Números y hoja de cálculo XV

			TAU_3(3)		
		1	1	3	
	4	4	4	12	
TAU_3(4)	2	2	2	6	Divisores de 12
	1	1	1	3	
	2	2	2	6	Divisores de 6
	1	1	1	3	
	1	1	1	3	Divisores de 3
		TAU_3(12)			

Curso 2022-23

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

Esta publicación recoge las entradas publicadas en mi blog "Números y hoja de cálculo" en el curso (o temporada) 2022-23.

(Ver http://hojaynumeros.blogspot.com/)

En ellas se ve una evolución lógica desde estudios teóricos a curiosidades y búsquedas. La razón es que el nivel que se le desea dar al blog no permite profundizar en cuestiones más complejas, y las elementales han sido ya estudiadas casi todas a lo largo de quince cursos.

Se han incluido "Regresos", que son nuevas visiones de estudios realizados de forma más apresurada o sin contar con herramientas que ahora son accesibles. Se seguirá esa línea, porque completan cuestiones que pudieran haberse quedado menos estudiadas.

CONTENIDO

ALGORITMOS Y CURIOSIDADES

NÚMEROS PRIMOS DEL TIPO HP

Como es costumbre en este blog, se extraen temas de los cálculos que publicamos en Twitter @connumeros. El día 31/01/2023, estudiando el número 31123 vimos que OEIS lo calificaba como *homeprime* con cuatro orígenes. Mantengo esta denominación en inglés porque no he encontrado traducción adecuada. Lo que sigue no tiene un gran interés matemático, pero supone un cierto esfuerzo en la búsqueda de algoritmos y su codificación.

La idea para estos números es la siguiente: Dado un número compuesto cualquiera, como por ejemplo, 42, lo descomponemos en factores primos y los concatenamos de menor a mayor para formar otro número (en base 10). En este caso, 42=2*3*7, luego concatenamos y llegamos a 237. Si existen primos repetidos, no usamos exponentes, sino que los mantenemos repetidos. Por ejemplo, $24=2^3*3$ lo convertimos en 2223. Si el resultado es compuesto, como es el caso de 237=3*79, lo convertimos en 379. Así seguimos hasta llegar a un primo. Este sería el caso de 379, luego sería *home prime*, y lo podemos representar como HP(42). Un número primo p cumplirá HP(p)=p.

Esto es un entretenimiento sin más trascendencia, publicado por primera vez por Jeffrey Heleen en 1990. Al experimentar con esta idea se descubrió que era un algoritmo que podía dar más juego de lo esperado. Por ejemplo, la función HP no es biunívoca. Puedes comprobar que 379 es imagen de tres números compuestos distintos: 42, 74, 237 y el mismo 379. Esto es lo que parece ocurrir con el número 31123, que posee cuatro oígenes. Lo iremos descubriendo paso a paso.

Algoritmo básico

Podemos idear una función para la operación básica de concatenar factores, y luego pasaremos a reiterarla.

Para hoja de cálculo

La hoja más usada, Excel, presenta el problema de que al representar un número mediante texto le añade un espacio en blanco. Por eso solemos usar en este blog la función *ajusta*, que le elimina ese carácter si ha lugar. La hemos usado varias veces aquí.

Function ajusta$(a)
Dim d$

d$ = Str$(a) ‘Convierte el número en texto
While Left$(d$, 1) = " " ‘Va eliminando espacios en blanco
d$ = Right$(d$, Len(d$) - 1)
Wend

ajusta$ = d$
End Function

Con ella podemos concatenar caracteres sin problema. A continuación vemos la operación básica de concatenar factores primos:

Function concfactores(n)

Dim f, a
Dim s$

s = "" ‘Se inicia una cadena de texto
a = n 'Copia el valor de n
f = 2 'Inicia el listado de primos
While f <= a 'Recorre los primos posibles
While a / f = a \ f
a = a / f: s = s + ajusta(f) ‘Si es factor, concatena
Wend
If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2 ‘Avanza a otro primo
Wend
concfactores = Val(s) ‘Convierte la concatenación en número
End Function

Podemos aplicar esta función a cualquiera de nuestros ejemplos, 42, 237, 74 o 379 para comprobar su funcionamiento. Por ejemplo, CONCFACTORES(144)= 222233.

Es fácil ver que esta operación no disminuye el valor de un número, por lo que si reiteramos, siempre nos encontraremos con una sucesión no decreciente.

Charles R Greathouse IV propone en OEIS un procedimiento PARI similar, pero que se aprovecha de que este lenguaje ya suministra el vector *factor* con los factores primos y sus exponentes, y solo hay que extraerlos y añadirlos a un **Str**. El final, con **eval(s)** lo convierte en número.

```
step(n)=my(f=factor(n), s=""); for(i=1, #f~, for(j=1, f[i, 2], s=Str(s, f[i, 1]))); eval(s)
```

Si lo que deseamos es reproducir la función *concfactores* podemos usar este otro código, que no se apoya en la existencia del vector *factor*:

```
step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}

print(step(144))
```

Está preparado para concatenar los factores de 144, con el resultado de 222233.

Búsqueda del HP(p)

Con esta función ya podemos reiterar hasta llegar al primer primo, el *homeprime*:

```
Function hp(n)
```

Dim p, q, r

p = n ‘Copia n
q = 1 ‘Inicia variable auxiliar

Do ‘Bucle de búsqueda
r = p
p = concfactores(p) ‘Da un paso de concatenación
q = p
Loop Until r = q ‘Si son iguales, es que es primo. Final.
hp = p
End Function

Esta función es útil si las iteraciones no llegan muy lejos, pues se entra en la zona en la que las hojas de cálculo pierden exactitud. Probamos con algunos ejemplos:

24	331319
33	311
18	233
220	22511
222	#¡VALOR!

Observamos que, mientras los primeros llegan al *homeprime* sin problemas, el 222 sobrepasa la posibilidades de Excel. Podemos seguir sus trayectorias paso a paso:

24	2223	331319	331319	331319	331319
33	311	311	311	311	311
18	233	233	233	233	233
220	22511	22511	22511	22511	22511
222	2337	33371313	311123771	7149317941	#¡VALOR!

Los primeros se van estabilizando hasta llegar a un número primo, pero el 222 sigue buscando hasta que sobrepasa la capacidad de cálculo.

Podemos traducir el algoritmo a PARI, que admite todas las cifras:

step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}

hp(n)={my(p=n,q=1);until(r==p,r=p;p=step(p);q=p);p}

print(hp(222))

Se conjetura que cada compuesto posee un *homeprime,* pero en algunos, como el 49, no se conoce el final del proceso. Tampoco se ha logrado en 77, 49, 146, 246, 312, 320…En nuestro equipo ha resultado difícil seguir el proceso para 222. Se ha llegado a estos pasos:

222, 2337, 31941, 33371313, 311123771, 7149317941, 22931219729, 112084656339, 3347911118189, 11613496501723, 97130517917327, …

El problema reside en la factorización, que puede llegar a ser inabordable.

Búsqueda de los orígenes

Nos queda un último trabajo, y es buscar los compuestos que terminan en un número primo dado, como el 31123 del primer ejemplo. Podíamos recorrer los compuestos menores que el primo, aplicarles la función **hp(n)** y comprobar si coincide con el primo estudiado, pero, como vimos en el párrafo anterior, el proceso se puede bloquear al llegar a ciertas factorizaciones.

Para evitar estos bloqueos, reproduciremos los pasos, pero parando el proceso si se sobrepasa el número primo dado. Con la siguiente función se resuelve el problema, aunque aumentamos algo la complejidad:

```
Function origenhp$(n)
Dim i, j, m
Dim s$

s = "" ‘Contenedor de las soluciones
If esprimo(n) Then ‘Solo actúa sobre primos
For i = 4 To n – 1 ‘Recorre los posibles compuestos
m = 0 ‘Indicador de solución
j = concfactores(i) ‘Damos pasos hacia HP(i)
While j <= n And m = 0 ‘Nos detenemos al llegar a n
If j = n Then s = s + Str$(i) + ", ": m = 1 ‘Hay un origen
If esprimo(j) Then m = 1 ‘Se llega a un primo menor que n
```

If m = 0 Then j = concfactores(j) ‘Si no es solución, se avanza
Wend
Next i
End If
origenhp = s
End Function

Con este procedimiento encontraremos los orígenes de un presunto *homeprime*. Lo podemos aplicar a nuestro ejemplo de 379, y resultan los orígenes conocidos, a los que hay que añadir él mismo:

379
42, 74, 237,

Queda comprobado su funcionamiento. Ahora hay que volver al principio, y es ver qué tres orígenes tiene el número 31123. Tardará un poco en dar la solución, que es:

N	31123		
Orígenes	413, 759, 3369,		
	413	759	3369
HP orígenes	31123	31123	31123

Hemos resuleto el problema, los cuatro orígenes son 413, 759, 3369, 31123. En la cuarta fila se compruebas los tres primeros con la función HP. En la siguiente tabla vemos los pasos necesarios para llegar a 31123.

