & 17 17 &
650   11 23 & 17 19 &
890   7 29 & 19 23 &
1010 7 31 & 13 29 &
1130 13 31 & 17 29 &
1490 11 37 & 23 31 &
1730 7 41 & 19 37 &
1802 11 41 & 29 31 &
1898 7 43 & 23 37 &
1970 11 43 & 17 41 &
2330 11 47 & 31 37 &
2378 13 47 & 23 43 &
2738 23 47 & 37 37 &

Coinciden con los primeros publicados en OEIS. Llama la atención ver que alguna de las soluciones contiene primos repetidos, como la última, en la que se repite el 37.

La ventaja de disponer de una función es que la podemos aplicar a números grandes sin tener que recorrer los previos.

Factores primos de las soluciones

A la lista de los primeros números encontrados hemos añadido más abajo las dos sumas de cuadrados de primos y la descomposición factorial. Esta última es interesante porque de ella depende que existan dos o más descomposiciones en suma de cuadrados (sean o no de primos). En una entrada antigua de mi blog reproducíamos la fórmula de Gauss para contar esas sumas.

http://hojaynumeros.blogspot.com/2010/10/en-cuantas-sumas-de-cuadrados-2-de-5.html

En ella se exigía que si figuran primos del tipo 4k+3, estos estuvieran elevados al cuadrado. En el listado de más abajo observamos que esto ocurre en 338, que contiene 13 al cuadrado, y en 578, con el cuadrado de 17:

338 7 17 & 13 13 & [2,1][13,2]
410 7 19 & 11 17 & [2,1][5,1][41,1]
578 7 23 & 17 17 & [2,1][17,2]
650 11 23 & 17 19 & [2,1][5,2][13,1]
890 7 29 & 19 23 & [2,1][5,1][89,1]
1010 7 31 & 13 29 & [2,1][5,1][101,1]

1130 13 31 & 17 29 & [2,1][5,1][113,1]
1490 11 37 & 23 31 & [2,1][5,1][149,1]
1730 7 41 & 19 37 & [2,1][5,1][173,1]
1802 11 41 & 29 31 & [2,1][17,1][53,1]
1898 7 43 & 23 37 & [2,1][13,1][73,1]
1970 11 43 & 17 41 & [2,1][5,1][197,1]
2330 11 47 & 31 37 & [2,1][5,1][233,1]
2378 13 47 & 23 43 & [2,1][29,1][41,1]
2738 23 47 & 37 37 & [2,1][37,2]
3050 29 47 & 37 41 & [2,1][5,2][61,1]
3170 19 53 & 31 47 & [2,1][5,1][317,1]
3530 7 59 & 41 43 & [2,1][5,1][353,1]
3650 13 59 & 29 53 & [2,1][5,2][73,1]
3842 11 61 & 19 59 & [2,1][17,1][113,1]
3890 13 61 & 41 47 & [2,1][5,1][389,1]
4010 17 61 & 23 59 & [2,1][5,1][401,1]
4658 13 67 & 43 53 & [2,1][17,1][137,1]

Se observa que aparte del factor 2, presente por ser números pares, el resto, suele tener otros dos factores, ya sean repetidos, como en $2738=2*37^2$, o bien distintos, como en el caso de 2378=2*29*41. Hay otros, y eso los hace interesantes, que poseen tres factores más, como $3050=2*5^2*61$. En estos casos aparecerán nuevas sumas de cuadrados, pero ya no tienen que tener base prima.

En efecto, 3050=29²+47²=37²+41²=5²+55²

La última suma es claramente de bases no primas, que no intervienen en la cuestión que estamos estudiando. Podemos pa
sar esta función a PARI, y obtener así un listado más compacto de las soluciones:

for(n=2,10000,m=0;b=sqrt(n/2);for(i=2,b,if(isprime(i), c=truncate(sqrt(n-i^2+1e-5));if(isprime(c)&&(i^2+c^2==n),m+=1)));if(m==2,print1(n,", ")))

Con este código se pueden obtener los números desde el 2 hasta el 10000 contenidos en
http://oeis.org/A226539

```
338, 410, 578, 650, 890, 1010, 1130, 1490, 1730, 1802, 1898, 1970, 2330, 2378, 2
738, 3050, 3170, 3530, 3650, 3842, 3890, 4010, 4658, 4850, 5018, 5090, 5162, 540
2, 5450, 5570, 5618, 5690, 5858, 6170, 6410, 6530, 6698, 7010, 7178, 7202, 7250,
 7850, 7970, 8090, 8210, 8450, 8762, 9050, 9530, 9698, 9770,
?
```

Números con tres descomposiciones

Si en la función dada hacemos k=3 obtendremos los números que admiten su descomposición en tres sumas de cuadrados de números primos. Puedes intentarlo con la herramienta referida. Los primeros casos son:

2210 19 43 & 23 41 & 29 37 &
3770 7 61 & 17 59 & 31 53 &
5330 17 71 & 29 67 & 43 59 &
6290 7 79 & 31 73 & 53 59 &

Están publicados en http://oeis.org/A226562

2210, 3770, 5330, 6290, 12818, 16490, 18122, 19370, 24050, 24650, 26690, 32810, 33410, 34970, 36530, 39650, 39770, 44642, 45050, 45890, 49010, 50690, 51578, 57770, 59450, 61610, 63050, 66170, 67490, 72410, 73610, 74210, 80330, 85202, 86210, 86330, 88010, ...

Podríamos seguir con los que admiten cuatro descomposiciones o más, pero lo dejamos como ejercicio, que no es difícil disponiendo de la función que hemos presentado.

Diferencias de cuadrados

En el caso de buscar números que sean equivalentes a dos diferencias de cuadrados de números primos es más sencillo usar la diferencia k entre dos de esos primos. Incluimos un desarrollo algebraico que le da ese protagonismo a esa diferencia k.

Partimos de una suma por diferencia como equivalente a la diferencia de cuadrados. Si $m=(a+b)(a-b)$. sustituyendo a por $x+k$ y b por x, llamando k a la diferencia $a-b$, queda:

$m=(x+k+x)(x+k-x)=(2x+k)k$.

El valor mínimo de k es 2, ya que sería el caso de primos gemelos, luego $k>=2$ siempre será par, puesto que hemos excluido el número primo 2.

Por otra parte, $2x+k$ es un divisor propio de m, y también par, luego será menor o igual que $m/2$, y, a su vez, m será múltiplo de 4. Sólo los múltiplos de 4 pueden presentar la propiedad requerida.

$2x+k=m/k<=m/2$, luego x ha de ser menor o igual que $m/4$ y $x+k<=m/4+k$

Así queda el valor de x en función de k: x=(m/k-k)/2
Luego podemos construir el bucle de búsqueda con k entre los divisores pares de m, a fin de que sea entero m/(2*k).

Para cada valor de k, par, vemos si es divisor de m y entonces buscamos entre los impares, de x=3 hasta x=m/4 los que sean primos y también lo sea x+k

Estas consideraciones nos llevan a la siguiente función, en la que dados un número natural n y un número k de diferencias de cuadrados de primos, nos indica si ese número equivale a esas diferencias o no:

public function difeprimcuad$(n,k)
dim b, c,i,m,d
dim ca$

if n/4<>n\4 then difeprimcuad="NO":Exit function ‘Ha de ser múltiplo de 4
ca="" ‘Recogerá las soluciones en modo texto
m=0 ‘Contador de soluciones
b=int(sqr(n))+1 ‘Valor mínimo para el primer primo
d=int(n/4+2) ‘Valor máximo ***for i=b to d***

if esprimo(i) then ‘El minuendo de la diferencia ha de ser primo

c=int(sqr(i^2-n+1e-5)) ‘Posible sustraendo

if esprimo(c) and i^2=n+c^2 then m=m+1: ca$=ca$+" "+ajusta(i)+" "+ajusta(c)+" & "

‘Hay una solución más. Se recoge en **ca$** y se incrementa el contador **m**

end if

next i

if m=k then difeprimcuad=ca else difeprimcuad="NO" ‘Si hay k soluciones, se recogen.

end function

Con esta función y un bucle de búsqueda obtenemos las primeras soluciones, acompañadas de las diferencias de cuadrados de primos que admiten:

72	11 7 & 19 17 &
360	23 13 & 47 43 &
432	31 23 & 109 107 &
528	37 29 & 47 41 &
768	67 61 & 193 191 &
888	43 31 & 113 109 &
960	53 43 & 241 239 &
1032	89 83 & 131 127 &
1080	37 17 & 271 269 &

1128 53 41 & 283 281 &
1272 59 47 & 109 103 &
1392 41 17 & 349 347 &
1488 43 19 & 97 89 &
1512 41 13 & 61 47 &
1608 73 61 & 137 131 &
1632 41 7 & 59 43 &
1728 43 11 & 433 431 &
1920 47 17 & 163 157 &

Están publicadas en http://oeis.org/A090788
72, 360, 432, 528, 768, 888, 960, 1032, 1080, 1128, 1272, 1392, 1488, 1512, 1608, 1632, 1728, 1920, 2088, 2112, 2232, 2352, 2400, 2448, 2568, 2688, 2808, 3048, 3168, 3240, 3288, 3480, 3648, 3768, 4008, 4032, 4128, 4248, 4272, 4392, 4488, 4512, 4992.

Con este código PARI, inspirado en la función anterior, se reproduce el resultado.

```
i=4; while(i<=5000, k=0; m=2; while(m*m<=i,
if(i%(2*m)==0, a=(i/m-m)/2; b=a+m;
if(isprime(a)&&isprime(b), k+=1)); m+=2); if(k==2,
print1(i, ", ")); i+=4)
```

72, 360, 432, 528, 768, 888, 960, 1032, 1080, 1128, 1272, 1392, 1488, 1512, 1608, 1632, 1728, 1920, 2088, 2112, 2232, 2352, 2400, 2448, 2568, 2688, 2808, 3048, 3168, 3240, 3288, 3480, 3648, 3768, 4008, 4032, 4128, 4248, 4272, 4392, 4488, 4512, 4992,

Por mera curiosidad, se incluyen a continuación los números que cumplen ser diferencia de cuadrados de primos de tres formas distintas. Basta sustituir k=2 en la función por k=3:

120 13 7 & 17 13 & 31 29 &
168 17 11 & 23 19 & 43 41 &
312 19 7 & 29 23 & 41 37 &
408 23 11 & 37 31 & 103 101 &
480 23 7 & 29 19 & 43 37 &
552 29 17 & 71 67 & 139 137 &
600 31 19 & 53 47 & 151 149 &
672 29 13 & 31 17 & 59 53 &
720 29 11 & 41 31 & 181 179 &
1008 37 19 & 43 29 & 67 59 &
1200 37 13 & 79 71 & 103 97 &
1800 43 7 & 59 41 & 227 223 &
2160 47 7 & 113 103 & 139 131 &
2472 109 97 & 311 307 & 619 617 &
2832 71 47 & 181 173 & 239 233 &
2880 61 29 & 89 71 & 149 139 &
3312 59 13 & 101 83 & 829 827 &
3672 61 7 & 71 37 & 461 457 &

4560 79 41 & 107 83 & 233 223 &
5040 73 17 & 83 43 & 149 131 &
5640 109 79 & 151 131 & 241 229 &
6120 79 11 & 103 67 & 107 73 &
6480 101 61 & 409 401 & 1621 1619 &
6528 83 19 & 113 79 & 547 541 &
7248 163 139 & 457 449 & 607 601 &
7320 137 107 & 193 173 & 613 607 &
7752 89 13 & 131 97 & 971 967 &
7872 89 7 & 139 107 & 659 653 &
8160 109 61 & 137 103 & 683 677 &
8352 101 43 & 241 223 & 2089 2087 &
8400 103 47 & 109 59 & 307 293 &

Puedes seguir con la cuestión para cuatro, cinco o seis diferencias. Basta cambiar la última condición k=2 en Basic o k==2 en PARI. En las siguientes sucesiones de OEIS tienes los listados:

http://oeis.org/A090782
http://oeis.org/A092000
http://oeis.org/A092001
http://oeis.org/A092002

Hay más, pero con estos ejemplos basta. Puedes indagar los casos de siete, ocho o más.

Correspondencias entre los que son suma y sus correspondientes diferencias:

Una cuestión curiosa es la extraer casos de la primera parte de este estudio, sumas de cuadrados de primos, con los de la segunda, de diferencias de primos. Lo vemos con un ejemplo concreto:

$410=19^2+7^2=17^2+11^2$

Al ser distintos los sumandos, transponiendo términos, surgen dos grupos de diferencias iguales: $19^2-17^2=11^2-7^2=72$

$19^2-11^2=17^2-7^2=240$

Así que del número 410, equivalente a dos sumas de primos distintos, obtenemos otros dos números, 72 y 240, que pertenecen a los casos de diferencias de cuadrados de primos. Ocurre también el hecho contrario, que de 72 o 240, transponiendo términos, podemos obtener un caso de suma de cuadrados de primos. La correspondencia es múltiple y no siempre recíproca, por lo que sólo podemos constatar qué números de un grupo se relacionan con el otro.

No se incluyen los listados que se han usado para establecer correspondencias entre un conjunto y otro. En este listado se pueden apreciar los casos de diferencias de cuadrados de primos que se extraen de los de sumas múltiples de cuadrados

Correspondencias entre los que son suma y sus correspondientes diferencias:

338	120	120
410	240	72
578	240	240
650	240	168
890	480	312
1010	792	120
1130	672	120
1490	840	408
1730	1320	312
1802	840	720
1898	1320	480

Por ejemplo, $1730=41^2+7^2=37^2+19^2$, y transponiendo términos:

$41^2-19^2=37^2-7^2=1320$

Y también

$41^2-37^2=19^2-7^2=312$

Podemos seguir las rutas opuestas, desde los que son diferencia de cuadrados a las correspondientes sumas. Por ejemplo, $72=11^2-7^2=19^2-17^2$ y transponiendo:

$11^2+17^2=7^2+19^2=410$, que pertenece a nuestro primer listado.