Pasos		
413	759	31123
759	31123	
3369	31123	

Para emprender otras vbúsquedas posibles, insertamos el código PARI que traduce este procedimiento:

```
step(p)={my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>2));eval(s)}

origenhp(n)={my(i,j,m,s="");if(isprime(n),for(i=4,n-1,m=0;j=step(i);while(j<=n&&m==0,if(j==n,s=Str(s,", ",i);m=1);if(isprime(j),m=1);if(m==0,j=step(j)))));s}

print(origenhp(31123))
```

```
0,if(j==n,s=Str(s,", ",i);m=1);if(isprime(j),m=1);if(m==0,j=step(j)))));s
, 42, 74, 237
(19:51) gp > \r ini.txt
%7 = (p)->my(s="",a=p,f=2);while(f<=a,while(a%f==0,a=a/f;s=Str(s,f));f=f+1+(f<>
));eval(s)
%8 = (n)->my(i,j,m,s="");if(isprime(n),for(i=4,n-1,m=0;j=step(i);while(j<=n&&m=
0,if(j==n,s=Str(s,", ",i);m=1);if(isprime(j),m=1);if(m==0,j=step(j)))));s
, 413, 759, 3369
(19:52) gp >
```

Esto ha sido una práctica sobre algoritmos, porque la cuestión carece de verdadero interés matemático, pero como tantas otras, es útil como pasatiempo y para pulir códigos. En nuestro caso, nos resultó interesante obviar las limitaciones de las hojas de cálculo en el tratamiento de números naturales grandes. Se logra a medias, porque con instrumentos más potentes siguen existiendo lagunas también.

TRÍOS DE CUADRADOS Y DE CUBOS

Releyendo el libro “Las Matemáticas de OZ” de Clifford A. Pickover he encontrado este acertijo: “Encontrar tres números diferentes cuya suma de cubos sea un cuadrado y la de sus cuadrados sea un cubo”. He visto que es una buena razón para practicar algoritmos.

Los tres números iguales

Sin la exigencia de que sean diferentes obtendríamos rápidamente el trío (3, 3, 3), pues $3^2+3^2+3^2=27=9^3$ y $3^3+3^3+3^3=81=9^2$.

También es válido (192,192,192): $192^2+192^2+192^2=48^3$ y $192^3+192^3+192^3=4608^2$

En este caso de que los tres sean iguales se resuelve fácilmente por descomposición en factores primos, pues ambas sumas se reducen a $3n^3=p^2$, $3n^2=q^3$. Debemos buscar un número tal que si e_3 es el exponente de 3 en el mismo, se cumpla que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 y que $1+2e_3$ lo sea de 3. Claramente es válido en el 3, lo que daría la primera solución. También se cumple en todos aquellos números en los que el exponente de 3 es 1, como $192=3*2^6$. En el resto de casos, el que $1+3e_3$ sea múltiplo de 2 nos obliga a que e_3 sea impar, y el que $1+2e_3$ sea múltiplo de 3 a que e_3 tenga la forma 3k+1 (es fácil razonarlo). Así que los exponentes válidos para el 3 serán 1, 7,13,19,…tipo 6k+1.

En el resto de factores primos del número no se ven afectados sus exponentes por el factor 3, luego deberán ser tales que al multiplicarlos por 3, para formar los cubos, el resultado sea par, luego serán múltiplos de 2. Igualmente, al multiplicarlos por 2, el resultado ha de ser un cubo, luego sus exponentes serán múltiplos de 3. Los únicos exponentes que cumplen esto son los múltiplos de 6, luego ya lo tenemos resuelto:

Si los tres números son iguales, el exponente de 3 ha de ser del tipo 6k+1 y los del resto de factores primos, del tipo 6k.

Hemos realizado un búsqueda con Excel, y las primeras soluciones son

N	FACTORES
3	[3,1]
192	[2,6][3,1]
2187	[3,7]
12288	[2,12][3,1]
46875	[3,1][5,6]
139968	[2,6][3,7]
352947	[3,1][7,6]
786432	[2,18][3,1]
1594323	[3,13]

Se observa que los exponentes (segundo número de cada corchete) cumplen lo establecido.

Esto nos permite encontrar más soluciones y comprobar que existen infinitas.

Los tres números diferentes

En este caso nos vemos obligados a usar algún algoritmo. No es difícil, pero sí lento. Para cada N recorremos todos los pares de números menores que N, diferentes de N y entre sí. Les aplicamos la condición de Pickover e imprimimos si es válida. Desgraciadamente, es un proceso lento, pero se consiguen resultados.

Usamos una función dependiente de N:

Function tresnumeros$(n) ’ Es tipo texto para un conjunto

Dim i, j
Dim s$

s = ""
For i = 2 To n – 1 ‘Primer número, que no llega a n
For j = 1 To i – 1’ Segundo número, inferior al primero
‘Aplicamos el criterio
If escuad(i ^ 3 + j ^ 3 + n ^ 3) And escubo(i ^ 2 + j ^ 2 + n ^ 2) Then s = s + " # " + Str$(n) + " " + Str$(i) + " " + Str$(j) ‘Solución
Next j
Next i
tresnumeros = s
End Function

Si no es solución, devuelve la cadena vacía “” y si lo es, un texto con los tres números.

Al ser un algoritmo con dos bucles, se tarda mucho en encontrar soluciones. Las primeras son:

252 234 198
464 304 256

A partir de la siguiente, la hoja de cálculo deja de ser fiable para números enteros.

Podemos probar una versión para PARI:

```
is(n)={my(i=1,j=1,m=0,v=[0,0,0]);for(i=1,n-1,m=0;for(j=1,i-1,if(ispower(i^2+j^2+n^2,3)&&issquare(i^3+j^3+n^3),m=1;v[1]=n;v[2]=i;v[3]=j;print(v))));m}
for(i=1,10000,if(is(i),print(i)))
```

Es más complicada de seguir, pero nos da alguna solución más en un tiempo de proceso razonable:

252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030
4046, 2600, 1122
4394, 4056, 1690

Comprobamos la última solución:

$4394^2+4056^2+1690^2=338^3$
$4394^3+4056^3+1690^3= 395460^2$

Sin restricción de ser diferentes

En ese caso, las variables i, j del algoritmo las dejaremos recorrer todo el rango entre 1 y N. Así se obtendrán todas las soluciones posibles, en la siguiente tabla, hasta un tope de 5000:

3, 3, 3
192, 192, 192
252, 234, 198
464, 304, 256
2060, 1854, 1030
2187, 2187, 2187
4046, 2600, 1122

He probado a comparar otras potencias con un exponente mayor, pero resultan cálculos muy lentos y sin resultado interesante. Sin embargo, al introducir la potencia de exponente 1, las soluciones se han multiplicado. Por ejemplo, este listado corresponde al caso de que los cubos y también la suma con exponente 1 sumen ambas un cuadrado:
6, 2, 1

14, 9, 2
15, 13, 8
16, 14, 6
19, 9, 8
20, 10, 6
20, 17, 12
24, 8, 4
27, 19, 3
28, 22, 14
29, 15, 5
29, 19, 16
35, 25, 4
36, 17, 11

Y siguen muchos más con frecuencia similar. Un ejemplo:

$27+19+3=49=7^2$
$27^3+19^3+3^3=163^2$

Con ligeros retoques en los códigos se pueden abordar otros casos similares, pero contando con un equipo que no sea muy lento en los cálculos.

SUMA DE LOS PRIMEROS PRIMOS

En este capítulo vamos a trabajar un poco con las sumas de los primeros primos, y ampliaremos a alguna potencia. La idea es encontrar curiosidades o propiedades, así como la naturaleza de esas sumas.

Herramientas previas con Excel y Calc

Comenzamos con una función que sume potencias de los primeros primos:

Public Function sumprimoene(a, k) As Long
Dim prim, n, s As Long

prim = 2 ‘Primer primo
n = 1 ‘Contador
s = 2^k ‘Primera suma
While n < a
prim = primprox(prim) ‘A cada primo le encontramos el siguiente
n = n + 1 ’Se incrementa el contador
s = s + prim ^ k ‘Sumamos la potencia del primo
Wend
sumprimoene = s
End Function

Por ejemplo, con esta función obtenemos la suma de los cubos de los primeros 15 primos:

SUMPRIMOENE(15;3)=385054

Podemos comprobarlo con esta tabla:

Primo	Cubo
2	8
3	27
5	125
7	343
11	1331
13	2197
17	4913
19	6859
23	12167
29	24389
31	29791
37	50653
41	68921
43	79507
47	103823
Suma	**385054**

Versión PARI

La función básica en PARI es similar. Hemos usado la siguiente función IS en los valores 15 (número de primos) y 3 (exponente):

is(a,k)={my(s=2^k,n=1,p=2);while(n<a,p=nextprime(p+1);n+=1;s=s+p^k);s}

print(is(15,3))

En la web de PARI/GP hemos introducido este código para comprobar el resultado

```
? is(a,k)={my(s=2^k,n=1,p=2);while(n<a,p=nextprime(p+1);n+=1;s=s+p^k);s}
print(is(15,3))

385054
```

Versión elemental con el Buscador

Nuestro Buscador de Naturales

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) suma primos, y veremos más adelante que también puede sumar potencias. Basta escribir la condición PRIMO y la de EVALUAR TOTALES. En la imagen figuran los primeros primos y sus sumas parciales:

Solución	Detalles
2	2
3	5
5	10
7	17
11	28
13	41
17	58
19	77
23	100
29	129
31	160

El resultado es 160.

Suma de primos igual a un primo

La suma de los primeros primos puede ser también un número primo. El primer caso elemental, además del mismo 2, es el 2+3=5, y el siguiente, 2+3+5+7=17

Con la función ya explicada en VBA de Excel se puede establecer una búsqueda sencilla de primos que son suma de los primeros primos. El resultado es:

N	Primo suma de N primos
1	2
2	5
4	17
6	41
12	197
14	281
60	7699
64	8893
96	22039
100	24133
102	25237
108	28697
114	32353
122	37561
124	38921
130	43201
132	44683

En la primera columna figura el número de primos sumados y en la segunda el primo resultante. Estos últimos están publicados en http://oeis.org/A013918

A013918 Primes equal to the sum of the first k primes for some k.

2, 5, 17, 41, 197, 281, 7699, 8893, 22039, 24133, 25237, 28697, 32353, 37561, 38921, 43201, 44683, 55837, 61027, 66463, 70241, 86453, 102001, 109147, 116533, 119069, 121631, 129419, 132059,

Nos vale en PARI el procedimiento publicado por Michael B. Porter en esa página:

n=0; forprime(k=2, 2300, n=n+k; if(isprime(n), print(n)))

Aquí aprovecha que *forprime* recorre los primos rápidamente.

Procedimiento con el Buscador

El carácter elemental de esta herramienta no permite bucles como los usados hasta ahora, pero una instrucción reciente nos permite visualizar los mismos resultados:

PRIMO
EVALUAR SITOTAL PRIMO

Indica que busquemos primos cuya suma sea también prima. Resulta:

Solución	Detalles
2	2 es primo
3	5 es primo
5	10
7	17 es primo
11	28
13	41 es primo
17	58
19	77
23	100
29	129
31	160
37	197 es primo
41	238
43	281 es primo
47	328
53	381
59	440

Resalta en la lista los totales que son primos.

Otros resultados

La suma puedes ser un cuadrado, aunque no abundan los resultados.

Cuadrados

Procedimientos similares a los anteriores nos dan hasta seis soluciones. Por ejemplo, con PARI usamos

n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(n), print1(n,", ")))

Obtenemos cuatro fácilmente:

```
? n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(n), print1(n,", ")))
100, 25633969, 212372329, 292341604,
```

Están publicados en http://oeis.org/A061890

100, 25633969, 212372329, 292341604, 3672424151449, 219704732167875184222756

Como estamos comparando números de naturaleza distinta, no es fácil descubrir propiedades.

Triangulares

Para saber si un número T es triangular basta con exigir que 8*T+1 sea cuadrado. Corregimos el código PARI y queda:

n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(8*n+1), print1(n,", ")))

Lo ejecutamos en la web de PARI:

```
? n=0; forprime(k=2, 2*10^6, n=n+k; if(issquare(8*n+1), print1(n,", ")))
10, 28, 133386, 4218060, 54047322253,
```

También están publicados:

http://oeis.org/A066527

A066527 Triangular numbers that for some k are also the sum of the first k primes.

10, 28, 133386, 4218060, 54047322253, 14756071005948636, 600605016143706003, 41181981873797476176, 240580227206205322973571, 1350027226921161196478736

Otros ejemplos

De números *oblongos* solo hemos encontrado el 2 entre los menores de 2*10^7. De *cubos*, ninguno. De la sucesión de Fibonacci, tres: 2, 5 y 2584 (entre los menores de 7*10^7)

Es normal que no se encuentren muchos.

Suma de cuadrados de primos

La función *sumprimoene* permite sumar cuadrados de primos. El resultado es

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS
1	4
2	13
3	38
4	87
5	208
6	377
7	666
8	1027
9	1556
10	2397
11	3358
12	4727
13	6408
14	8257

Es un cálculo fácil y están publicados los resultados en http://oeis.org/A024450

4, 13, 38, 87, 208, 377, 666, 1027, 1556, 2397, 3358, 4727, 6408, 8257, 10466, 13275, 16756, 20477, 24966, 30007, 35336, 41577, 48466, 56387, 65796, 75997, 86606,…

Como simple curiosidad, y para un estudio más sencillo, este sería el planteamiento con el Buscador de Naturales:

potencia 2
es bigomega(n)=2
evaluar totales

La primera condición detecta cuadrados, la segunda obliga a que la base sea un número primo y la tercera suma. El resultado, como era de esperar, coincide con los anteriores:

Solución	Detalles
4	4
9	13
25	38
49	87
121	208
169	377
289	666
361	1027
529	1556
841	2397
961	3358

Algunas propiedades

Los números primos pueden ser del tipo 4k+1 o 4k+3 (salvo el 2), pero sus cuadrados son siempre del tipo 4k+1, como se observa en estos desarrollos:

$(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4q+1$

$(4k+3)^2=16k^2+24k+9=4r+1$

Esto hace que, al sumarlos, el 1 se vaya acumulando a 2, 3, 0, 1, 2…Los restos de estas sumas respecto al módulo 4 recorrerán el ciclo 0, 1, 2, 3…

Lo vemos en esta tabla, en la que hemos aplicado la función RESIDUO de Excel y Calc con módulo 4.

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS	Resto módulo 4
1	4	0
2	13	1
3	38	2
4	87	3
5	208	0
6	377	1
7	666	2
8	1027	3
9	1556	0
10	2397	1
11	3358	2
12	4727	3
13	6408	0
14	8257	1
15	10466	2
16	13275	3

Así que cada dos sumas nos encontraremos con un número par, y cada dos ellos con un múltiplo de 4.

Si relacionamos los restos con los valores de N nos resulta:

Las sumas de orden 2n-1 son todas pares.

Las de orden 4n-3 son múltiplos de 4

De igual forma, sabemos que todos los primos son del tipo 6k+1 o 6k-1 (salvo el 2). Sus cuadrados serán:

$(6k+1)^2 = 36k^2+12k+1=12m+1$

$(6k-1)^2 = 36k^2-12k+1=12m+1$

Así que en cada sumando (salvo el primero, 4) recorrerá es sus restos respecto a 12 todos los valores desde 0 hasta 11. Lo puedes comprobar aquí:

N	SUMA CUADRADOS DE PRIMOS	Resto módulo 12
1	4	4
2	13	1
3	38	2
4	87	3
5	208	4
6	377	5
7	666	6
8	1027	7
9	1556	8
10	2397	9
11	3358	10
12	4727	11
13	6408	0
14	8257	1
15	10466	2
16	13275	3
17	16756	4
18	20477	5
19	24966	6

De esta tabla se deduce que las sumas de orden 3n+1 son todas números múltiplos de 3, pues equivalen a 12m, 12m+3, 12m+6 o 12m+9.

Así podríamos ir descubriendo otras propiedades similares. Las tienes en la página http://oeis.org/A024450

Las demás sumas, como las del tipo 12k+7 pueden ser números primos. Vemos que es posible, que en la segunda columna de la siguiente tabla son todos primos.

N	SUMA N PRIMOS AL CUADRADO	RESTO MOD. 12
2	13	1
18	20477	5
26	75997	1
36	239087	11
68	2210983	7
78	3579761	5
144	29194283	11
158	40002073	1
164	45448471	7
174	55600481	5
192	77290091	11
212	108095623	7
216	114986483	11
236	155637463	7
264	226226771	11
288	302920139	11
294	324657881	5
338	519681709	1

En la tabla se observa algo esperable, y es que los restos módulo 12 solo pueden ser 1, 5, 7 y 11, aunque aquí no forman una sucesión periódica. También en los valores de N faltan los considerados en los párrafos anteriores, como 2n-1, 3n+1, 4n-3,…Es evidente que todos son pares.