Aunque las correspondencias no son biunívocas, con paciencia se pueden construir cadenas. Lo dejamos ahí.

PRODUCTOS CÍCLICOS CON NÚMEROS PRIMOS:

Hace unos meses estudiamos el tipo de expresión N=a*b + b*c + c*a, a la que llamamos "productos cíclicos". Puedes leerla en https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/03/productos-ciclicos.html

En esa entrada se estudió la unicidad de esta representación para algunos números y aquellos otros que no la admiten para ningún valor. Llegamos a algunas sucesiones finitas ya publicadas. En esta de hoy nos limitaremos al uso de tres números primos distintos.

De entrada se puede razonar que todos los números que consideraremos serán impares, ya que si en a*b + b*c + c*a, a, b y c son primos, puede ocurrir que uno de ellos sea 2, con lo que se sumarán dos productos pares y uno impar, y si ninguno es igual a 2, los tres sumandos serán impares, y también la suma lo será.

En las búsquedas previas que hemos emprendido se ha visto que existen muchos casos distintos en unicidad y número de soluciones. Por ello diseñaremos una función similar a la usada en la entrada enlazada, *Function prodciclo$(n)*, pero que solo admita factores primos distintos y que devuelva los ciclos encontrados y el número de ellos. De esta forma podremos establecer las búsquedas que deseemos. La denominaremos *prodcicloprim$.* Su esquema es parecido a la anterior, ya que recorremos todos los primos posibles, y de cada par calculamos el tercero a partir de N. Si resulta ser entero, primo y menor que los otros dos, ya hemos encontrado los tres primos buscados. En ese caso se recoge el resultado y se van contando las soluciones, Su algoritmo en VBasic de Excel puede ser:

Public Function prodcicloprim$(n)
Dim s$
Dim i, j, k, m

s$ = "": m = 0   ‘**s$** recogerá resultados y **m** los contará
For i = 2 To (n - 2) / 2 ‘Primer primo
If esprimo(i) Then
j = 2
While j < i And j < n / i ‘Segundo primo
If esprimo(j) Then
k = (n - i * j) / (i + j) ‘Tercer posible primo
‘Si **k** cumple los requisitos, lo incorporamos a la solución e incrementamos el contador **m**
If k = Int(k) And k < j And esprimo(k) Then m = m + 1:
s$ = s$ + " -- " + Str$(i) + Str$(j) + Str$(k) + " "
End If
j = j + 1
Wend
End If
Next i

```
If s$ <> "" Then prodcicloprim = Str$(m) + " " + s$ Else prodcicloprim = "NO"
End Function
```

Con esta función podremos buscar los números que permiten esta descomposición. Bastará que la misma no devuelva “NO”. También podremos contar soluciones, ya que la respuesta comienza con ese número. Por ejemplo:

prodcicloprim(191)= 4 -- 13 7 5 -- 13 11 2 -- 17 7 3 -- 37 3 2

Esta respuesta nos indica que existen 4 soluciones, que son

191=13*7+7*5+5*13
191=13*11+11*2+2*13
191=17*7+7*3+3*17
191=37*3+3*2+2*37

Con un poco de experiencia en búsquedas se le puede sacar mucho partido a esta respuesta. Según las necesidades, podemos alterar el código para que solo nos devuelva el número de soluciones, o solo estas. Ya dependerá de nuestros intereses. Por ejemplo, el día

10/01/20 publiqué en Twitter que 311 es el primer número que admite ocho descomposiciones de este tipo:

311 es el menor número que es igual a ocho expresiones de la forma pq+qr+rp, con p, q y r primos distintos:

311=13×11+11×7+7×13
311=17×13+13×3+3×17
311=19×13+13×2+2×19
311=23×7+7×5+5×23
311=29×7+7×3+3×29
311=37×5+5×3+3×37
311=43×5+5×2+2×43
311=61×3+3×2+2×61

Con esta función emprenderemos las búsquedas que deseemos:

Números que admiten al menos una representación de este tipo

Exigimos que **prodcicloprim** sea distinta de “NO”:

Nos resulta una sucesión que ya está publicada:

31	1 -- 5 3 2		
41	1 -- 7 3 2		
59	1 -- 7 5 2		
61	1 -- 11 3 2		
71	2 -- 7 5 3	-- 13 3 2	
87	1 -- 11 5 2		
91	1 -- 17 3 2		
101	2 -- 13 5 2	-- 19 3 2	
103	1 -- 11 5 3		
113	1 -- 11 7 2		
119	1 -- 13 5 3		
121	1 -- 23 3 2		
129	1 -- 17 5 2		
131	2 -- 11 7 3	-- 13 7 2	
143	1 -- 19 5 2		
151	3 -- 13 7 3	-- 17 5 3	-- 29 3 2
161	1 -- 31 3 2		
167	3 -- 11 7 5	-- 17 7 2	-- 19 5 3

En la tabla figuran los primeros números que admiten la expresión y junto a ellos el número de soluciones y los primos correspondientes. Vemos números con una, dos o tres representaciones. En cuanto se avanza algo más aparecen más casos múltiples, como el citado 311.

Puedes consultar http://oeis.org/A238397

Números que no admiten esta descomposición

Si buscamos los números en los que el resultado es “NO” obtendremos la lista de los que no se pueden descomponer de esta forma. Sería la complementaria de la anterior. Podríamos rotular estos números como de categoría 0, ya que no admiten ninguna representación cíclica de tres primos, y a los demás les podemos asignar la categoría según el número de representaciones. Así tendríamos estas categorías:

Categoría 0: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, (faltaría el 31) 32, 33, …

Categoría 1: 31, 41, 59, 61, 87, 91, 103, 113, 119, 121, 129, 143, 161, 171, …

Categoría 2: 71, 101, 131, 211, 221, 269, 271, 343, 359, 391, 401, 423, 437, 439, 451, 471, …

Los primeros números del resto de categorías son:

3	151
4	191
5	491
6	671
7	887
8	311
9	1151

Para la categoría 10 no existe ningún caso inferior a 25000.

NÚMEROS PRIMOS DEL TIPO HP

Como es costumbre en mi blog, se extraen temas de los cálculos que publicamos en Twitter @connumeros. El día 31/01/2023, estudiando el número 31123 vimos que OEIS lo calificaba como *homeprime* con cuatro orígenes. Mantengo esta denominación en inglés porque no he encontrado traducción adecuada. Lo que sigue no tiene un gran interés matemático, pero supone un cierto esfuerzo en la búsqueda de algoritmos y su codificación.

La idea para estos números es la siguiente: Dado un número compuesto cualquiera, como por ejemplo, 42, lo descomponemos en factores primos y los concatenamos de menor a mayor para formar otro número (en base 10). En este caso, 42=2*3*7, luego concatenamos y llegamos a 237. Si existen primos repetidos, no usamos exponentes, sino que los mantenemos repetidos. Por ejemplo, $24=2^3*3$ lo convertimos en 2223. Si el resultado es compuesto, como es el caso de 237=3*79, lo convertimos en 379. Así seguimos hasta llegar a un primo. Este sería el caso de 379, luego sería *home prime*, y lo podemos representar como HP(42). Un número primo p cumplirá HP(p)=p.

Esto es un entretenimiento sin más trascendencia, publicado por primera vez por Jeffrey Heleen en 1990. Al experimentar con esta idea se descubrió que era un algoritmo que podía dar más juego de lo esperado. Por ejemplo, la función HP no es biunívoca. Puedes comprobar que 379 es imagen de tres números compuestos distintos: 42, 74, 237 y el mismo 379. Esto es lo que parece ocurrir con el número 31123, que posee cuatro oígenes. Lo iremos descubriendo paso a paso.

Algoritmo básico

Podemos idear una función para la operación básica de concatenar factores, y luego pasaremos a reiterarla.

Para hoja de cálculo

La hoja más usada, Excel, presenta el problema de que al representar un número mediante texto le añade un espacio en blanco. Por eso solemos usar en mi blog la función *ajusta*, que le elimina ese carácter si ha lugar. La hemos usado varias veces aquí.

Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a) ‘Convierte el número en texto
While Left$(d$, 1) = " " ‘Va eliminando espacios en blanco

d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1)
Wend
ajusta$ = d$
End Function

Con ella podemos concatenar caracteres sin problema. A continuación, vemos la operación básica de concatenar factores primos:

Function concfactores(n)

Dim f, a
Dim s$

s = "" ‘Se inicia una cadena de texto
a = n 'Copia el valor de n
f = 2 'Inicia el listado de primos
While f <= a 'Recorre los primos posibles
While a / f = a \ f
a = a / f: s = s + ajusta(f) ‘Si es factor, concatena
Wend
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 ‘Avanza a otro primo
Wend
concfactores = Val(s) ‘Convierte la concatenación en número
End Function

Podemos aplicar esta función a cualquiera de nuestros ejemplos, 42, 237, 74 o 379 para comprobar su funcionamiento. Por ejemplo, CONCFACTORES(144)= 222233.

Es fácil ver que esta operación no disminuye el valor de un número, por lo que si reiteramos, siempre nos encontraremos con una sucesión no decreciente.

Charles R Greathouse IV propone en OEIS un procedimiento PARI similar, pero que se aprovecha de que este lenguaje ya suministra el vector *factor* con los factores primos y sus exponentes, y solo hay que extraerlos y añadirlos a un **Str**. El final, con **eval(s)** lo convierte en número.

```
step(n)=my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~, for(j=1, f[i, 2], s=Str(s, f[i, 1]))); eval(s)
```

Si lo que deseamos es reproducir la función *concfactores* podemos usar este otro código, que no se apoya en la existencia del vector *factor*:

```
step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}
print(step(144))
```

Está preparado para concatenar los factores de 144, con el resultado de 222233.

Búsqueda del HP(p)

Con esta función ya podemos reiterar hasta llegar al primer primo, el *homeprime*:

Function hp(n)
Dim p, q, r
p = n ‘Copia n
q = 1 ‘Inicia variable auxiliar
Do ‘Bucle de búsqueda
r = p
p = concfactores(p) ‘Da un paso de concatenación
q = p
Loop Until r = q ‘Si son iguales, es que es primo. Final.
hp = p
End Function

Esta función es útil si las iteraciones no llegan muy lejos, pues se entra en la zona en la que las hojas de cálculo pierden exactitud. Probamos con algunos ejemplos:

24	331319
33	311
18	233
220	22511
222	#¡VALOR!

Observamos que, mientras los primeros llegan al *homeprime* sin problemas, el 222 sobrepasa la posibilidades de Excel. Podemos seguir sus trayectorias paso a paso:

24	2223	331319	331319	331319	331319
33	311	311	311	311	311
18	233	233	233	233	233
220	22511	22511	22511	22511	22511
222	2337	33371313	311123771	7149317941	#¡VALOR!

Los primeros se van estabilizando hasta llegar a un número primo, pero el 222 sigue buscando hasta que sobrepasa la capacidad de cálculo.

Podemos traducir el algoritmo a PARI, que admite todas las cifras:

```
step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}
hp(n)={my(p=n,q=1);until(r==p,r=p;p=step(p);q=p);p}
print(hp(222))
```

Se conjetura que cada compuesto posee un *homeprime,* pero en algunos, como el 49, no se conoce el final del proceso. Tampoco se ha logrado en 77, 49, 146, 246, 312, 320…En nuestro equipo ha resultado difícil seguir el proceso para 222. Se ha llegado a estos pasos:

222, 2337, 31941, 33371313, 311123771, 7149317941, 22931219729, 112084656339, 3347911118189, 11613496501723, 97130517917327, …

El problema reside en la factorización, que puede llegar a ser inabordable.

Búsqueda de los orígenes

Nos queda un último trabajo, y es buscar los compuestos que terminan en un número primo dado, como el 31123 del primer ejemplo. Podíamos recorrer los compuestos menores que el primo, aplicarles la función **hp(n)** y comprobar si coincide con el primo estudiado, pero, como vimos en el párrafo anterior, el proceso se puede bloquear al llegar a ciertas factorizaciones.

Para evitar estos bloqueos, reproduciremos los pasos, pero parando el proceso si se sobrepasa el número primo dado. Con la siguiente función se resuelve el problema, aunque aumentamos algo la complejidad:

Function origenhp$(n)
Dim i, j, m
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de las soluciones
If esprimo(n) Then ‘Solo actúa sobre primos
For i = 4 To n – 1 ‘Recorre los posibles compuestos
m = 0 ‘Indicador de solución
j = concfactores(i) ‘Damos pasos hacia HP(i)
While j <= n And m = 0 ‘Nos detenemos al llegar a ***n***

If j = n Then s = s + Str$(i) + ", ": m = 1 ‘Hay un origen
If esprimo(j) Then m = 1 ‘Se llega a un primo menor que ***n***
If m = 0 Then j = concfactores(j) ‘Si no es solución, se avanza
Wend
Next i
End If
origenhp = s
End Function

Con este procedimiento encontraremos los orígenes de un presunto *homeprime*. Lo podemos aplicar a nuestro ejemplo de 379, y resultan los orígenes conocidos, a los que hay que añadir él mismo:

379
42, 74, 237,

Queda comprobado su funcionamiento. Ahora hay que volver al principio, y es ver qué tres orígenes tiene el número 31123. Tardará un poco en dar la solución, que es:

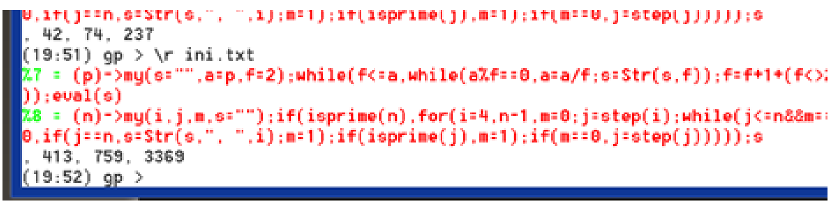
N	31123		
Orígenes	413, 759, 3369,		
	413	759	3369
HP orígenes	31123	31123	31123

Hemos resuleto el problema, los cuatro orígenes son 413, 759, 3369, 31123. En la cuarta fila se compruebas los tres primeros con la función HP. En la siguiente tabla vemos los pasos necesarios para llegar a 31123.