Están publicados en http://oeis.org/A098562

Parece ser que el único cuadrado en la suma de cuadrados de primos es el 4 (conjetura). No se han encontrado cubos. De la sucesión de Fibonacci aparecen 13 y 377. De triangulares aparecen dos, 666 y 5022865. De oblongos no aparecen.

Suma de cubos de primos

Aquí no se esperan propiedades destacadas, pero lo intentamos.

Las primeras sumas de cubos de primos son del tipo:

$(4k+1)^3=64k^3+48k^2+12k+1=4m+1$

$(4k-1)^3=64k^3-48k^2+12k-1=4m-1=4m+3$

Los restos 1 y 3, al sumarse, producen todos los restos posibles: +1=2, 1+2=3, 1+3=0, 0+1=1,…Así, en la siguiente tabla aparecen todos los restos módulo 4:

N	Suma cubos de primos	Restos mod. 4
1	8	0
2	35	3
3	160	0
4	503	3
5	1834	2
6	4031	3
7	8944	0
8	15803	3
9	27970	2
10	52359	3
11	82150	2
12	132803	3
13	201724	0
14	281231	3
15	385054	2
16	533931	3
17	739310	2
18	966291	3
19	1267054	2
20	1624965	1
21	2013982	2

Esto nos abre posibilidades de buscar primos y, ciertamente, se encuentran con relativa facilidad:

503, 15803, 35287433, 106954091, 3024050339, 3661922443, 7223017657, 10412687891, 11190761311, 12004517137, 25886083477, 36501131837,…

En este tema casi todo está ya publicado. Estos pertenecen a http://oeis.org/A066525 y no parecen tener propiedades interesantes.

SUMAS CON ANAGRAMÁTICOS

Con este título estudiaremos números que comparten cifras y están relacionados mediante algunas operaciones entre ellos.

Sumandos anagramáticos

Comenzamos con aquellos números que son el total de una suma de dos números anagramáticos con ellos, es decir, los tres datos han de compartir cifras y con la misma frecuencia. Aunque están publicados casos similares, aquí exigiremos que los dos sumandos anagramáticos tengan el mismo número de cifras, como en

954=459+495

5238=2385+2853

No tendremos en cuenta ningún sumando que comience por cero.

Para encontrarlos diseñaremos una función de VBasic para Excel y Calc. En ella se usará la función *cifras_identicas*, cuyo código puedes encontrar en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/consecutivos-con-las-mismas-cifras.html

También usamos nuestra función *numcifras*

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/04/cancelaciones-anomalas-12.html)

Function dobleanagram$(n)
Dim a, m
Dim s$

s$ = "" ‘Contenedor de sumandos
m = numcifras(n) ‘Cuenta las cifras
For a = 10 ^ (m - 1) To n / 2 ‘Busca con el mismo número de cifras
If cifras_identicas(a, n) And cifras_identicas(n - a, n) Then s = s + " # " + Str$(a) + "+" + Str$(n - a) ‘Solución
Next a
dobleanagram = s
End Function

Con esta función obtenemos los primeros resultados:

954	# 459+ 495
2961	# 1269+ 1692
4932	# 2439+ 2493
5013	# 1503+ 3510
5022	# 2502+ 2520
5031	# 1530+ 3501
5238	# 2385+ 2853
5823	# 2538+ 3285
6147	# 1476+ 4671
6417	# 1746+ 4671
7614	# 1467+ 6147
7641	# 1467+ 6174
8235	# 2853+ 5382
8523	# 3285+ 5238
9045	# 4095+ 4950
9108	# 1089+ 8019
9180	# 1089+ 8091
9324	# 4392+ 4932
9504	# 4095+ 5409
9540	# 4590+ 4950
9594	# 4599+ 4995
9612	# 2691+ 6921
9684	# 4698+ 4986
9774	# 4797+ 4977
9864	# 4896+ 4968
9954	# 4959+ 4995

Llama la atención, y era algo esperable, que las soluciones se pueden agrupar en familias, como 954, 9045, 9504, 9540, 9954…Es fácil ver que con un simple cambio se reproducen resultados conocidos. El arrastre de cifras en las sumas influirá en que aparezcan más o menos familias.

Todos los resultados de este problema han de ser múltiplos de 9. En efecto, si los dos sumandos poseen las mismas cifras, serán también iguales sus restos módulo 9, con lo que el total tendría como resto su suma, y al tener las mismas cifras, la única posibilidad es que esos restos sean los tres nulos.

Un resultado similar está publicado en https://oeis.org/A121969, pero ahí se admiten números que comiencen por cero. Basta cambiar una línea en la función para obtener estos resultados, pero no merece la pena.

Anagramático más sus cifras

Otro caso relevante es el de un número igual a un anagramático con él sumado con sus cifras. Tiene un cierto parecido con el caso anterior, porque, en realidad, se usan las mismas cifras, pero aquí están como sumandos separados. Es la situación opuesta a la de los *autonúmeros*, que no admiten ninguna descomposición de este tipo

(ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/03/autonumeros-1.html)

Existe una forma muy sencilla de resolver este caso, y es restarle al número sus propias cifras, y ver si la diferencia es anagramática con el total. Para las búsquedas necesitaremos otra función nuestra, *sumacifras(n,k)*, que suma las cifras de n elevadas previamente al exponente k. Esta función la puedes encontrar en el enlace del párrafo anterior.

Para este caso y los siguientes usaremos esta otra función:

Function autoanagram$(n, k)
Dim a, m
Dim s$

s = ""
m = numcifras(n)
a = n - sumacifras(n, k) ‘Al número le restamos potencias de sus cifras
If cifras_identicas(n, a) Then s = s + " # " + Str$(a) ‘Otra nueva solución
autoanagram = s
End Function

Si la usamos con el parámetro k igual a 1, obtendremos las primeras soluciones:

54	# 45
243	# 234
297	# 279
432	# 423
486	# 468
621	# 612
675	# 657
810	# 801
864	# 846
1143	# 1134
1197	# 1179
1332	# 1323
1386	# 1368
1521	# 1512
1575	# 1557
1710	# 1701
1764	# 1746
1908	# 1890
1953	# 1935

Puedes comprobar cualquiera de la lista:

810=801+8+0+1

1953=1935+1+9+3+5

Aquí también, y por la misma razón, los dos números implicados han de ser múltiplos de 9.

Estos números sí están publicados, con el mismo planteamiento nuestro, en https://oeis.org/A248209

En la página enlazada puedes estudiar los códigos PARI que contiene. El segundo es similar al usado aquí. No hemos acudido a este lenguaje porque la hoja de cálculo suele ser rápida en estos casos. Tampoco hemos exigido que las soluciones sean múltiplos de 9 por la misma razón. No suelen ser búsquedas muy lentas.

Otros casos con potencias

Como *sumacifras(n;k)* admite potencias, es sencillo ampliar la búsqueda a los casos en los que las cifras estén elevadas al cuadrado, cubo o cualquier otra potencia.

Cifras al cuadrado

Si tomamos k=2 en *sumacifras* dentro de la función *autoanagram*, resultarán parejas de anagramáticos que se diferencien en la suma de los cuadrados de sus cifras.

221	# 212
271	# 217
547	# 457
1341	# 1314
1351	# 1315
1438	# 1348
1762	# 1672
1927	# 1792
1977	# 1797
2021	# 2012
2071	# 2017
2210	# 2201
2219	# 2129
2231	# 2213
2261	# 2216
2280	# 2208
2440	# 2404
2450	# 2405

Aquí los sumandos no tienen las mismas cifras, por lo que las soluciones no han de ser múltiplos de 9, pero sí lo tiene que ser la suma de los cuadrados de las cifras, para conseguir un par de anagramáticos. Ejemplos:

$271=217+2^2+1^2+7^2$, donde la suma de cuadrados es 54, múltiplo de 9.

$2450=2405+2^2+4^2+0^2+5^2$, con suma de cuadrados igual a 45.

Cifras al cubo

Para k=3 resultan:

21	# 12
210	# 201
342	# 243
423	# 324
603	# 360
633	# 363
1452	# 1254
1503	# 1350
1533	# 1353
1752	# 1275
1950	# 1095
2010	# 2001
2403	# 2304
2613	# 2361
2916	# 1962

Por ejemplo:

$1533=1353+1^3+3^3+5^3+3^3=1353+1+27+125+27=1353+180$

Otras potencias

K=4

1120	# 1102
1231	# 1132
1312	# 1213
3211	# 3112
4226	# 2642
4720	# 2047

$3211=3112+3^4+1^4+1^4+2^4=3112+99$

K=5

11040	# 10014
11403	# 10134
14310	# 13041
15210	# 12051

$14310=13041+1^5+3^5+0^5+4^5+1^5=13041+1+243+0+1024+1=13041+1269$

Dejamos aquí las potencias de cifras.

Anagramáticos con producto de cifras

Podemos plantearnos pares de anagramáticos que se diferencien en el producto de sus cifras. Usaremos nuestra función *producifras*, que es similar a *sumacifras* (ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/permutacion-de-cifras-al-sumar-su.html). En este enlace puedes leer unos resultados más exigentes que los propuestos aquí, pues no basta con que los pares sean anagramáticos, sino que han de ser también simétricos. En las búsquedas hay que eliminar los números en los que el producto de las cifras sea cero, pues aparecerían muchos casos triviales. En nuestro caso obtenemos estos pares:

293	# 239
362	# 326
436	# 364
631	# 613
653	# 563
749	# 497
763	# 637
891	# 819
958	# 598
965	# 695
1293	# 1239
1362	# 1326
1436	# 1364
1631	# 1613
1653	# 1563
1749	# 1497
1763	# 1637
1891	# 1819
1958	# 1598
1965	# 1695

Por ejemplo, 1631=1613+1*6*1*3=1613+18

Aquí también el producto de cifras ha de ser múltiplo de 9, porque el par de anagramáticos comparte el mismo resto módulo 9. Significa que una cifra ha de ser 9, o bien, que figuren 3 o el 6 repetidos o estar presentes ambos. Recorriendo la tabla se comprueba.

EN EL PUNTO MEDIO DE DISPARES

¿Qué números son promedio entre su cuadrado más cercano y el triangular también más cercano? Es una pregunta a la que no es difícil responder con las herramientas que tenemos a nuestra disposición, pero que requiere un cierto cuidado a la hora de plantear un algoritmo. Veremos más adelante las dificultades que se pueden presentar. Sólo nos referiremos a la posible estructura de ese algoritmo y sus problemas. No abordaremos apenas estudios teóricos.

En primer lugar estudiaremos técnicas que nos sirvan para todos los casos, sean cuadrado con triangular, cubo con cuadrado o primo con oblongo, para después descender a detalles en cada tipo de número. Para estas búsquedas llevamos tiempo usando las funciones ESCUAD, ESTRIANGULAR, ESOBLONGO, ESCUBO y otras similares. Puedes encontrarlas todas usando *Buscar* en el blog.

Estas son algunas de ellas:

```
Public Function escuad(n) As Boolean
If n < 0 Then
escuad = False
Else
If n = Int(Sqr(n)) ^ 2 Then escuad = True Else escuad
= False
End If
End function

Public function estriangular(n) as boolean
dim a
a = Int(sqr(8*n+1))
```

```
if a*a=8*n+1 then estriangular = true else
estriangular = false
end function

Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo =
False
End Function
```

Con cualquiera de ellas se pueden construir las funciones PROXIMO y ANTERIOR, en las que un parámetro *tipo* decidirá si se busca un cubo o un oblongo, o preferentemente, cambiando una línea de código para sustituir la búsqueda de un tipo por la de otro. Lo explicamos con un ejemplo:

La siguiente versión de PROXIMO busca el cuadrado más cercano entre los mayores que un número

```
Function proximo(a) As Long
Dim p, prim As Long
Dim sale As Boolean

p = a + 1: sale = False: prim = 0
While Not sale
If escuad(p) Then prim = p: sale = True
```

```
p = p + 1
Wend
proximo = prim
End Function
```

Por ejemplo, te dará que PROXIMO(78)=81

Si sustituimos ESCUAD por otra función, nos servirá el mismo código para buscar triangulares, cubos o pentagonales. En general, se dará por supuesto que cambiaremos esa línea de código para pasar de un tipo a otro.

De igual forma se puede construir la función ANTERIOR:

```
Function anterior(a) As Long
Dim p, prim As Long
Dim sale As Boolean

p = a -1: sale = False: prim = 0
While Not sale and p>0
If escuad(p) Then prim = p: sale = True
p = p - 1
Wend
anterior = prim
End Function
```

Por ejemplo, en este caso para cuadrados te dará ANTERIOR(15)=9

Caso de cuadrados y triangulares

Candidatos a ser los más próximos

La primera idea que se nos ocurre es la de buscar el cuadrado más próximo por la izquierda y también por la derecha, y quedarnos con el más próximo. No hay posibilidad de "empate", porque serían dos cuadrados consecutivos, n^2 y $(n+1)^2$, y entre ellos siempre existe una diferencia impar, 2n+1, por lo que no existirá un número en el punto medio. El cuadrado más cercano siempre será único.

Por contra, entre dos triangulares consecutivos si existe esa posibilidad de empate. Por ejemplo, 32 está comprendido entre los triangulares 28 y 36, y a 4 unidades de cada uno de ellos, por lo que el título de "más cercano" sirve para cualquiera de ellos. Vemos cuándo ocurre esto:

Sean dos triangulares consecutivos **n(n-1)/2** y **n(n+1)/2**. Su diferencia será **n**, luego si este valor es par, tendremos dos triangulares cercanos a un número a la misma distancia. Entre 1 y 3, el punto medio es 2, su promedio. Entre 6 y 10, el 8, entre 15 y 21, el 18, y así con todos los ejemplos similares. La consecuencia es que para triangular más cercano a un número dado tendremos dos candidatos. Por cierto, ese número central es fácil ver que será el doble de un cuadrado, 2, 8, 18, 32,...

Ese empate entre triangulares cercanos habrá que tenerlo en cuenta en el algoritmo. Su núcleo podrá ser el siguiente:

for i=2 to 1000
c=0 ‘Esta variable controlará el posible empate entre triangulares
a=anteriorcuad(i) 'Cuadrado menor
b=proximotriang(i) 'Triangular mayor
m=anteriortriang(i) 'Triangular menor
n=proximocuad(i) 'Cuadrado mayor
if i-a>n-i then a=n 'Se queda "a" como cuadrado más cercano tomando el valor de **n**
if b-i>i-m then b=m 'El triangular "b" es el más cercano, quizás con el valor de **m**
if b-i=i-m then ‘Hay empate
If escuad(2 * i - m) Then a = 2 * i - m: b = m: c = 1
If escuad(2 * i - b) Then a = 2 * i - b: c = 1 ' El valor c=1 indica que se ha resuelto el empate
end if

if i=(a+b)/2 or c=1 then ‘Se han encontrado los más próximos o empate resuelto
escribe(i, a, b)
next i

Alguna parte de este planteamiento se ha escrito en pseudocódigo para mayor claridad (anteriorcuad, proximocuad,...). Hemos incorporado estas líneas a un buscador con el siguiente resultado:

2, 5, 23, 32, 47, 52, 65, 86, 140, 161, 170, 193, 203, 228, 266, 312, 356, 389, 403, 438, 453, 490, 545, 610, 671, 716, 735, 782, 802, 851,...

Estos son los primeros números naturales que se encuentran en el punto medio entre el cuadrado y el triangular más cercano. En forma de tabla, podemos añadir en una segunda columna el cuadrado y el triangular más cercanos, de los que es promedio el número. No tienen que aparecer en este orden:

Número	Cuadrado y triangular
2	1, 3
5	4, 6
23	25, 21
32	36, 28
47	49, 45
52	49, 55
65	64, 66
86	81, 91
140	144, 136
161	169, 153
170	169, 171
193	196, 190
203	196, 210
228	225, 231
266	256, 276
312	324, 300
356	361, 351
389	400, 378
403	400, 406
438	441, 435

Están publicados en https://oeis.org/A233074

Alternativa para este caso

En este caso de cuadrados y triangulares no son necesarias las funciones POSTERIOR y ANTERIOR. Para los cuadrados bastará con elegir, para un número N los siguientes, expresados con lenguaje de Excel o Calc:

A=(ENTERO(RAIZ(N)))^2 como anterior y B=(1+ENTERO(RAIZ(N)))^2 como posterior

Para los triangulares es un poco más complicado. Las siguientes expresiones son el resultado de resolver la ecuación x(x+1)/2=N.

X=ENTERO((-1+RAIZ(8*N+1))/2), que es el “falso orden” triangular de N

A=X(X+1)/2 como anterior y B=(X+1)(X+2) como posterior.