Pasos		
413	759	31123
759	31123	
3369	31123	

Para emprender otras vbúsquedas posibles, insertamos el código PARI que traduce este procedimiento:

```
step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}
origenhp(n)={my(i,j,m,s="");if(isprime(n),for(i=4,n-1,m=0;j=step(i);while(j<=n&&m==0,if(j==n,s=Str(s,", ",i);m=1);if(isprime(j),m=1);if(m==0,j=step(j)))));s}
print(origenhp(31123))
```



Esto ha sido una práctica sobre algoritmos, porque la cuestión carece de verdadero interés matemático, pero como tantas otras, es útil como pasatiempo y para pulir códigos. En nuestro caso, nos resultó interesante obviar las limitaciones de las hojas de cálculo en el tratamiento de números naturales grandes. Se logra a medias, porque con instrumentos más potentes siguen existiendo lagunas también.

PARES DE PRIMOS Y DIFERENCIAS DE CUADRADOS

En mis cálculos diarios en Twitter (@connumeros) me encontré por casualidad con cuatro primos con diferencias de cuadrados iguales, tanto de consecutivos como si los tomamos de forma alterna. Eran estos:

23, 43, 163 y 167

Sus diferencias de cuadrados iguales son dos:

167^2-163^2=43^2-23^2

167^2-43^2=163^2-23^2

Esto es porque 23^2+167^2=28418=43^2+163^2

Es evidente que la tercera forma de crear diferencias (cuarto con primero y tercero con segundo) no nos devolvería una igualdad.

Es esta una situación que se presta a crear métodos o algoritmos para la búsqueda de nuevos conjuntos de cuatro primos. No tiene más trascendencia el tema, y si no te atraen estas técnicas, no te servirá esto de mucho.

Uso de la hoja “Cartesius”

Lo primero que me planteé ante este ejemplo es la cuestión de si existirían muchos conjuntos similares del mismo tipo. No tenía ninguna opinión previa, por lo que acudí a mi hoja “Cartesius” para ver si había algo útil entre los primeros primos. Es una herramienta lenta, por lo que solo exploré hasta el número 61. Mi gran sorpresa fue que resultaron muchos ejemplos posibles para los primeros primos.

Este fue el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
7	11	17	19		72	72	240	240
7	13	13	17		120	120	120	120
7	13	29	31		120	120	792	792
7	17	17	23		240	240	240	240
7	17	59	61		240	240	3432	3432
7	19	23	29		312	312	480	480
7	19	37	41		312	312	1320	1320
7	23	37	43		480	480	1320	1320
7	31	53	61		912	912	2760	2760
7	41	43	59		1632	1632	1800	1800
11	17	19	23		168	168	240	240
11	17	41	43		168	168	1560	1560
11	19	59	61		240	240	3360	3360
11	23	31	37		408	408	840	840
11	29	31	41		720	720	840	840
11	31	37	47		840	840	1248	1248
13	17	29	31		120	120	672	672
13	23	43	47		360	360	1680	1680
13	29	53	59		672	672	2640	2640
13	41	47	61		1512	1512	2040	2040
17	23	59	61		240	240	3192	3192
17	31	53	59		672	672	2520	2520
19	23	41	43		168	168	1320	1320
19	29	37	43		480	480	1008	1008
19	31	47	53		600	600	1848	1848
23	29	37	41		312	312	840	840
23	37	37	47		840	840	840	840
29	37	41	47		528	528	840	840

En las primeras columnas figuran los cuatro primos en orden creciente y en las siguientes los dos tipos de diferencias que resultan ser iguales. Todas son divisibles entre 4, por ser un producto de suma por diferencia entre impares.

Código

Lo que sigue es un poco específico, propio del lenguaje de “Cartesius”, pero creo que merece la pena explicarlo. Estas son las condiciones impuestas a “Cartesius”:

```
xtotal=4
xt=1..65
xt=filtro(primo)
es (x2^2-x1^2)=(x4^2-x3^2)
es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<x4)>0
```

Las tres primeras se entienden bien: combinaremos cuatro números (***xtotal=4***) desde 1 hasta 65 (***xt=1..65***) y exigiremos que sean primos (***xt=filtro(primo)***). Con estas condiciones se preparan automáticamente los primos que se van a combinar, según vemos en esta imagen:

	X1	X2	X3	X4
1	2	2	2	2
2	3	3	3	3
3	5	5	5	5
4	7	7	7	7
5	11	11	11	11
6	13	13	13	13
7	17	17	17	17
8	19	19	19	19
9	23	23	23	23
10	29	29	29	29
11	31	31	31	31
12	37	37	37	37
13	41	41	41	41
14	43	43	43	43
15	47	47	47	47
16	53	53	53	53
17	59	59	59	59
18	61	61	61	61
19				

En total, dieciocho primos, que combinaremos de todas las formas posibles (por eso la herramienta es lenta).

La tercera condición exige la igualdad entre diferencias de cuadrados:

es (x2^2-x1^2)=(x4^2-x3^2)

Exige que sean iguales las diferencias entre consecutivos, lo que garantiza que también sean iguales las diferencias alternadas. La palabra ***"es"*** significa que se exige que sea verdadera la expresión que le siga.

es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<x4)>0

Esta última condición elimina casos repetidos. Exige que X3 sea menor que X4, X1 menor que X2 y X2 menor o igual que X3.En “Cartesius”, como en otros lenguajes, el producto funciona como la conectiva lógica Y y la suma como la O.

Con este proceso ya tenía la idea de que estos casos abundarían en cualquier rango de números, y, por su naturaleza, que serían infinitos (conjetura). Se observan varios números en la cuarta columna que son cabecera de varios conjuntos, como el 61, que pertenece a varias soluciones.

Otra observación en la tabla es la de que están un poco mezclados los primos de tipo 4K+1 y con los de 4K+3.

Algoritmo en forma de función

Ya que mi blog va de números y hoja de cálculo, parece conveniente acudir a esta herramienta general para completar y comprobar lo conseguido con Cartesius. La estructura de la función que presentaremos requiere el uso de cuatro bucles distintos, uno por cada primo al cuadrado, y en este caso serán del tipo WHILE_WEND, pero es fácil comprobar que no ralentizan mucho el proceso.

La función, tipo String o texto, actuará sobre un primo cualquiera (si no es primo, sale del código con la palabra "NO") y devolverá todos los conjuntos de cuatro primos cuyo primer elementoo es ese número primo. Así se consigue una búsqueda sistemática si se desea.

Usaremos nuestra función PRIMANT, que devuelve el primo anterior a un número, porque la búsqueda de primos será descendente.

Este es el código de la función:

Function dos_dif_cubos(n)
Dim i, j, k, d, d1
Dim s$

If Not esprimo(n) Then dos_dif_cubos = "NO": Exit Function
s = ""
k = n
While k > 2 'Segundo primo, porque **n** es el primero
d = n ^ 2 - k ^ 2 'Primera diferencia de cuadrados
j = k
While j > 2 'Tercer primo
i = j
While i > 2 'Cuarto primo
d1 = j ^ 2 - i ^ 2 'Segunda diferencia

If d1 = d And d <> 0 And d1 <> 0 Then s = s + Str$(n) + ", " + Str$(k) + ", " + Str$(j) + ", " + Str$(i) + " # " *'Se da la igualdad buscada*

i = primant(i) 'Desciende i
Wend
j = primant(j) 'Desciende j
Wend
k = primant(k) 'Desciende k
Wend
if s="" then s="NO"
dos_dif_cubos = s
End Function

Devuelve una cadena con todos los conjuntos de cuatro primos que presentan diferencias iguales dos a dos, y cuyo sumando mayor es $\mathbf{n^2}$.

Por ejemplo, para el primo 23 obtendríamos:

23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #

Con ellos podríamos construir estas igualdades entre diferencias de cuadrados:

23^2-19^2=17^2-11^2

23^2-17^2=19^2-11^2

23^2-17^2=17^2-7^2

Con esta función podemos recorrer sistemáticamente cualquier rango de números primos (si alguno no es primo devolverá un “NO”).

Por ejemplo, esta sería la tabla de resultados para los primeros primos. Así que con esta función podemos crear un catálogo sistemático de los posibles conjuntos de cuatro primos con la propiedad buscada.

2		NO
3		NO
5		NO
7		NO
11		NO
13		NO
17		17, 13, 13, 7#
19		19, 17, 11, 7#
23		23, 19, 17, 11# 23, 17, 17, 7#
29		29, 23, 19, 7#
31		31, 29, 17, 13# 31, 29, 13, 7#
37		37, 31, 23, 11#
41		41, 37, 29, 23# 41, 37, 19, 7# 41, 31, 29, 11#
43		43, 41, 23, 19# 43, 41, 17, 11# 43, 37, 29, 19# 43, 37, 23, 7#
47		47, 43, 23, 13# 47, 41, 37, 29# 47, 37, 37, 23# 47, 37, 31, 11#
53		53, 47, 31, 19#

Estas cadenas de conjuntos de cuatro primos para uno dado se pueden conseguir también con ***Cartesius***. Basta adaptar el código de más arriba a un valor concreto, por ejemplo el 61:

```
xtotal=3
xt=1..61
xt=filtro(primo)
es (x2^2-x1^2)=(61^2-x3^2)
es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<61)>0
```

Obtendremos una lista de cinco conjuntos de primos que se completan con el 61:

X1	X2	X3
7	17	59
7	31	53
11	19	59
13	41	47
17	23	59

Esta solución coincide con la de la función *dos_dif_cubos*:

DOS_DIF_CUBOS(61)= 61, 59, 23, 17 # 61, 59, 19, 11 # 61, 59, 17, 7 # 61, 53, 31, 7 # 61, 47, 41, 13

Con esto damos por resuelta la búsqueda. Nos queda un detalle, con el que comenzamos este estudio, y es la procedencia de estas diferencias de dos sumas de cubos con el mismo resultado.

Sumas de cubos equivalentes

Recordamos las frases de inicio de estas búsquedas:

23, 43, 163 y 167

Sus diferencias de cuadrados iguales son dos:

167^2-163^2=43^2-23^2

167^2-43^2=163^2-23^2

Esto es porque 23^2+167^2=28418=43^2+163^2

Si ahora buscáramos todos los números que equivalen al menos a dos sumas de cuadrados de primos, encontraríamos dos igualdades de diferencias del tipo buscado. Usaremos esta descomposición de un número en dos cuadrados de primos que sigue. Es una cadena de texto, y el primer carácter es el número de descomposiciones de ese tipo que presenta. Si no es posible la descomposición devolverá un "NO".

```
Public Function sumadoscuad_prim$(n)
Dim i, r, t, w, m
Dim s$

s = "" 'Variable de respuesta
m = 0 'Contador de soluciones
```

r = Sqr(n) ‘Tope de búsqueda
i = 2
While i < r
t = n - i ^ 2
w = Sqr(t)
If escuad(t) And esprimo(w) And i <= w Then m = m + 1: s = s + " # " + Str$(i) + ", " + Str$(w)
‘Si es cuadrado de un primo se incrementa **m** y se incorpora a la solución
i = primprox(i)
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " # " + s
sumadoscuad_prim = s
End Function

Con esta función se pueden unificar las dos cuestiones, enlazando diferencias y sumas, según vemos en la siguiente tabla, que elige el primo mayor y lo incorpora a una diferencia. Comprende todos los números enteros que equivalen a dos sumas de cuadrados de primos:

Suma	Soluciones	Mayor	Cuatro primos
338	2 # # 7, 17 # 13,	17	17, 13, 13, 7 #
410	2 # # 7, 19 # 11,	19	19, 17, 11, 7 #
578	2 # # 7, 23 # 17,	23	23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #
650	2 # # 11, 23 # 17,	23	23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #
890	2 # # 7, 29 # 19,	29	29, 23, 19, 7 #

Tomamos el primo mayor y creamos con él diferencias de cuadrados, que coinciden con los elementos de la izquierda.

GENERACIÓN DE PRIMOS CON CUADRADOS Y OTROS

En mis exploraciones por la página OEIS me he encontrado con una sucesión de primos en la que a cada término le sigue el menor primo cuya diferencia con el anterior es un cuadrado (https://oeis.org/A073609). He pensado en ampliar el tema a diferencias de otro tipo, no cuadrados, para descubrir algunas posibles propiedades.

La sucesión es claramente dependiente de su inicio, que en este caso es el 2, pero para cualquier primo con que iniciemos, producirá un siguiente primo único, diferente a estos o coincidente. Los términos publicados son los siguientes, con inicio en 2:

2, 3, 7, 11, 47, 83, 227, 263, 587, 911, 947, 983, 1019, 1163, 1307, 1451, 1487, 1523, 1559, 2459, 3359, 4259, 4583, 5483, 5519, 5843, 5879, 6203, 6779, 7103, 7247, 7283, 7607, 7643, 8219, 8363, 10667, 11243, 11279, 11423, 12323, 12647, 12791, 13367, ...

No es difícil, dado un número primo, encontrar otro primo, el menor posible, que se diferencie del primero en un cuadrado. La función en VBA de Excel puede ser la siguiente:

Function primsalto(a) As Long
Dim p, prim,d As Long
Dim sale As Boolean

if not esprimo(a) then primsalto=0:exit function ‘No es primo y se asigna un cero
p = primprox(a): sale = False: prim = 0 ‘Se van buscando los siguientes primos
While Not sale
d=p-a ‘Se calcula la diferencia
if escuad(d) then prim=p:sale=true ‘Si la diferencia es cuadrada, tenemos la solución
p=primprox(p) ‘Se sigue con el siguiente primo
wend
primsalto=prim ‘Se encontró
End Function

Hay que usar las funciones ESCUAD y PRIMPROX, que se pueden buscar en mi blog.