Con estas fórmulas se puede construir un esquema de hoja de cálculo que nos indique, con un solo golpe de vista, qué cuadrados o triangulares son los más cercanos, así como si existe empate o no. En la imagen siguiente se ha analizado el número 456 con las fórmulas explicadas, resultando 441 y 465 como los candidatos. Como sus diferencias, 15 y 9, no son iguales, 456 no cumpliría lo exigido.

Cuadrado anterior	**441**	**15**
Cuadrado posterior	**484**	**28**
Falso orden triangular	**29**	
Triangular anterior	**435**	**21**
Triangular superior	**465**	**9**

Caso de cuadrados y cubos

En este caso podemos usar el procedimiento general, basado en PROXIMO y ANTERIOR, pero usando ESCUBO en lugar de ESTRIANGULAR.

Vimos que en los cuadrados no existía posibilidad de empate en las distancias por la izquierda o derecha del número. Igual ocurrirá con los cubos, porque uno será par y otro impar.

Aplicamos, pues, el procedimiento general sin tener en cuenta los empates:

Número	Cubo y cuadrado
6	4, 8
26	25, 27
123	121, 125
206	196, 216
352	361, 343
498	484, 512
1012	1024, 1000
1350	1369, 1331
1746	1764, 1728
2203	2209, 2197
2724	2704, 2744
3428	3481, 3375
4977	5041, 4913
5804	5776, 5832
6874	6889, 6859
8050	8100, 8000
9335	9409, 9261

También estos están ya publicados:

A233075 Numbers that are midway between the nearest square and the nearest cube.
6, 26, 123, 206, 352, 498, 1012, 1350, 1746, 2203, 2724, 3428, 4977, 5804, 6874, 8050, 9335, 10732, 12244, 13874, 17500, 19782, 21928, 24519, 26948, 29860, 32946, 35829, 39254, 42862, 50639, 54814, 59184, 63752, 69045, 74036, 79234, 85224, 90863, 97340,

Alternativa para este caso

Vimos que PROXIMO y ANTERIOR se podían sustituir, en el caso de los cuadrados, por A=(ENTERO(RAIZ(N)))^2 como anterior y B=(1+ENTERO(RAIZ(N)))^2 como posterior.
Los cubos admiten un planteamiento similar

A=(ENTERO(N^(1/3)))^3
B=(1+ENTERO(N^(1/3)))^3

En la imagen observamos con el número 280 que no hay posibilidad de empate.

	280	Diferencias
Cubo anterior	216	64
Cubo posterior	343	63

Promedios entre primos y cuadrados

Aquí sí existe la posibilidad de empate entre primos, por lo que habrá que aplicar el algoritmo general presentado más arriba. Los cuadrados han de ser impares, para que las diferencias cuadrado-primo sean pares y admitan un punto medio.

Como vemos en la tabla resultante, la abundancia de soluciones les resta interés:

Número	Cuadrado y primo
7	9, 5
8	9, 7
10	9, 11
11	9, 13
24	25, 23
27	25, 29
48	49, 47
51	49, 53
80	81, 79
82	81, 83
117	121, 113
124	121, 127
168	169, 167
171	169, 173
224	225, 223
226	225, 227
227	225, 229

observan diferencias de valor 2, 4, 6, 8,…siendo bastante frecuentes las primeras, en las que el número primo es del tipo n^2+2 o n^2-2. Se podría hacer un estudio para estos primeros valores, pero queda para otra ocasión.

DE NUEVO NÚMEROS

NÚMEROS ESFÉNICOS

Definición

Los números esfénicos (del griego sphen, “cuña”) son aquellos naturales que equivalen a un producto de tres números primos diferentes, como 42=2*3*7. Si los factores son distintos, el número será “libre de cuadrados” y su número de divisores (función TAU) será 8, porque se calcula multiplicando los exponentes de sus factores primos aumentados todos en una unidad. Así, TAU(42)=(1+1)(1+1)(1+1)=2*2*2=8.

Todos los números esféricos tienen ocho divisores.

Así, los divisores de 42 son: 42, 21, 14, 7, 6, 3, 2 y 1

La afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, 24 no es esfénico ($24=2^3*3$) y tiene ocho divisores, pues TAU(24)=(3+1)(1+1)=8.

En muchos lenguajes de programación se define la función OMEGA como el total de factores primos distintos que posee un número, y BIGOMEGA, al mismo total si se cuentan los primos repetidos. Esto nos da un criterio para conocer si un número N es esfénico, y es que OMEGA(N)=3 y BIGOMEGA(N)=3. Así se “prohíbe” que se repitan primos. Lo expresamos en lenguaje PARI:

print(omega(42)==3&&bigomega(42)==3)

Si ingresas esta expresión en su página web https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html obtendrás un 1, que significa VERDADERO.

```
? imprimir(omega(42)==3&&bigomega(42)==3)
1
```

```
print(omega(42)==3&&bigomega(42)==3)
```

Si lo aplicas al 24 obtendrás un cero (FALSO).

```
? imprimir(omega(24)==3&&bigomega(24)==3)
0
```

```
print(omega(24)==3&&bigomega(24)==3)
```

Como este blog va de hoja de cálculo, podemos construir una función en VBASIC que determine, sin acudir a ninguna función, salvo ESPRIMO (la encuentras fácilmente en este blog), si un número es esfénico o no. Esta sería una función adecuada:

```
Public Function esfenico(n) As Boolean
Dim a, b, c, d, m

m = 0
a = 2
While a <= n / 2 And m = 0 'Busca un primo divisor de n
If esprimo(a) And n Mod a = 0 Then
b = n / a     'Cociente entre n y su divisor a
If Not esprimo(b) Then 'Si el cociente b es compuesto, seguimos
c = a + 1 'Buscamos el segundo primo, que ha de ser distinto
While c <> a And c <= b / 2 And m = 0
If esprimo(c) And b Mod c = 0 Then
d = b / c 'Si el cociente es primo, ya tenemos tres divisores
If esprimo(d) And d <> c And d <> a And a <> c Then
m = 1 'Es esfénico, y m=1
End If
c = c + 1
Wend
End If
End If
a = a + 1
Wend
```

Si filtramos los primeros números naturales con esta función obtendremos el listado de los primeros esfénicos:

30	[2,1][3,1][5,1]
42	[2,1][3,1][7,1]
66	[2,1][3,1][11,1]
70	[2,1][5,1][7,1]
78	[2,1][3,1][13,1]
102	[2,1][3,1][17,1]
105	[3,1][5,1][7,1]
110	[2,1][5,1][11,1]
114	[2,1][3,1][19,1]
130	[2,1][5,1][13,1]
138	[2,1][3,1][23,1]
154	[2,1][7,1][11,1]
165	[3,1][5,1][11,1]
170	[2,1][5,1][17,1]
174	[2,1][3,1][29,1]
182	[2,1][7,1][13,1]
186	[2,1][3,1][31,1]
190	[2,1][5,1][19,1]

Observamos que todos son producto de tres primos (elevados a la unidad)

En forma de lista:

30, 42, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 165, 170, 174, 182, 186, 190, 195,…

Coinciden con los publicados en http://oeis.org/A007304

Una curiosidad

Con nuestro programa Cartesius podemos encontrar los primeros esfénicos

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/hoja/cartesius.xlsm)

Usaremos el siguiente código:

xtotal=3
xt=1..73
xt=filtro(primo)
es (x2-x1)*(x3-x2)>0

Explicamos su significado: Declara que combinaremos tres números, que irán desde 1 hasta 73 (el primo de Sheldon). En la tercera línea se filtran solo los primos, y en la siguiente se exige que sean distintos y crecientes.

A continuación, en la hoja Producto, especificamos que el resultado que deseamos debe ser el producto.

Ver desarrollo	SI
Resumen	PRODUCTO

Una vez programado, pulsamos el botón de **Iniciar** o el de **Reiterar** y aparecerán los primeros 2660 esfénicos, pero desordenados:

Total
2660
30
42
66
78
102
114
138
174
186
222
246
258
282
318
354
366
402
426
438
70

En el mismo Excel podemos ordenar la lista, con lo que coincidirá con la que conocemos.

Otra curiosidad

Con nuestro Buscador de Naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador) podemos realizar la misma búsqueda con tres frases:

es omega(n)=3
es bigomega(n)=3
evaluar factores

Su resultado:

Núm.	Solución	Detalles
1	30	2 3 5
2	42	2 3 7
3	66	2 3 11
4	70	2 5 7
5	78	2 3 13
6	102	2 3 17
7	105	3 5 7
8	110	2 5 11
9	114	2 3 19
10	130	2 5 13
11	138	2 3 23
12	154	2 7 11
13	165	3 5 11

Esfénicos con otro carácter más

Estos números, además de esfénicos podrán ser otros tipos

Cuadrados no pueden ser, ni cubos ni ninguna potencia, por ser libres de cuadrados.