Con ella, comenzando, por ejemplo en el 7, se construye fácilmente un conjunto dentro de la sucesión:

Primos	Diferencias cuadradas
7	
11	4
47	36
83	36
227	144
263	36
587	324
911	324
947	36
983	36
1019	36
1163	144
1307	144
1451	144
1487	36

Si elegimos un primo que no figure en la sucesión, como el 13, construiremos otra similar, que, en este caso sería:

Primos	Diferencias cuadradas
13	
17	4
53	36
89	36
233	144
269	36
593	324
1493	900
1637	144
2213	576
2357	144
2393	36
2969	576
4733	1764
4877	144

En este caso nos devuelve otra sucesión cuyos primeros términos no coinciden con los anteriores. Podía haber un elemento común, con lo que ambas sucesiones coincidirían totalmente a partir de él. Volveremos a ese tema.

En la sucesión de OEIS citada se organiza la búsqueda con un orden distinto, pues para cada primo se le van sumando cuadrados hasta llegar a otro primo. El código PARI es muy sintético y lo copiamos aquí.

```
print1(a=2, ", "); for(n=1, 43, k=1;
while(!isprime(b=a+k^2), k++); print1(a=b, ", "))
```

Usa la instrucción *print* para asignar también valores a las variables. No lo habíamos visto hasta ahora, y es ingenioso.

Cuestiones diversas

Naturaleza de los cuadrados

Para primos mayores que 6, en cada inicio de sucesión, si se llega a un tipo **36k+p**, siendo p primo del tipo **6q+5**, todos los cuadrados que se añadan en este proceso serán múltiplos de 36, con lo que el tipo inicial **36k+p** se mantendrá.

Efectivamente, si le sumo otro cuadrado, deberá ser par, para que la suma siga siendo impar, y también ha de ser múltiplo de 3, pues, en caso contrario, sería uno de los tipos 6m+2 o 6m+4, y resultaría:

$36k+p+(6m+2)^2 = 36(k+m^2)+24m+4+p$

$36k+p+(6m+4)^2 = 36(k+m^2)+48m+16+p$

Si p=6k+5 no valen estos casos, pues 4+p y 16+p serían múltiplos de 3, con lo que el resultado final no sería primo. Por tanto, el cuadrado ha de ser múltiplo de 36.

Si p=6k+1, puede no ser el salto de 36k, sino otro cualquiera par, como 4, 16, 64 o 100.

Observamos algunos inicios:

Inicio 37

Este primo es del tipo 6k+1, por lo que el cuadrado que se suma no ha de ser múltiplo de 36, pero el siguiente, 41, es del tipo 6k+5, y a partir de él, todos son del mismo tipo. A esta situación se llegará siempre. Es fácil razonarlo.

$36k+6q+1+(6m+2)^2 = 36(k+m^2)+24m+4+6q+1=6h+5$

$36k+6q+1+(6m+4)^2 = 36(k+m^2)+48m+16+6q+1=6h+5$

Lo vemos en la imagen:

Primos	Diferencias cuadradas	
37		
41	4	
617	576	
653	36	
797	144	
941	144	
977	36	
1013	36	
1049	36	
1193	144	
1229	36	
1373	144	
1409	36	
1553	144	
1697	144	

Todos los restos módulo 6 valen 5, y todas las diferencias múltiplos de 36 a partir del 41.

Inicio 47

Este primo es del tipo 6k+5, luego todos los cuadrados serán múltiplos de 36

Primos	Diferencias cuadradas	
47		
83	36	
227	144	
263	36	
587	324	
911	324	
947	36	
983	36	
1019	36	
1163	144	
1307	144	
1451	144	
1487	36	
1523	36	
1559	36	

Primos consecutivos

Hemos visto que el primo 37, con un cuadrado se ha convertido en su consecutivo. En este caso, con cuadrado igual a 4. Esto será frecuente, pero habrá otros ejemplos. En un primer intento, todos los casos hasta el valor de 1000 presentan una diferencia de 4. El siguiente cuadrado par, 16, se alcanza por primera vez en el par 1831, 1847. La siguiente diferencia de 64 no se alcanza para valores inferiores a 25000. Con el siguiente código, adaptado de OEIS, hemos encontrado dos pares de primos consecutivos con diferencia 64.

primosalto(n)={my(k=1,b);while(!isprime(b=n+k^2), k++);b}

forprime(i=2,2000,p=nextprime(i+1)
;q=primosalto(i);if(p==q&&p-i==16,print(i," ",p)))

Son estos: (89689, 89753) y (107377, 107441)

Los primeros casos para cada cuadrado están publicados en https://oeis.org/A138198:

2, 7, 1831, 9551, 89689, 396733, 11981443, 70396393, 1872851947, 10958687879, 47203303159, 767644374817, 8817792098461, 78610833115261, 497687231721157, 2069461000669981, 22790428875364879, 78944802602538877....

Primos comunes a dos sucesiones

Se podría preguntar si estas sucesiones son disjuntas o existen elementos comunes, y la respuesta es que sí los hay. Hemos usado la siguiente función para detectar si un número primo pertenece a la sucesión iniciada con otro primo menor, al que llamaremos *antecedente*.

function numsaltos$(n)
dim s$
dim i,k
k=0 ‘Contador de soluciones
i=2 ‘Primer inicio primo
while i<=n and k<2

if n=primsalto(i) then k=k+1:s=s+str$(i)+", "’Nueva solución
i=primprox(i)’Siguiente primo posible
wend
if k>=2 then numsaltos=str$(ajusta(k))+". "+s else numsaltos="NO"
end function ‘Devuelve un par de soluciones o un “NO”

Los primeros elementos comunes, seguidos por dos antecedentes son:

41 5, 37
47 11, 31
83 47, 79
89 53, 73
107 71, 103
167 131, 151
173 29, 137
197 181, 193

Por ejemplo, 167 pertenece a las sucesiones

131, 167, 311, 347, 383

151, 167, 311, 347, 383

Es evidente que, a partir de un elemento común, todos lo son.

Primos sin antecedentes

Si modificamos la función ***numsaltos*** para que devuelva sólo el número de antecedentes, obtendremos otras soluciones interesantes:

Estos serían inicio de sucesión pero no pertenecerían a ninguna otra. Basta buscar aquellos primos p en los que numsaltos(p)=0. Los primeros son estos:

2, 5, 13, 19, 29, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 103, 109, 127, 139, 151, 157, 163, 179, 181, 191, 193, 199, 211, 223, 229, 241, 271, 277, 283, 313, 331, 337, 349, 359, 367, 373, 379, 397, 409, 421, 431, 433, ...

Están publicados en https://oeis.org/A073770

Otros tipos

En anteriores párrafos generamos sucesiones de primos en la que cada término era el menor primo con diferencia cuadrada respecto al anterior. De forma más breve realizaremos un recorrido con otros casos que tengan otro carácter.

Triangulares

En el caso de cuadrados usábamos la función PRIMSALTO.

Ahora sustituimos en la función PRIMSALTO la función ESCUAD por la función ESTRIANGULAR, y elegimos el 2 como primo de inicio. Con ello encontraremos los primeros primos que posean una diferencia triangular con el anterior, siendo cada uno el mínimo con esa propiedad.

Obtenemos:

Primos	Diferencias	Orden triangular
2		
3	1	1
13	10	4
19	6	3
29	10	4
107	78	12
113	6	3
149	36	8
227	78	12
233	6	3
239	6	3
317	78	12
353	36	8
359	6	3
479	120	15

Aquí lo interesante es que todas las diferencias, salvo la primera, han de ser pares, por lo que los órdenes de las mismas han de pertenecer a uno de los tipos 4k o 4k-1. Es fácil razonarlo a partir de la expresión n(n+1)/2.

Con este inicio del primo 2, están publicados en

https://oeis.org/A275030

Ocurre con estos primos algo similar a lo que se observaba en el caso de cuadrados, y es que si se alcanza un primo del tipo 6n+5, todos sus consecutivos comparten ese mismo tipo. Lo puedes comprobar en el caso de 97, que hemos elegido al azar:

Primo	Diferencia triang.	Resto mód 6
97		
103	6	1
109	6	1
137	28	5
173	36	5
179	6	5
257	78	5
263	6	5
269	6	5
347	78	5
353	6	5
359	6	5
479	120	5
557	78	5
563	6	5
569	6	5
647	78	5
653	6	5
659	6	5

A partir del 137 todos son del tipo 6n+5. Se puede razonar estudiando seis casos. En primer lugar distinguiremos entre triangulares de orden 4k o de orden 4k-1 (ver párrafos anteriores) y dentro de ellos, que k sea del tipo 3m, 3m+1 o 3m-1. Lo desarrollamos suponiendo que partimos de un primo del tipo 6n+5 y llamamos T al triangular que se suma:

Primer caso $T=2k(4k+1)=8k^2+2k$

$6n+5+T=6n+5+8k^2+2k$

Si **$k=3m$** T es múltiplo de 6, luego sigue la forma 6n+5

Si **$k=3m+1$**. $T=8(3m+1)^2+2(3m+1)=72m^2+48m+8+6m+2$ que da resto 4 módulo 6, luego pasa al tipo 6n+3, que no es primo. No nos vale.

Si **$k=3m-1$** $T=8(3m-1)^2+2(3m-1)=72m^2-48m+8+6m-2$ múltiplo de 6, luego respeta el 6n+5

Segundo caso $T=2k(4k-1)=8k^2-2k$

Si **$k=3m$** es T múltiplo de 6 y respeta el 6n+5

Si **$k=3m+1$** $8(3m+1)^2-2(3m+1)=72m^2+48m+8-6m-2$, múltiplo de 6 y respeta el tipo 6n+5

Si **$k=3m-1$** $8(3m-1)^2-2(3m-1)=72m^2-48m+8-6m+2$ resto 4 y no resulta primo

O no son válidos los triangulares, porque den resto 4 y convertirían 6n+5 en 6n’+9, no primo o bien se suma un múltiplo de 6 y sigue 6n+5.

Queda, pues, comprobado que al llegar a un primo de ese tipo, se conserva ese carácter.

Primos iniciales, sin antecedentes

Procediendo de forma similar al caso de los cuadrados, descubrimos que estos primos no tienen antecedentes:

3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 139, 151, 157, 163, 167, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 229, 241, 251, 263, 269, 271

No debemos confundirnos. En el listado parece que 11 es antecedente de 17, pues su diferencia es el triangular 6, pero la existencia del intermedio 13 invalida la idea.

Primos consecutivos

También en el caso de saltos triangulares se observan primos consecutivos. Estos son los primeros:

23, 29
31, 37
47, 53
53, 59
61, 67
73, 79
83, 89
131, 137
139, 149
151, 157
157, 163
167, 173
173, 179
181, 191

Con cubos

Procediendo de igual forma que en los tipos anteriores obtenemos:

Primo	Diferencia cúbica
2	
3	1
11	8
19	8
83	64
1811	1728
2027	216
2243	216
2251	8
2467	216
2531	64
2539	8
3539	1000
3547	8
4547	1000
5059	512

Están publicados en https://oeis.org/A076201, y no presentan, aparentemente, propiedades de interés.

Con oblongos

Al ser los oblongos números pares que son doble de un triangular (son del tipo n(n+1)), se merecen un repaso. Con ellos no se puede iniciar con el primo 2. Estos son los primeros conseguidos con inicio 3:

Primos	Salto oblongo	Resto módulo 6
3		
5	2	5
7	2	1
13	6	1
19	6	1
31	12	1
37	6	1
43	6	1
73	30	1
79	6	1
109	30	1
139	30	1
151	12	1
157	6	1
163	6	1
193	30	1
199	6	1
211	12	1
223	12	1
229	6	1
241	12	1

Con oblongos, el tipo de primo que perdura es el **6n+1**. En la tabla comprobamos que este hecho comienza en el 7.

Si llamo O al oblongo (da igual su orden, porque siempre es par) tendremos:

6n+1+O = 6n+1+k(k+1)

Si **k=3m**, 6n+1+(3m)(3m+1) sigue el tipo 6n+1 pues el producto es múltiplo de 6

Si **k=3m+1**. 6n+1+k(k+1)=6n+1+(3m+1)(3m+2) sería no válido, por ser la suma múltiplo de 3

Si **k=3m-1**, 6n+1+k(k+1)=6n+1+(3m-1)(3m) sería idéntico al primer caso.

Así que los saltos válidos respetan el tipo **6n+1**

Siguiendo un proceder de mi blog, cuando se tratan varios tipos de números, al avanzar se prescinde de algunos detalles, para no cansar y también para dar oportunidad a los lectores que deseen explorar por su cuenta. Así que aquí dejamos el tema.

PRIMOS CUBANOS

Se llaman así (Cunningham (1923)) aquellos números primos que son iguales a una diferencia de cubos consecutivos. Lo de "cubano" viene de cubo, no de Cuba. No es un nombre afortunado, pero así quedó. Al ser los cubos consecutivos, se da por supuesto que X es entero.

No es que sean muy interesantes, pero nos permitirán analizar su búsqueda y estudiar variantes de la definición.

Búsqueda directa

Si creamos una columna de números consecutivos, los elevamos al cubo y restamos, si poseemos una función ESPRIMO o ISPRIME, será fácil identificar los primos cubanos. Esta función la puedes consultar en varias entradas de mi blog, como, por ejemplo en https://hojaynumeros.blogspot.com/2016/05/palprimos-primos-palindromicos.html

El esquema quedaría así:

N	N^3	Diferencia	Primo cubano
1	1		
2	8	7	Cubano
3	27	19	Cubano
4	64	37	Cubano
5	125	61	Cubano
6	216	91	
7	343	127	Cubano
8	512	169	
9	729	217	
10	1000	271	Cubano
11	1331	331	Cubano
12	1728	397	Cubano
13	2197	469	
14	2744	547	Cubano
15	3375	631	Cubano
16	4096	721	
17	4913	817	
18	5832	919	Cubano
19	6859	1027	
20	8000	1141	
21	9261	1261	
22	10648	1387	
23	12167	1519	
24	13824	1657	Cubano

En la última columna hemos escrito fórmulas del tipo ***=SI(ESPRIMO(I4);"Cubano";"")***

Si es primo aparecerá la frase “Cubano” y si no, quedará en blanco.
Observamos que los primeros primos cubanos son *7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 397, 547, 631, 919, 1657.*

Desarrollo algebraico

Al desarrollar la definición, nos damos cuenta de que el tema es de tipo elemental:

$N=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$

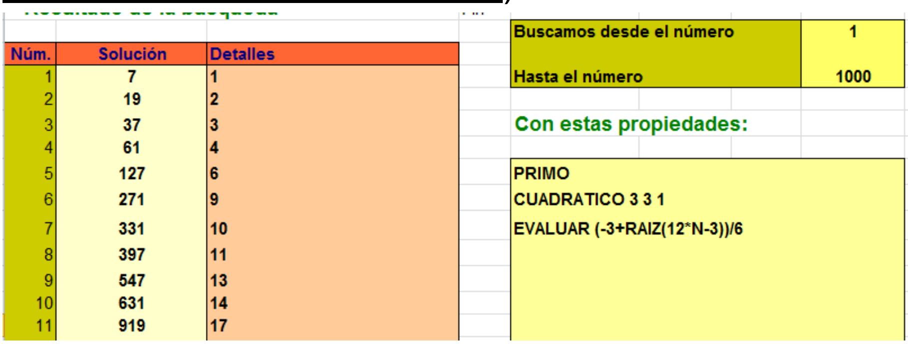
Esto nos lleva a una ecuación de segundo grado:

$3x^2+3x-(N-1)=0$

Para que tenga solución entera, el discriminante, que es fácil ver que equivale a 12N-3, ha de ser cuadrado. De esta forma tendremos el valor de x:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{12N - 3}}{6}$$

Con este breve estudio tenemos ya forma de encontrar y analizar los primos cubanos. Comenzamos con nuestro Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador)



Núm.	Solución	Detalles
1	7	1
2	19	2
3	37	3
4	61	4
5	127	6
6	271	9
7	331	10
8	397	11
9	547	13
10	631	14
11	919	17

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	1000

Con estas propiedades:

PRIMO
CUADRATICO 3 3 1
EVALUAR (-3+RAIZ(12*N-3))/6

Es interesante explicar las condiciones: En primer lugar exigimos que el número sea primo, después, que sea igual a una expresión cuadrática de coeficientes 3, 3 y 1 ($3X^2+3X+1$), y, por último, encontramos el valor de X y lo situamos en la segunda columna con la orden EVALUAR.

En PARI es muy fácil también encontrar estos números. Nos basaremos en la condición de que 12N-3 sea cuadrada, y quedará:

is(n)=isprime(n)&&issquare(12*n-3)
For(i=1,1000,if(is(i) ,print1(i,", ")))

Lo hemos comprobado en la web oficial de PARI, https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html

```
? is(n)=isprime(n)&&issquare(12*n-3)
for(i=1,1000,if(is(i) ,print1(i,", ")))

7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 397, 547, 631, 919,
```

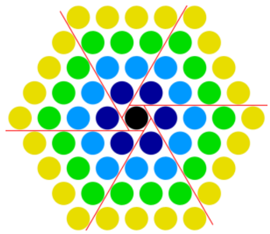
Están publicados en https://oeis.org/A002407

A002407 Cuban primes: primes which are the difference of two consecutive cubes.

7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, 397, 547, 631, 919, 1657, 1801, 1951, 2269, 2437, 2791, 3169, 3571, 4219, 4447, 5167, 5419, …

Carácter poligonal

La expresión $N=3X^2+3X+1$ se puede escribir como $6(X(X+1)/2)+1=6T_x+1$, es decir, como seis veces un número triangular ´más una unidad, pero esa es la estructura de los números hexagonales centrados. Basta estudiar esta imagen de la Wikipedia para entenderlo



(https://en.wikipedia.org/wiki/Centered_hexagonal_number#:~:text=The%20sequence%20of%20hexagonal%20numbers,%2C%20721%2C%20817%2C%20919.)

Si consultas el listado de estos números hexagonales centrados, observarás que nuestros primos cubanos están incluidos.

*A003215 Hex (or centered hexagonal) numbers: 3*n*(n+1)+1 (crystal ball sequence for hexagonal lattice). 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631, 721, 817, 919, 1027, 1141, 1261, 1387, 1519, 1657, 1801, 1951, 2107 ,…*

La expresión N=3X(X+1)+1 también sugiere que equivalen a la unidad más tres veces un número

oblongo, del tipo N(N+1). Así, 61 se puede representar como tres rectángulos apilados de dimensiones 4 por 5, más una unidad.
Por otra parte, el primer sumando,

Búsqueda directa del valor de X+1

Podemos dar protagonismo al valor de X+1, base del cubo mayor. En este caso bastaría exigir que fuera primo $(X+1)^3-X^3$. Es simple buscar esos valores. Cambiarían de columna en Excel respecto a la búsqueda anterior:

Resultado de la búsqueda

Fin

Núm.	Solución	Detalles
1	2	7
2	3	19
3	4	37
4	5	61
5	7	127
6	10	271
7	11	331
8	12	397
9	14	547
10	15	631
11	18	919
12	24	1657

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	100

Con estas propiedades:

ES PRIMO(N^3-(N-1)^3)
EVALUAR N^3-(N-1)^3

Hemos llamado N a X+1. Lo hemos decidido así porque los valores de X+1 están publicados en https://oeis.org/A002504:

*A002504 Numbers x such that 1 + 3*x*(x-1) is a ("cuban") prime (cf. A002407).*
2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 49, 50, 53, 56, 59, 63, 64, …

Se podría pensar en generalizar esta cuestión planteando que la diferencia entre las bases sea un número k mayor que 1, pero en ese caso la diferencia entre cubos sería múltiplo de k y no podría ser primo. Así que la única diferencia entre cubos que puede ser prima es la que existe entre consecutivos.

PRIMOS BRASILEÑOS

En este apartado nos plantearemos qué números primos se pueden formar con la suma de las primeras potencias de un número, es decir, cuándo una suma del tipo $1+n+n^2+n^3+n^4+n^5+$…será un número primo. No consideraremos el caso en el que un primo **p** sea igual a **1+n**, ya que esto lo cumplen todos los primos.

Esta cuestión equivale a la búsqueda de números primos que sean "repitunos" en una base de numeración dada. Por ejemplo, 31(10=111(5, ya que las tres cifras 1 provienen de la igualdad $31=1+5+5^2$.

Función caracterizadora

Últimamente estamos usando funciones para Excel y Calc que devuelven una cadena de texto con los resultados. Es un formato que nos da mucha información y que es susceptible de cambios sencillos para la búsqueda de otros objetivos.

En este caso usamos la siguiente función:

Function primo_sumpot$(n)
Dim p, k, m, q
Dim s$

If Not esprimo(n) Then primo_sumpot = "NO": Exit Function
k = 2 ‘Base de las potencias
p = 1’Suma de potencias
m = 0’ Exponente
s = ""’Contenedor del resultado
q = 0’ Contador de soluciones
While k < n
p = 1 + k: m = 1’Primera suma de potencias
While p <= n
m = m + 1’ Siguiente suma de potencias
p = p + k ^ m

```
If p >= n Then
If p = n Then q = q + 1: s = s + " # " + Str$(k) + ", " + Str$(m) 'Solución
End If
Wend
k = k + 1: p = 1 + k: m = 1 'Siguiente base de potencias
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(q) + "## " + s
primo_sumpot = s
End Function
```

Si buscamos con ella los primeros primos que cumplen lo exigido, obtenemos:

N primo	Sumas de potencias
7	1## # 2, 2
13	1## # 3, 2
31	2## # 2, 4 # 5, 2
43	1## # 6, 2
73	1## # 8, 2
127	1## # 2, 6
157	1## # 12, 2
211	1## # 14, 2
241	1## # 15, 2
307	1## # 17, 2
421	1## # 20, 2
463	1## # 21, 2
601	1## # 24, 2
757	1## # 27, 2

Observamos que la mayoría de las soluciones son del tipo $1+k+k^2$, como, por ejemplo, el 73, que equivale a $1+8+8^2$.

El 31 presenta dos soluciones:
$31=1+2+2^2+2^3+2^4=1+5+5^2$, lo que lo convierte en "repituno" en dos bases de numeración:

31(10 = 11111(2 = 111(5

Según una conocida fórmula, estos números también se caracterizan porque para un valor adecuado de m se cumple

$$N = \frac{k^m - 1}{k - 1}$$

En efecto, $31=(2^5-1)/(2-1)=(32-1)/1=31$
También $31=(5^3-1)/(5-1)=124/4=31$
Para que el resultado sea primo, **m** ha de ser primo, pues en caso contrario el cociente presentaría más de un factor. Es un razonamiento similar al usado en los primos de Mersenne.

Estos primos están publicados en
https://oeis.org/A085104

Con el afán de nombrar ciertas clases de números, a estos se les conoce como “brasileños”, porque se dieron a conocer en una olimpiada matemática celebrada en Brasil (ver https://oeis.org/A125134/a125134.pdf)

Números brasileños

Si eliminamos la condición de que N sea primo, nos resultan los números brasileños. En nuestra función suprimimos la condición de que sea primo y los obtendremos:

N	Sumas de potencias
7	1## # 2, 2
13	1## # 3, 2
15	1## # 2, 3
21	1## # 4, 2
31	2## # 2, 4 # 5, 2
40	1## # 3, 3
43	1## # 6, 2
57	1## # 7, 2
63	1## # 2, 5
73	1## # 8, 2
85	1## # 4, 3
91	1## # 9, 2
111	1## # 10, 2
121	1## # 3, 4
127	1## # 2, 6
133	1## # 11, 2
156	1## # 5, 3
157	1## # 12, 2
183	1## # 13, 2
211	1## # 14, 2
241	1## # 15, 2
255	1## # 2, 7

Están publicados en https://oeis.org/A053696

No son objeto de estudio aquí, pero es aconsejable la lectura de https://oeis.org/A125134/a125134.pdf

Valores de K

La siguiente lista contiene los primeros valores de K que pueden producir un primo con la expresión que estamos estudiando, con un exponente final fijado de antemano, mayor que 2 y con tope 100:

Valor de k	Primo 1+k+k^2+k^3+...
1	Exponente: 2 Primo: 3
2	Exponente: 2 Primo: 7
3	Exponente: 2 Primo: 13
5	Exponente: 2 Primo: 31
6	Exponente: 2 Primo: 43
7	Exponente: 4 Primo: 2801
8	Exponente: 2 Primo: 73
12	Exponente: 2 Primo: 157
13	Exponente: 4 Primo: 30941
14	Exponente: 2 Primo: 211
15	Exponente: 2 Primo: 241
17	Exponente: 2 Primo: 307
20	Exponente: 2 Primo: 421
21	Exponente: 2 Primo: 463
22	Exponente: 4 Primo: 245411
23	Exponente: 4 Primo: 292561
24	Exponente: 2 Primo: 601
26	Exponente: 6 Primo: 321272407
27	Exponente: 2 Primo: 757
28	Exponente: 4 Primo: 637421

Observamos que hay bases primas entre estos primeros pasos:

Base prima	Exponente y primo resultante
2	Exponente: 2 Primo: 7
3	Exponente: 2 Primo: 13
5	Exponente: 2 Primo: 31
7	Exponente: 4 Primo: 2801
13	Exponente: 4 Primo: 30941
17	Exponente: 2 Primo: 307
23	Exponente: 4 Primo: 292561
29	Exponente: 4 Primo: 732541
31	Exponente: 6 Primo: 917087137
41	Exponente: 2 Primo: 1723
43	Exponente: 4 Primo: 3500201
59	Exponente: 2 Primo: 3541
61	Exponente: 6 Primo: 52379047267
71	Exponente: 2 Primo: 5113
73	Exponente: 4 Primo: 28792661
79	Exponente: 4 Primo: 39449441
83	Exponente: 4 Primo: 48037081
89	Exponente: 2 Primo: 8011

Los primos resultantes, ordenados, están publicados en https://oeis.org/A023195

3, 7, 13, 31, 127, 307, 1093, 1723, 2801, 3541, 5113, 8011, 8191, 10303, 17293, 19531, 28057, 30103, 30941, …

FORMAS DE ACCEDER A UN PAR DE PRIMOS GEMELOS

Uno de los conceptos más populares en Teoría de números es el de primos gemelos. Generalmente se consideran de ese tipo dos números primos impares que se diferencian en dos unidades, como (5, 7) o (17, 19). La forma más sencilla de llegar a ellos, a partir del (5, 7), es buscar pares del tipo (6n-1, 6n+1), porque son los únicos en los que ambos elementos pueden ser primos, salvo (3, 5). Aquí buscaremos otras rutas en las que podemos encontrar esos pares de primos de forma más o menos casual.