Triangulares

Un esfénico puede ser triangular, del tipo N(N+1)/2. Basta con que N y N+1 sean ambos semiprimos libres de cuadrados. Ya que los números consecutivos son primos entre sí, los factores primos de N y N+1 serán diferentes. Como uno de ellos es par, al dividir su producto entre 2 quedarán tres primos diferentes. Por ejemplo, T(14)=14*15/2=2*7*3*5/2=3*5*7=105, que es esfénico. No es la única posibilidad, pero demuestra que es posible.

Los primeros esfénicos triangulares son:
66, 78, 105, 190, 231, 406, 435, 465, 561, 595, 741, 861, 903, 946,…

Están publicados en http://oeis.org/A128896

Se pueden obtener en PARI de esta forma:

esfetriang(n)={omega(n)==3&&bigomega(n)==3&&issquare(8*n+1)}
for(i=2,1000,if(esfetriang(i),print(i)))

Hay que recordar que el criterio para saber si N es triangular es que sea un cuadrado la expresión **8N+1**

Si a nuestro Buscador le añadimos la palabra ***Triangula***r, nos resultarán los mismos:

Solución	Detalles
66	2 3 11
78	2 3 13
105	3 5 7
190	2 5 19
231	3 7 11
406	2 7 29
435	3 5 29
465	3 5 31
561	3 11 17
595	5 7 17
741	3 13 19

Hasta el número

Con estas pro

es omega(n)=3
es bigomega(n)=3
evaluar factores
triangular

Oblongos

Existen oblongos, tipo N(N+1) que son esfénicos. Basta con que se cumpla que el que sea par entre ellos dos, N y N+1, sea semiprimo libre de cuadrados, y que el otro sea primo. Por ejemplo, 22*23=2*11*23.

Si en el código PARI anterior sustituimos **8*n+1** por **4*n+1** estaremos exigiendo que el número sea oblongo.

Estos son los primeros oblongos esfénicos:

30	5*6
42	6*7
110	10*11
182	13*14
506	22*23
1406	37*38
2162	46*47
3422	58*59
3782	61*62

En todos ellos, N o N+1 es primo, tal como razonamos más arriba.

Con el Buscador añadimos la condición OBLONGO y resultarán los mismos.

Solución	Detalles
30	2 3 5
42	2 3 7
110	2 5 11
182	2 7 13
506	2 11 23
1406	2 19 37

Esfénicos "arolmar"

Nuestros números AROLMAR (http://oeis.org/A187073) son libres de cuadrados y el promedio de sus divisores primos es también primo. Nada se opone a que sean además esfénicos, si tienen tres divisores primos. Los primeros son estos

105, 195, 231, 465, 483, 609, 627, 645, 663, 861, 897, 915, 935, 969, 987, 1185, 1221, 1239, 1265, 1419, 1545, 1581, 1599, 1653, 1729, 1743, 1887

Por ejemplo, 1419=3*11*43 y (3+11+43)/3=19, que es primo.

Con PARI

sopf(n)= {my(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }

is(n)=bigomega(n)==3&&omega(n)==3&&sopf(n)%3==0&&isprime(sopf(n)/3)
for(i=2,2000,if(is(i),print(i)))

Exige que OMEGA Y BIGOMEGA valgan 3, que el promedio de los primos sea entero y que sea primo.

El resultado es:

```
? sopf(n)= {mi(f, s=0); f=factor(n); for(i=1, matsize(f)[1], s+=f[i, 1]); s }
is(n)=bigomeg(n)==3&&omega(n)==3&&sopf(n)%3==0&&isprime(sopf(n)/3)
for(i=2,2000,if(is(i) ,imprimir(i)))
105
195
231
465
483
609
627
645
663
861
897
915
935
```

Esfénicos con factores consecutivos

Los factores de un esfénico pueden ser primos consecutivos. Es muy fácil encontrarlos, pues basta realizar un listado con

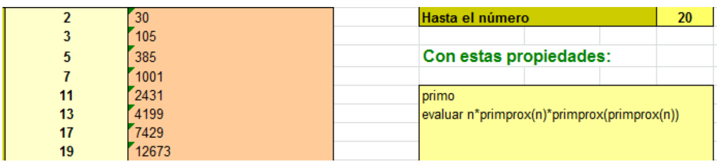
prime(k)*prime(k+1)*prime(k+2)

Estos serían los primeros:

30	[2,1][3,1][5,1]
105	[3,1][5,1][7,1]
385	[5,1][7,1][11,1]
1001	[7,1][11,1][13,1]
2431	[11,1][13,1][17,1]
4199	[13,1][17,1][19,1]
7429	[17,1][19,1][23,1]
12673	[19,1][23,1][29,1]
20677	[23,1][29,1][31,1]
33263	[29,1][31,1][37,1]

Si los tres primos forman progresión aritmética, serán también de tipo AROLMAR.

En la imagen puedes observar su generación mediante el Buscador. Oberva la complicación en el ***Evaluar***:



Aquí el listado cae a la derecha.

Esfénicos consecutivos

En alguna publicación sobre esfénicos se destacan aquellos que son consecutivos, y se da como primer ejemplo el par 230 = 2*5*23 y 231 = 3*7*11 y como ejemplo de tres consecutivos la terna 1309 = 7*11*17, 1310 = 2*5*131, y 1311 = 3*19*23. También se razona que no puede haber cuatro, porque uno de ellos sería múltiplo de 4=2*2, con lo que no sería libre de cuadrados.

Con nuestra función ESFENICO se pueden completar estas búsquedas. Damos el resultado e invitamos a reproducirlo:

Dos esfénicos consecutivos:

230	[2,1][5,1][23,1]	231	[3,1][7,1][11,1]
285	[3,1][5,1][19,1]	286	[2,1][11,1][13,1]
429	[3,1][11,1][13,1]	430	[2,1][5,1][43,1]
434	[2,1][7,1][31,1]	435	[3,1][5,1][29,1]
609	[3,1][7,1][29,1]	610	[2,1][5,1][61,1]
645	[3,1][5,1][43,1]	646	[2,1][17,1][19,1]
741	[3,1][13,1][19,1]	742	[2,1][7,1][53,1]
805	[5,1][7,1][23,1]	806	[2,1][13,1][31,1]
902	[2,1][11,1][41,1]	903	[3,1][7,1][43,1]
969	[3,1][17,1][19,1]	970	[2,1][5,1][97,1]
986	[2,1][17,1][29,1]	987	[3,1][7,1][47,1]

En la tabla figuran los dos consecutivos y sus descomposiciones en tres primos (hay que recordar que los 1 que figuran son exponentes. Si no tuvieran ese valor no serían libres de cuadrados).

Tres esfénicos consecutivos

Los primeros son estos:

1309	[7,1][11,1][17,1]	1310	[2,1][5,1][131,1]	1311	[3,1][19,1][23,1]
1885	[5,1][13,1][29,1]	1886	[2,1][23,1][41,1]	1887	3,1][17,1][37,1]
2013	[3,1][11,1][61,1]	2014	[2,1][19,1][53,1]	2015	5,1][13,1][31,1]
2665	[5,1][13,1][41,1]	2666	[2,1][31,1][43,1]	2667	3,1][7,1][127,1]
3729	[3,1][11,1][113,1]	3730	[2,1][5,1][373,1]	3731	7,1][13,1][41,1]
5133	[3,1][29,1][59,1]	5134	[2,1][17,1][151,1]	5135	5,1][13,1][79,1]
6061	[11,1][19,1][29,1]	6062	[2,1][7,1][433,1]	6063	3,1][43,1][47,1]
6213	[3,1][19,1][109,1]	6214	[2,1][13,1][239,1]	6215	,1][11,1][113,1]
6305	[5,1][13,1][97,1]	6306	[2,1][3,1][1051,1]	6307	7,1][17,1][53,1]
6477	[3,1][17,1][127,1]	6478	[2,1][41,1][79,1]	6479	1,1][19,1][31,1]

Un reto es prolongar estas dos tablas según lo aprendido en párrafos anteriores.

PROPIEDADES COMPARTIDAS CON EL DOBLE

Hace poco descubrí que el número 15561 y su doble, 31122, comparten la propiedad de ser ambos suma de dos cubos enteros positivos:

15561=17^3+22^3 y 31122=15561*2=11^3+31^3

¿Ocurrirá esta casualidad en otros números? ¿Habrá más coincidencias entre un número y su doble? Estas cuestiones las desarrollaremos hasta que la falta de interés o el espacio aconsejen parar.