Búsqueda directa con 6n-1 y 6n+1

Si deseamos encontrar primos gemelos en un rango dado, bastará recorrer los múltiplos de 6 y averiguar si sus números vecinos son ambos primos. Es algo muy sencillo, y si se incluye aquí es por comenzar con lo más directo. Con esta rutina en VBasic de Excel podemos encontrar los pares de primos gemelos incluidos en cualquier rango y en la primera hoja, si escribimos los extremos de ese rango en las celdas J1 y J2 respectivamente:

Sub gemelos()
Dim n, fila, a, b
Dim r$

a = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(1, 10).Value ‘Se lee el rango
b = ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(2, 10).Value
fila = 3 ‘Fila de inicio
n = a - a Mod 6+6 ‘Se busca un múltiplo de 6
Do While n <= b ‘Se avanza entre los múltiplos de 6
If esprimo(n - 1) And esprimo(n + 1) Then ‘Los números vecinos son primos
r = Str$(n - 1) + ", " + Str$(n + 1) ‘Se imprime una solución
fila = fila + 1 ‘Siguiente fila
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 10).Value = r
End If
n = n + 6 ‘Siguiente múltiplo de 6
Loop
End Sub

En la siguiente imagen podemos observar los pares de primos gemelos entre 3000000 y 3001000. El proceso es muy rápido, aunque el rango abarca mil números.

	3000000
Gemelos	3001000
	3000131, 3000133
	3000299, 3000301
	3000377, 3000379
	3000539, 3000541
	3000929, 3000931

Con esto se da por terminado este tipo de búsqueda directa. Vemos otros caminos más enrevesados.

A través de un múltiplo de un primo

Existen muchas sucesiones en OEIS (Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros) en las que unos números primos, multiplicados por un múltiplo de 6 dan lugar a un par de primos gemelos. Es una búsqueda que relaciona tres números primos y algo más compleja que la anterior.

Por ejemplo, vemos los primeros pares engendrados por el número primo 13 y los múltiplos de 48*13:

	0	
Gemelos	100000	
	1871	1873
	3119	3121
	7487	7489
	21839	21841
	33071	33073
	49919	49921
	61151	61153
	63647	63649
	65519	65521
	86111	86113
	88607	88609
	94847	94849

Una variante sería usar una expresión sobre un número primo, como por ejemplo, todos los pares de números primos gemelos formados a partir de la expresión p^3-p, donde p es un número primo. Cambiando un poco la rutina se consiguen:

	0	
Gemelos	30000000	
	Primo 2 : 5, 7	
	Primo 11 : 1319, 1321	
	Primo 31 : 29759, 29761	
	Primo 41 : 68879, 68881	
	Primo 239 : 13651679, 13651681	

Los valores de esos primos, 2, 11, 31, …están publicados en https://oeis.org/A158295

Podríamos inventar muchas variantes de este tipo, pero no aportarían mucho.

Mediante una concatenación

Aquí pasamos a otras curiosidades. Por ejemplo, comenzamos con un caso que ya está publicado, que consiste en concatenar 2n con 2n-1 y también 2n con 2n+1, y averiguar si ambas concatenaciones constituyen un par de primos gemelos. Como el proceso es rápido, no nos preocuparemos de que el número intermedio sea múltiplo de 6.

La siguiente sencilla función usa la concatenación de Excel, que consiste simplemente en el uso del signo "+" entre cadenas de texto:

Function concat_gem$(n)
Dim a, b
Dim s$

s = ""
'Las siguientes líneas concatenan las expresiones numéricas en modo texto, para después volver a modo numérico con la función VAL. Esas líneas se cambiarán cuando se desee otra concatenación.

a = Val(Str$(2 * n) + Str$(2 * n - 1))
b = Val(Str$(2 * n) + Str$(2 * n + 1))
If esprimo(a) And esprimo(b) Then s = Str$(a) + ", " + Str$(b) Else s = "NO" ‘ Si ambas concatenaciones producen primos gemelos, se comunica mediante la variable **s**.
concat_gem = s
End Function

Con esta función reproducimos la lista publicada en https://oeis.org/A102478

Número N	Primos gemelos
21	4241, 4243
39	7877, 7879
51	102101, 102103
54	108107, 108109
90	180179, 180181
96	192191, 192193
135	270269, 270271
150	300299, 300301
156	312311, 312313
165	330329, 330331
171	342341, 342343
195	390389, 390391
210	420419, 420421
261	522521, 522523

No abarcaríamos aquí las posibilidades de concatenaciones curiosas sobre este tema. La siguiente tabla recoge algunos primos gemelos de cinco cifras provenientes de concatenar un número consigo mismo:

Número N	Primos gemelos
22620	2262022621, 2262022619
22650	2265022651, 2265022649
22932	2293222933, 2293222931
23082	2308223083, 2308223081

Con ello los gemelos se forman con el número, su siguiente y su anterior.
Si usamos el lenguaje PARI podemos intentar este código para el mismo caso, fácilmente adaptable a otros:

```
concat_gem(n)=my(a,b,v=[0,0]);a=eval(concat(Str(n),Str(n-1)));b=eval(concat(Str(n),Str(n+1)));if(isprime(a)&&isprime(b),v=[a,b];print1(v));v
for(i=1,1000,if(concat_gem(i)<>[0,0],print(" ",i)))
```

Esta versión nos daría los primeros casos
:

```
[4241, 4243] 42
[7877, 7879] 78
[102101, 102103] 102
[108107, 108109] 108
[180179, 180181] 180
[192191, 192193] 192
[270269, 270271] 270
[300299, 300301] 300
[312311, 312313] 312
[330329, 330331] 330
[342341, 342343] 342
[390389, 390391] 390
[420419, 420421] 420
[522521, 522523] 522
[540539, 540541] 540
[612611, 612613] 612
[660659, 660661] 660
[822821, 822823] 822
[840839, 840841] 840
[882881, 882883] 882
```

Por la forma de programarlo, el valor de N aparece al final.Podemos seguir jugando. En los siguientes hemos concatenado N con su simétrico en cifras:

Número N	Primos gemelos
2493	24933943, 24933941
2568	25688653, 25688651
2577	25777753, 25777751
2598	25988953, 25988951
2649	26499463, 26499461

Con estos ejemplos se adivina que quedan muchas posibilidades por explorar en la concatenación, pero serían necesarias otras funciones sobre cifras.

Intercalando funciones

Podemos buscar una forma de encontrar primos gemelos a partir de N, pero intercalando funciones. Por ejemplo, buscando SIGMA(N)±1:

Número N	SIGMA(N)	SIGMA(N)-1	SIGMA(N)+1
3	4	3	5
5	6	5	7
6	12	11	13
10	18	17	19
11	12	11	13
17	18	17	19
20	42	41	43
24	60	59	61
26	42	41	43
29	30	29	31
30	72	71	73

Observamos que son abundantes los casos encontrados. Tienes más en https://oeis.org/A072282

Un caso curioso es aquel en el que N es primo, pues entonces SIGMA(N)=N+1, con lo que un posible primo gemelo es el mismo N, como podemos observar en la tabla con 5, 11, 17 y 29. Todos ellos tienen en común que SIGMA es múltiplo de 6.

Si exigimos que N no sea primo, nos quedan

Número N	SIGMA(N)	SIGMA(N)-1	SIGMA(N)+1
6	12	11	13
10	18	17	19
20	42	41	43
24	60	59	61
26	42	41	43
30	72	71	73
38	60	59	61
46	72	71	73
51	72	71	73
55	72	71	73
85	108	107	109
88	180	179	181

Estos resultados figuran en https://oeis.org/A068017. Es fácil razonar que son aquellos casos en los que SIGMA(N) es múltiplo de 6. Como un valor de SIGMA puede ser compartido por varios números, es lógico que el par (71, 73) aparezca repetido.

Objetivos dobles

Podríamos pretender encontrar un par de primos gemelos, pero que una expresión creada a partir de ellos también constituyera otro par de primos gemelos. Un ejemplo sería que n+1 y n-1 formaran par y también fueran gemelos n^2+5 y n^2+7, por ejemplo (buscamos en lo posible centrarnos en múltiplos de 6):

Número N	N-1	N+1	N^2+5	N^2+7
6	5	7	41	43
12	11	13	149	151
2592	2591	2593	6718469	6718471
4128	4127	4129	17040389	17040391
10428	10427	10429	108743189	108743191
11832	11831	11833	139996229	139996231
15888	15887	15889	252428549	252428551

Con estos ejemplos nos podemos dar una idea de búsquedas diferentes que se pueden emprender en talleres de Matemáticas.

PRIMOS PITAGÓRICOS

Después de dos estudios publicados sobre ternas pitagóricas, es útil completarlas con las hipotenusas más simples, que son los primos pitagóricos, es decir, los del tipo 4K+1. Estos primos se caracterizan por poder ser expresados mediante una suma de dos cuadrados de forma única. Este tema ha aparecido tanto en mis publicaciones que lo doy por sabido.

Por ejemplo, $13=4*3+1=2^2+3^2$

Relacionando estos números con el estudio reciente sobre el número de ternas pitagóricas de las que un número es hipotenusa, podemos afirmar que estos primos sólo pueden ser hipotenusa de una sola terna. Así, el ejemplo del 13 se traduce en la terna única $13^2=12^2+5^2$.

Los primeros primos pitagóricos están publicados en https://oeis.org/A002144, y son sencillos de identificar. La terna que producen es siempre primitiva, pues su carácter de primos impide su simplificación.
Según lo aprendido en las anteriores entradas, sus potencias serán hipotenusas de tantas ternas como indique su exponente. Por ejemplo, 13^5=371293 lo es de las cinco siguientes:

$371293=3107^2+371280^2=139932^2+343915^2=142805^2+342732^2=145668^2+341525^2=261443^2+263640^2$

Propiedades

Una propiedad interesante de estos primos es que poseen un resto cuadrático igual a -1. Su justificación requiere teoría de nivel algo superior al que se mantiene en este blog, pero podemos efectuar comprobaciones. Por ejemplo, el primo 29=7*4+1 presenta el resto 28, que equivale a -1. En la siguiente captura de pantalla se observa su presencia:

25	625	625	16	**25**	RESTO
26	676	676	9	**26**	NO RESTO
27	729	729	4	**27**	NO RESTO
28	784	784	1	**28**	RESTO
29	841			**29**	

El cuadrado de estos primos será promedio de otros cuadrados. Con lo aprendido en las dos últimas entradas es fácil comprobarlo:
Tomamos $N=2(4K+1)^2$, que según Gauss se podrá descomponer en suma de cuadrados dos veces. Una de ellas es trivial, pues sería $(4K+1)^2+(4K+1)^2$, pero la otra convertirá a N^2 en promedio de dos cuadrados.

(Ver
https://hojaynumeros.blogspot.com/2024/03/potencias-equidistantes-de-cuadrados.html)

Por ejemplo, 73 es primo del tipo 4K+1, luego su cuadrado deberá ser promedio de dos cuadrados. Descomponemos $2*73^2$ en cuadrados:

$2*73^2=7^2+103^2=73^2+73^2$

De ahí se deduce la propiedad:

$73^2=(7^2+103^2)/2$

Estos valores se pueden lograr también con la función ENTREDOS contenida en el enlace de más arriba.

También estos primos, sin elevar al cuadrado, son promedios de dos cuadrados. Basta recordar que si p es del tipo 4K+1, 2p sólo se descompone en una suma de cuadrados, como ocurre con el número 41:

$41*2=82=1^2+9^2$, luego $41=(1^2+9^2)/2$
$41^2*2=3362=31^2+49^2$, luego $41^2=(31^2+49^2)/2$

Tanto los primos pitagóricos como sus cuadrados son promedios de otros cuadrados.

Pasamos a la posibilidad de estos números de actuar como catetos.

Los primos pitagóricos como catetos de una terna

Este tema ya está resuelto anteriormente, pues si **p** es primo impar, su cuadrado se puede descomponer en dos factores de la misma paridad impar, aparte del trivial p*p, como serían p^2 y 1. Por tanto, se cumple:

$\mathbf{p^2=((p^2+1)/2)^2-((p^2-1)/2)^2}$

Por ejemplo:

$73^2=2665^2-2664^2$

Es fácil ver que el primo pitagórico es la raíz cuadrada de la suma de los catetos, que siempre es un cuadrado perfecto.

También, todo número del tipo $(p^2+1)/2$ es posible hipotenusa que sea una unidad mayor que un cateto, aunque **p** no sea primo.

SUMAS ESPECIALES

SUMAS DE GOLDBACH, LEMOINE Y OTRAS

La conjetura de Lemoine afirma que todo número impar mayor que 5 se puede expresar como la suma p+2q, donde p y q son números primos. Se ha comprobado para N<10^13, y no se ha demostrado cuando escribo esto.

Esta conjetura es más fuerte que la segunda de Goldbach, que afirma que todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos. Aquí no se exige que dos de los primos sean iguales.

Estas dos conjeturas admiten ampliaciones y variantes. Por ejemplo, podemos exigir que dos de los primos sean gemelos, o bien otras más complicadas que podremos tratar si no se alargan las primeras.

En este apartado estudiaremos las soluciones que presenta cada número impar en estas dos conjeturas.

Sumas de Lemoine

Usaremos una función que cuente o presente todas las sumas del tipo p+2q previstas en la conjetura para un número dado. Comenzaremos presentando las sumas además de contarlas. Para ello usaremos la función:

Function sumlemoine(n)
Dim i, j, m
Dim s$

If n Mod 2 = 0 Then sumlemoine = "NO": Exit Function ‘Si ***n*** es par, salimos
m = 0 ‘Contador de soluciones
For i = 2 To n - 4
If esprimo(i) Then ‘Se recorren los primos
j = (n - i) / 2 ‘Se analiza la posible solución para el segundo primo
If esprimo(j) Then m = m + 1: s$ = s$ + "#" + Str$(i) + "+2 *" + Str$(j)
‘Si ambos son primos, se incrementa el contador **m** y se presentan las sumas
End If
Next i
s = Str$(m) + "--" + s
sumlemoine = s
End Function

Con esta función podemos recorrer un conjunto de números impares y comprobar que todos presentan soluciones del tipo N=p+2q. En la tabla figuran los siguientes a 50

51	7--# 5+2 * 23# 13+2 * 19# 17+2 * 17# 29+2 * 11# 37+2 * 7# 41+2 * 5# 47+2 * 2
53	5--# 7+2 * 23# 19+2 * 17# 31+2 * 11# 43+2 * 5# 47+2 * 3
55	3--# 17+2 * 19# 29+2 * 13# 41+2 * 7
57	7--# 11+2 * 23# 19+2 * 19# 23+2 * 17# 31+2 * 13# 43+2 * 7# 47+2 * 5# 53+2 * 2
59	3--# 13+2 * 23# 37+2 * 11# 53+2 * 3
61	3--# 3+2 * 29# 23+2 * 19# 47+2 * 7

En los valores de la función se lee, en primer lugar, el número de soluciones. Así, vemos que 55 presenta 3 y 57, 7. A continuación se escriben las sumas posibles:

55=17+2*19=29+2*13+41+2*7

Este formato es muy ilustrativo, pero en las estadísticas que vamos a estudiar, es un estorbo. Por eso, iremos modificando el resultado, que una vez será el número de soluciones y, en otras ocasiones, máximo, mínimos o diferencias. Sobre la marcha se irá decidiendo.

Número de sumas de Lemoine

Podemos eliminar en la anterior función toda referencia a la cadena de texto s$ y dejar que devuelva solo el número de soluciones. La tabla anterior quedaría así:

51	7
53	5
55	3
57	7
59	3
61	3

De esta forma simplificada se puede crear una lista con los valores en los primeros números impares:

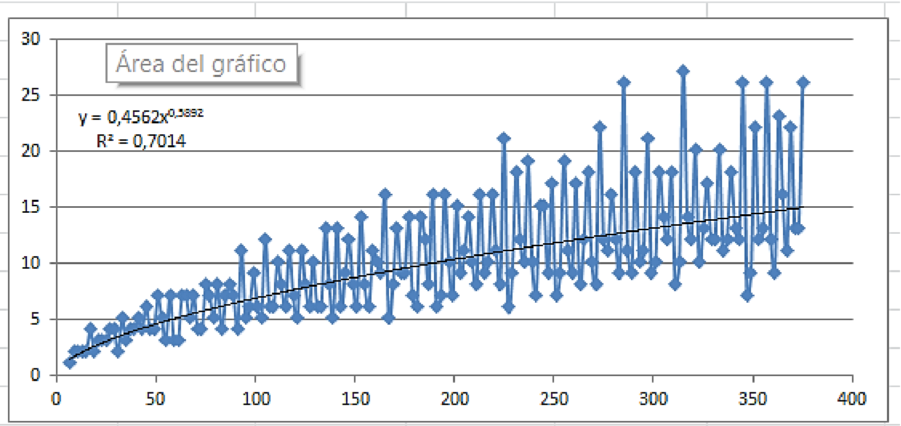
1	0
3	0
5	0
7	1
9	2
11	2
13	2
15	2
17	4
19	2
21	3
23	3
25	3
27	4
29	4
31	2
33	5

Estos valores ya están publicados en http://oeis.org/A046927

A046927 Number of ways to express 2n+1 as p+2q where p and q are primes.

0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 2, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 6, 4, 4, 7, 5, 3, 7, 3, 3, 7, 7, 5, 7, 4, 4, 8, 7, 5, 8, 4, 7, 8, 7, 4, 11, 5, 6, 9, 6, 5, 12, 6, 6, 10, 8, 6, 11, 7, 5, 11, 8, 6, 10, 6, 6, 13, 8, 5, 13, 6, 9, 12, 8, 6, 14, 8, 6, 11, 10, 9, 16, 5, 8, 13, 9, 9, 14, 7, 6, 14

Podemos crear un gráfico que compare el valor de cada impar con el número de sumas de Lemoine que presenta:



Observamos que sigue de forma aproximada una tendencia potencial 0,4562x^0,5892, pero con una correlación no muy fuerte, de R^2=0,7014. Esto nos marca una tendencia al crecimiento atenuado en el número de soluciones.

Exploración con CARTESIUS

La obtención de las diversas sumas es un problema combinatorio, y en este tipo de cuestiones puede resultar útil nuestra hoja de cálculo Cartesius

(Descarga desde http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Por ejemplo, por las tablas anteriores sabemos que el número 57 admite siete descomposiciones de Lemoine. Lo comprobamos en Cartesius con este planteo:

xtotal=2
xt=1..55
xt=filtro(primo)
ES 2*x1+x2=57

Podemos traducirlo como que

Se usan dos variables

Ambas variarán entre 1 y 55

Se filtran solo los primos

La suma del doble de la primera con la segunda ha de dar 57

El resultado es el previsto, siete posibilidades:

X1	X2	X3
	2	53
	5	47
	7	43
	13	31
	17	23
	19	19
	23	11

El primer primo es el que se multiplica por 2. Así, 2*2+53=57, 2*5+47=57, …

Comparación con las sumas de Golbach

Podemos adaptar la función que hemos presentado al recuento de las soluciones para las sumas de Goldbach para impares, formadas por tres números primos. Tal como se afirmó en los primeros párrafos, se obtendrán valores mayores que en los obtenidos a partir de la conjetura de Lemoine.

Se puede usar la siguiente función:

Function sumgoldbach(n)
Dim i, j, m

If n Mod 2 = 0 Then sumgoldbach = 0: Exit Function

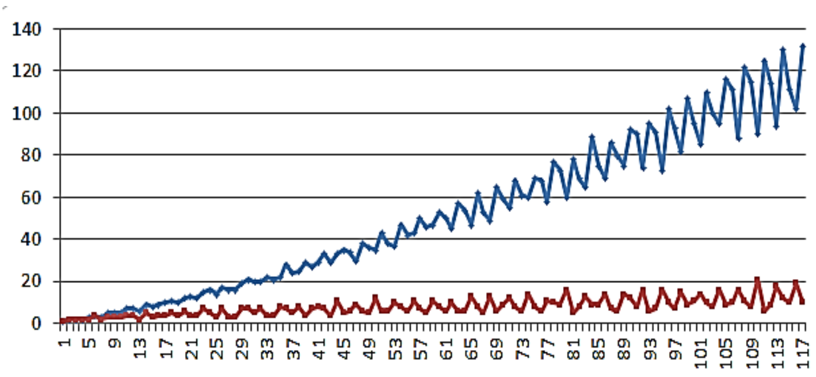
```
m = 0
For i = 2 To n - 4
If esprimo(i) Then
j = 2
While j <= i And j <= n - i
If esprimo(j) And esprimo(n - i - j) And j >= n - i - j Then
m = m + 1
j = j + 1
Wend
End If
Next i
sumgoldbach = m
End Function
```

Con ella podemos contar el número de sumas de Goldbach para cada número impar. Están ya publicadas en http://oeis.org/A054860

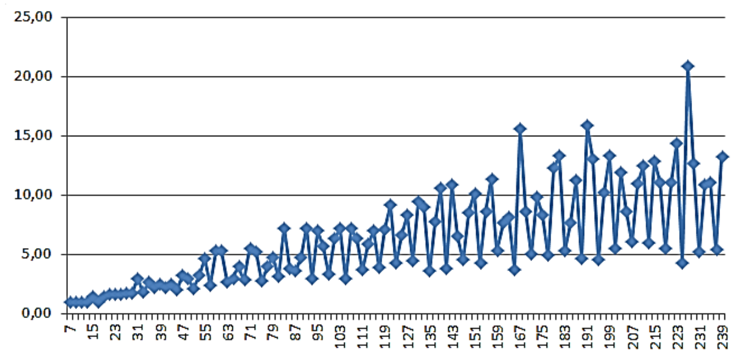
A054860 Number of ways of writing 2n+1 as p + q + r where p, q, r are primes with p <= q <= r.

0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 6, 9, 8, 9, 10, 11, 10, 12, 13, 12, 15, 16, 14, 17, 16, 16, 19, 21, 20, 20, 22, 21, 22, 28, 24, 25, 29, 27, 29, 33, 29, 33, 35, 34, 30, 38, *36, 35, 43, 38, 37, 47, 42, 43, 50, 46, 47, 53, 50, 45, 57, 54, 47, 62, 53, 49, 65, 59, 55, …*

Evidentemente, el número de sumas de Lemoine es inferior al de las de Goldbach. En esta gráfica hemos hecho coincidir ambas:



La línea azul sigue las sumas de Goldbach y la roja las de Lemoine. Se observa cómo se ampliando la diferencia entre ellas al crecer los números impares. De hecho, esta es la gráfica de los cocientes de ambas sumas:



En las oscilaciones influyen más las sumas de Goldbach, que son más irregulares en su crecimiento.

Otras sumas de Lemoine

Se han estudiado ya las sumas de Lemoine, en las que los números impares superiores a 5 se descomponen como p+2q, siendo p y q primos. Si 2q lo sustituimos por q-1+q+1, podremos preguntarnos por la posibilidad de que q-1 y q+1 sean los primos (en este caso gemelos), en lugar de q. Es prácticamente el mismo problema, pero más exigente. Existen más números dobles de primos que parejas de primos gemelos. Para estudiar estas sumas bastará modificar ligeramente la función que usamos para las sumas de Lemoine, pero modificando alguna de las líneas del código. Puede ser esta:

```
Function sumlemoine00(n)
Dim i, j, m
Dim s$

s = ""
If n Mod 2 = 0 Then sumlemoine00 = "NO": Exit Function
m = 0
i = 2
While m = 0 And i <= n - 8
If esprimo(i) Then
j = (n - i) / 2   'Al llegar aquí, se busca un par de primos gemelos
If esprimo(j + 1) And esprimo(j - 1) Then m = m + 1: s$ = s$ + "#" + Str$(i) + "+" + Str$(j - 1) + "+" + Str$(j + 1)
End If  'El resto del código es muy similar al de las sumas de Lemoine
i = i + 1
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = Str$(m) + "--" + s
sumlemoine00 = s
End Function
```

Al aplicar esta función a los primeros impares, no todos presentan una suma de un número primo con un par de primos gemelos:

3	NO
5	NO
7	NO
9	NO
11	1--# 3+ 3+ 5
13	1--# 5+ 3+ 5
15	1--# 3+ 5+ 7
17	1--# 5+ 5+ 7
19	1--# 7+ 5+ 7
21	1--# 13+ 3+ 5
23	1--# 11+ 5+ 7
25	1--# 13+ 5+ 7
27	1--# 3+ 11+ 13
29	1--# 5+ 11+ 13
31	1--# 7+ 11+ 13
33	NO
35	1--# 11+ 11+ 13
37	1--# 13+ 11+ 13
39	1--# 3+ 17+ 19
41	1--# 5+ 17+ 19
43	1--# 7+ 17+ 19

45 1--# 37+ 3+ 5
47 1--# 11+ 17+ 19
49 1--# 13+ 17+ 19
51 1--# 43+ 3+ 5
53 1--# 17+ 17+ 19
55 1--# 19+ 17+ 19
57 NO
59 1--# 23+ 17+ 19
61 1--# 37+ 11+ 13

Vemos que los de una cifra, el 33 y el 57 no admiten ese tipo de suma. De hecho, la gran mayoría de los impares admite la suma p+q+r con p primo y (q,r) par de primos gemelos.

No es fácil encontrar todos los números que no admiten esas sumas. Los primeros son estos:

1, 3, 5, 7, 9, 33, 57, 93, 99, 129, 141, 153, 177, 183, 195, 213, 225, 243, 255, 261, 267, 273, 297, 309, 327, 333, 351, 369, 393, 411, 423, 435, 453, 477, 489, 501, 513, 519, 525, 537, 561, 573, 591, 597, 603, 633, 645, 657, 663, 675, 687, 693, 705, 711, 723, 729, 753, 771, 783, 789, 801, 807, 813, 825, …

Estaban inéditos y los hemos publicado en

https://oeis.org/A329590

Para encontrarlos hemos usado el siguiente código PARI:

for(n = 0, 500, m = 2*n+1; v = 0; forprime(i = 3, m-8, j = (m-i)/2; if(isprime(j-1) && isprime(j+1), v = 1)); if(v == 0, print1(m,", ")))

En él recorremos los impares (m=2*n+1) y después los primos. Para cada primo analizamos si existe un par de primos gemelos en la suma. La variable v recoge el éxito (v=1) o el fracaso (v=0) en la búsqueda. Al final se imprimen los números en los que v=0.

Estudio de un número concreto con CARTESIUS

Con un planteo similar al del anterior tema, podemos encontrar fácilmente las descomposiciones del tipo que estudiamos para un número concreto. Por ejemplo, 61 hemos visto que admite 37+11+13.

Usamos ahora

xtotal=2
xt=1..59
xt=filtro(primo)
ES PRIMO(x1+2)
ES x1+x1+2+x2=61

(La condición ES PRIMO no está implementada en el archivo descargable)

Exigimos que x1+2 sea primo (gemelo con x1), y el resto queda casi igual que en el anterior:

Obtenemos:

X1	X2	X3
3	53	
11	37	

Así que aparece otra solución: 3+5+53=61

Si el número no es muy grande, se puede descomponer con este método. En la imagen vemos las descomposiciones de 121:

X1	X2	X3	X4	X5
3	5	113		121
5	7	109		121
11	13	97		121
29	31	61		121
41	43	37		121

En las cinco soluciones los dos primeros sumandos son primos gemelos.

Pares de primos de Sophie Germain

Por último, podemos exigir que dos de los tres primos de la suma sean un par de Sophie Germain, es decir, que sea primo p y también 2p+1, dejando libre el tercer sumando.

En este caso, están bastante equilibrados el conjunto de los que admiten esta descomposición y los que no:

Los primeros que sí la admiten son estos:

9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 57, 59, 60, 63, 65, 66, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 80, 81, 83, 86, 87, …

Por ejemplo, 87 se puede descomponer como:

87=5+11+71=11+23+53=23+47+17

En las tres sumas los dos primeros sumandos son pares de primos de Sofhie Germain.

Los hemos conseguido con Cartesius:

xtotal=2
xt=1..87
xt=filtro(primo)
es primo(2*x1+1)
es x1+2*x1+1+x2=87

Los primeros que no admiten ese tipo de suma son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 16, 22, 25, 28, 31, 32, 34, 40, 42, 43, 46, 49, 52, 55, 56, 58, 61, 62, 64, 67, 70, 76, 79, 82, 84, 85, 88, …

Por ejemplo, estas son las descomposiciones en tres primos del número 43:

3	3	37
3	11	29
3	17	23
5	7	31
5	19	19
7	7	29
7	13	23
7	17	19
11	13	19
13	13	17

En ninguna de ellas aparece una par de primos de Sophie Germain.

Se pueden idear otros condicionamientos con las sumas de Goldbach, pero a ninguna le hemos visto interés. Intenta, por ejemplo, sumas en las que los tres primos formen una progresión aritmética, y llegarás a una trivialidad, y es que coinciden con los triples de los números primos.

SUMA DE LOS PRIMEROS PRIMOS

En este capítulo vamos a trabajar un poco con las sumas de los primeros primos, y ampliaremos a alguna potencia. La idea es encontrar curiosidades o propiedades, así como la naturaleza de esas sumas.

Herramientas previas con Excel y Calc

Comenzamos con una función que sume potencias de los primeros primos:

```
Public Function sumprimoene(a, k) As Long
Dim prim, n, s As Long
prim = 2 ‘Primer primo
n = 1 ‘Contador
s = 2^k ‘Primera suma
While n < a
prim = primprox(prim) ‘A cada primo le encontramos el siguiente
n = n + 1 ’Se incrementa el contador
s = s + prim ^ k ‘Sumamos la potencia del primo
Wend
```

sumprimoene = s
End Function

Por ejemplo, con esta función obtenemos la suma de los cubos de los primeros 15 primos:

SUMPRIMOENE(15;3)=385054

Podemos comprobarlo con esta tabla:

Primo	Cubo
2	8
3	27
5	125
7	343
11	1331
13	2197
17	4913
19	6859
23	12167
29	24389
31	29791
37	50653
41	68921
43	79507
47	103823
Suma	**385054**

Versión PARI

La función básica en PARI es similar. Hemos usado la siguiente función IS en los valores 15 (número de primos) y 3 (exponente):

is(a,k)={my(s=2^k,n=1,p=2);while(n<a,p=nextprime(p+1);n+=1;s=s+p^k);s}

print(is(15,3))

En la web de PARI/GP hemos introducido este código para comprobar el resultado

```
? is(a,k)={my(s=2^k,n=1,p=2);while(n<a,p=nextprime(p+1);n+=1;s=s+p^k);s}
print(is(15,3))

385054
```

Versión elemental con el Buscador

Nuestro Buscador de Naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) suma primos, y veremos más adelante que también puede sumar potencias. Basta escribir la condición PRIMO y la de EVALUAR TOTALES. En la imagen figuran los primeros primos y sus sumas parciales:

Solución	Detalles
2	2
3	5
5	10
7	17
11	28
13	41
17	58
19	77
23	100
29	129
31	160

El resultado es 160.

Suma de primos igual a un primo

La suma de los primeros primos puede ser también un número primo. El primer caso elemental, además del mismo 2, es el 2+3=5, y el siguiente, 2+3+5+7=17

Con la función ya explicada en VBA de Excel se puede establecer una búsqueda sencilla de primos que son suma de los primeros primos. El resultado es:

N	Primo suma de N primos
1	2
2	5
4	17
6	41
12	197
14	281
60	7699
64	8893
96	22039
100	24133
102	25237
108	28697
114	32353
122	37561
124	38921
130	43201
132	44683

En la primera columna figura el número de primos sumados y en la segunda el primo resultante. Estos últimos están publicados en http://oeis.org/A013918

A013918 Primes equal to the sum of the first k primes for some k.

2, 5, 17, 41, 197, 281, 7699, 8893, 22039, 24133, 25237, 28697, 32353, 37561, 38921, 43201, 44683, 55837, 61027, 66463, 70241, 86453, 102001, 109147, 116533, 119069, 121631, 129419, 132059,

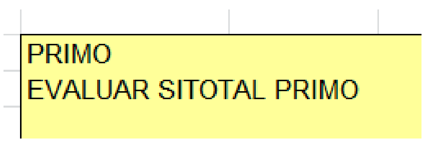
Nos vale en PARI el procedimiento publicado por Michael B. Porter en esa página:

n=0; forprime(k=2, 2300, n=n+k; if(isprime(n), print(n)))

Aquí aprovecha que *forprime* recorre los primos rápidamente.

Procedimiento con el Buscador

El carácter elemental de esta herramienta no permite bucles como los usados hasta ahora, pero una instrucción reciente nos permite visualizar los mismos resultados:



Indica que busquemos primos cuya suma sea también prima. Resulta:

Solución	Detalles
2	2 es primo
3	5 es primo
5	10
7	17 es primo
11	28
13	41 es primo
17	58
19	77
23	100
29	129
31	160
37	197 es primo
41	238
43	281 es primo
47	328
53	381
59	440

Resalta en la lista los totales que son primos.

Otros resultados

La suma puedes ser un cuadrado, aunque no abundan los resultados.

Cuadrados

Procedimientos similares a los anteriores nos dan hasta seis soluciones. Por ejemplo, con PARI usamos

n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(n), print1(n,", ")))

Obtenemos cuatro fácilmente:

```
? n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(n), print1(n,", ")))
100, 25633969, 212372329, 292341604,
```

Están publicados en http://oeis.org/A061890

100, 25633969, 212372329, 292341604, 3672424151449, 219704732167875184222756

Como estamos comparando números de naturaleza distinta, no es fácil descubrir propiedades.

Triangulares

Para saber si un número T es triangular basta con exigir que 8*T+1 sea cuadrado. Corregimos el código PARI y queda:

n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(8*n+1), print1(n,", ")))

Lo ejecutamos en la web de PARI:

```
? n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(8*n+1), print1(n,", ")))
10, 28, 133386, 4218060, 54047322253,
```

También están publicados:

http://oeis.org/A066527

A066527 Triangular numbers that for some k are also the sum of the first k primes.

10, 28, 133386, 4218060, 54047322253, 14756071005948636, 600605016143706003,

41181981873797476176,
240580227206205322973571,
1350027226921161196478736

Otros ejemplos

De números *oblongos* solo hemos encontrado el 2 entre los menores de 2*10^7. De *cubos*, ninguno. De la sucesión de Fibonacci, tres: 2, 5 y 2584 (entre los menores de 7*10^7)

Es normal que no se encuentren muchos.

Suma de cuadrados de primos

La función *sumprimoene* permite sumar cuadrados de primos. El resultado es

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS
1	4
2	13
3	38
4	87
5	208
6	377
7	666
8	1027
9	1556
10	2397
11	3358
12	4727
13	6408
14	8257

Es un cálculo fácil y están publicados los resultados en http://oeis.org/A024450

4, 13, 38, 87, 208, 377, 666, 1027, 1556, 2397, 3358, 4727, 6408, 8257, 10466, 13275, 16756, 20477, 24966, 30007, 35336, 41577, 48466, 56387, 65796, 75997, 86606 ,…

Como simple curiosidad, y para un estudio más sencillo, este sería el planteamiento con el Buscador de Naturales:

potencia 2
es bigomega(n)=2
evaluar totales

La primera condición detecta cuadrados, la segunda obliga a que la base sea un número primo y la tercera suma. El resultado, como era de esperar, coincide con los anteriores:

Solución	Detalles
4	4
9	13
25	38
49	87
121	208
169	377
289	666
361	1027
529	1556
841	2397
961	3358

Algunas propiedades

Los números primos pueden ser del tipo 4k+1 o 4k+3 (salvo el 2), pero sus cuadrados son siempre del tipo 4k+1, como se observa en estos desarrollos:

$(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4q+1$

$(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4r+1$

Esto hace que, al sumarlos, el 1 se vaya acumulando a 2, 3, 0, 1, 2…Los restos de estas sumas respecto al módulo 4 recorrerán el ciclo 0, 1, 2, 3…

Lo vemos en esta tabla, en la que hemos aplicado la función RESIDUO de Excel y Calc con módulo 4.

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS	Resto módulo 4
1	4	0
2	13	1
3	38	2
4	87	3
5	208	0
6	377	1
7	666	2
8	1027	3
9	1556	0
10	2397	1
11	3358	2
12	4727	3
13	6408	0
14	8257	1
15	10466	2
16	13275	3

Así que cada dos sumas nos encontraremos con un número par, y cada dos ellos con un múltiplo de 4.

Si relacionamos los restos con los valores de N nos resulta:

Las sumas de orden 2n-1 son todas pares.

Las de orden 4n-3 son múltiplos de 4

De igual forma, sabemos que todos los primos son del tipo 6k+1 o 6k-1 (salvo el 2). Sus cuadrados serán:

$(6k+1)^2 = 36k^2+12k+1=12m+1$

$(6k-1)^2 = 36k^2-12k+1=12m+1$

Así que en cada sumando (salvo el primero, 4) recorrerá es sus restos respecto a 12 todos los valores desde 0 hasta 11. Lo puedes comprobar aquí:

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS	Resto módulo 12
1	4	4
2	13	1
3	38	2
4	87	3
5	208	4
6	377	5
7	666	6
8	1027	7
9	1556	8
10	2397	9
11	3358	10
12	4727	11
13	6408	0
14	8257	1
15	10466	2
16	13275	3
17	16756	4
18	20477	5
19	24966	6

De esta tabla se deduce que las sumas de orden 3n+1 son todas números múltiplos de 3, pues equivalen a 12m, 12m+3, 12m+6 o 12m+9.

Así podríamos ir descubriendo otras propiedades similares. Las tienes en la página

http://oeis.org/A024450

Las demás sumas, como las del tipo 12k+7 pueden ser números primos. Vemos que es posible, que en la segunda columna de la siguiente tabla son todos primos.

N	SUMA N PRIMOS AL CUADRADO	RESTO MOD. 12
2	13	1
18	20477	5
26	75997	1
36	239087	11
68	2210983	7
78	3579761	5
144	29194283	11
158	40002073	1
164	45448471	7
174	55600481	5
192	77290091	11
212	108095623	7
216	114986483	11
236	155637463	7
264	226226771	11
288	302920139	11
294	324657881	5
338	519681709	1

En la tabla se observa algo esperable, y es que los restos módulo 12 solo pueden ser 1, 5, 7 y 11, aunque aquí no forman una sucesión periódica. También en los valores de N faltan los considerados en los párrafos anteriores, como 2n-1, 3n+1, 4n-3, …Es evidente que todos son pares.

Están publicados en http://oeis.org/A098562

Parece ser que el único cuadrado en la suma de cuadrados de primos es el 4 (conjetura). No se han encontrado cubos. De la sucesión de Fibonacci aparecen 13 y 377. De triangulares aparecen dos, 666 y 5022865. De oblongos no aparecen.

Suma de cubos de primos

Aquí no se esperan propiedades destacadas, pero lo intentamos.

Las primeras sumas de cubos de primos son del tipo:

$(4k+1)^3=64k^3+48k^2+12k+1=4m+1$

$(4k-1)^3=64k^3-48k^2+12k-1=4m-1=4m+3$

Los restos 1 y 3, al sumarse, producen todos los restos posibles: +1=2, 1+2=3, 1+3=0, 0+1=1, …Así, en la siguiente tabla aparecen todos los restos módulo 4:

N	Suma cubos de primos	Restos mod. 4
1	8	0
2	35	3
3	160	0
4	503	3
5	1834	2
6	4031	3
7	8944	0
8	15803	3
9	27970	2
10	52359	3
11	82150	2
12	132803	3
13	201724	0
14	281231	3
15	385054	2
16	533931	3
17	739310	2
18	966291	3
19	1267054	2
20	1624965	1
21	2013982	2

Esto nos abre posibilidades de buscar primos y, ciertamente, se encuentran con relativa facilidad:

503, 15803, 35287433, 106954091, 3024050339, 3661922443, 7223017657, 10412687891, 11190761311, 12004517137, 25886083477, 36501131837, …

En este tema casi todo está ya publicado. Estos pertenecen a http://oeis.org/A066525 y no parecen tener propiedades interesantes.

APÉNDICE

FUNCIÓN *ESPRIMO*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve True si es primo y False si no lo es.

Código en Basic

Public function esprimo(a as long) as Boolean

```
dim n as long
dim es as boolean

if a=1 then es=false
if a=2 then es=true
if a>2 then
n=2:es=true
while n<=sqr(a) and es=true
if a MOD n=0 then es=false
n=n+1
wend
endif
esprimo=es
end function
```

FUNCIÓN *PRIMANT*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve el mayor primo que es inferior a él

Código en Basic

```
Public Function primant(a) as long
dim  p, prim as long
dim sale as boolean

p=a-1:sale=false:prim=0 (prepara las variables)

while not sale (bucle para buscar el número primo)
if esprimo(p) then     prim=p
(la variable prim recoge el primo encontrado)
   sale=true (si es primo se sale del bucle)
   end if
p=p-1
wend  (fin del bucle)
primant=prim
end function
```

FUNCIÓN *PRIMPROX*

Argumento: Un número entero

Valor: Devuelve el menor primo que es superior a él

Código en Basic

```
Public Function primprox(a) as long
dim  p, prim as long
dim sale as boolean

p=a+1:sale=false:prim=0 (prepara las variables)

while not sale (bucle para buscar el número primo)
if esprimo(p) then
   prim=p  (la variable prim recoge el primo
encontrado)
   sale=true (si es primo se sale del bucle)
   end if
p=p+1
wend  (fin del bucle)
primprox=prim
end function
```