Coincidencia en suma de cubos

Para encontrar números con la misma propiedad que el 15561 deberemos investigar, en primer lugar, qué números son suma de dos cubos enteros positivos. Es de esperar que sean muchos, y los encontraremos (en hoja de cálculo) con esta función:

Public Function sumadoscubos$(n) ‘Construye un texto
Dim i, r, t, w
Dim s$

```
s = "" 'Si no hay solución, variable s queda vacía
r = Int(n ^ (1 / 3)) 'Tope para la búsqueda
For i = 1 To r 'Búsqueda del primer cubo
t = n - i ^ 3 'Posible segundo cubo
w = t ^ (1 / 3)
If escubo(t) And t > 0 Then s = s + Str$(i) + ", " + Str$(t ^ (1 / 3)) 'Si es un cubo positivo, tenemos solución
Next i
sumadoscubos = s
End Function
```

Con ella obtenemos los primeros números que son suma de cubos:

2	1, 1
9	1, 2 2, 1
16	2, 2
28	1, 3 3, 1
35	2, 3 3, 2
54	3, 3
65	1, 4 4, 1
72	2, 4 4, 2
91	3, 4 4, 3
126	1, 5 5, 1
128	4, 4
133	2, 5 5, 2
152	3, 5 5, 3
189	4, 5 5, 4
217	1, 6 6, 1
224	2, 6 6, 2
243	3, 6 6, 3
250	5, 5
280	4, 6 6, 4
341	5, 6 6, 5
344	1, 7 7, 1

No hemos impedido que aparezcan dos soluciones simétricas, porque eso simplifica el algoritmo.

Hemos usado nuestra función ESCUBO:

```
Function escubo(n)
Dim a
a = Int(n ^ (1 / 3) + 10 ^ (-6))
If a * a * a = n Then escubo = True Else escubo = False
End Function
```

Estos números están publicados en
http://oeis.org/A003325

Si ahora exigimos que el doble de esos números también presente la misma propiedad, obtendremos este listado:

Número	Cubos	Cubos del doble
728	6, 8 8, 6	5, 11 11, 5
756	3, 9 9, 3	8, 10 10, 8
2457	9, 12 12, 9	1, 17 17, 1
5824	12, 16 16, 12	10, 22 22, 10
6048	6, 18 18, 6	16, 20 20, 16
9288	3, 21 21, 3	10, 26 26, 10
14364	13, 23 23, 13	12, 30 30, 12
15561	17, 22 22, 17	11, 31 31, 11
19656	18, 24 24, 18	2, 34 15, 33 33, 15 34, 2
19684	1, 27 27, 1	4, 34 34, 4
20412	9, 27 27, 9	24, 30 30, 24
25327	15, 28 28, 15	1, 37 37, 1
25389	10, 29 29, 10	5, 37 37, 5
39816	8, 34 34, 8	5, 43 43, 5
46592	24, 32 32, 24	20, 44 44, 20
48384	12, 36 36, 12	32, 40 40, 32

También están publicados estos números, y entre ellos figura 15561, que nos ha servido de ejemplo inicial.
(ver http://oeis.org/A191345)

En esta dirección de OEIS no se usa PARI, por lo que incluimos una propuesta:

```
doscubos(n)={my(i=1,t,s=0,r=truncate(n^(1/3)));while(i<=r&&s==0,t=n-i^3;if(ispower(t,3)&&t>=1,s=1);i+=1);s}
es(n)=doscubos(n)&&doscubos(2*n)
```

for(i=1,10^5,if(es(i),print1(i,", ")))

Si usamos la página web de PARI/GP obtendremos la misma sucesión:

```
? doscubos(n)={my(i=1,t,s=0,r=truncar(n^(1/3)));while(i<=r&&s==0,t=ni^3;if( ispower
(t,3)&&t>=1,s=1);i+=1);s}
es(n)=doscubos(n)&&doscubos(2*n)
for(i=1,10^5,if( es(i),print1(i,", ")))

728, 756, 2457, 5824, 6048, 9288, 14364, 15561, 19656, 19684, 20412, 25327, 25389,
39816, 46592, 48384, 663339, 70336, 74304, 76167, 76895, 82251, 91000, 91000.
```

Coincidencia con cuadrados de primos

Esta búsqueda es algo más complicada, porque hay que buscar dos cuadrados y además sus bases deberán ser números primos. Lo hemos intentado con esta función de VBA Basic, que determina los números que son suma de dos cuadrados de primos:

Public Function sumadoscuad_prim$(n)
Dim i, r, t, w, m
Dim s$

s = "" ‘Inicio de la solución
m = 0 ‘Inicio del contador
r = Sqr(n) ‘Tope de búsqueda
i = 2 ‘Primer primo
While i < r
t = n - i ^ 2 ‘Posible segundo cuadrado

w = Sqr(t)
If escuad(t) And esprimo(w) And i <= w Then m = m + 1: s = s + " # " + Str$(i) + ", " + Str$(w) ‘Encuentra una solución
i = primprox(i) ‘Siguiente primo
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " # " + s
sumadoscuad_prim = s
End Function

Con ella encontramos las primeras soluciones:

N	Suma p¨2+q^2
8	# 2, 2
13	# 2, 3
18	# 3, 3
29	# 2, 5
34	# 3, 5
50	# 5, 5
53	# 2, 7
58	# 3, 7
74	# 5, 7
98	# 7, 7
125	# 2, 11
130	# 3, 11
146	# 5, 11
170	# 7, 11
173	# 2, 13
178	# 3, 13

Están publicadas en http://oeis.org/A045636

Si ahora añadimos la condición de que también el doble de N sea suma de dos potencias de primos, resulta que solo encontramos dos ejemplos, 29 y 845:

N	Suma	2N	Suma
29	# 2, 5	58	# 3, 7
845	# 2, 29	1690	# 3, 41

Por si el no encontrar más se debiera a una carencia de la hoja de cálculo, hemos traducido esta búsqueda a PARI:

doscuadprim(n)={my(i=2,t,s=0,r=sqrtint(n));while(i<=r&&s==0,t=n-i^2;if(issquare(t)&&isprime(sqrtint(t)),s=1);i=nextprime(i+1));s}

es(n)=doscuadprim(n)&&doscuadprim(2*n)

for(i=1,10^4,if(es(i),print1(i,", ")))

Hemos insertado este código en la página oficial de PARI con el mismo resultado:

```
? doscuadprim(n)={my(i=2,t,s=0,r=sqrtint(n));while(i<=r&&s==0,t=n-i^2;if(issquare
(t)&&isprime(sqrtint(t)),s=1);i=nextprime(i+1));s}
es(n)=doscuadprim(n)&&doscuadprim(2*n)
for(i=1,10^4,if(es(i),print1(i,", ")))

29, 845,
```

Hemos probado más allá de 10^6 sin obtener más resultados.

Coincidencia en suma de triangulares

Esta búsqueda es más fácil que la anterior. Basta sustituir en la función de cubos de los primeros párrafos ESCUBO por ESTRIANGULAR, y algún detalle más, pero no se encuentran soluciones a la cuestión propuesta entre los números

Otros ejemplos

Con sumandos pertenecientes a la sucesión de Fibonacci resultan demasiadas soluciones, lo que le resta interés.
Con oblongos no se encuentran tampoco entre los primeros números.
Con primos, por la Conjetura de Goldbach, nos resultarían todos los números pares.
Lo dejamos aquí.

CONCATENACIÓN BILATERAL DE CIFRAS

Extensión a un número primo

Nuestro objetivo aquí es modificar algunos números mediante la concatenación de cifras a ambos lados de las suyas propias, y de forma simétrica. Como es un tema muy amplio, con muchas posibilidades, iniciaremos el estudio con algunas de ellas, y terminaremos cuando sea claro que se ha perdido interés.

Ya en otra ocasión estudiamos la duplicación de unidades manteniendo el mismo tipo de número (ver https://hojaynumeros.blogspot.com/2019/09/sigue-el-mismo-tipo-al-duplicar-las.html)

Conversión en primo mediante una cifra repetida

Si tomamos un número cualquiera, como el 14622, existe la posibilidad de convertirlo en primo adosándole cualquiera de las cifras impares 1, 3, 7 o 9. En este ejemplo tendríamos estas primeras posibilidades con la cifra 1:

1146221

1111146221111

111111462211111

1111111111111111111146221111111111111111111

Estos cuatro números son primos.

En este caso no hemos descubierto una prolongación a primo con las cifras 3 o 9. La razón es que 14622 es múltiplo de 3, y al adosarle la cifra 3 o la 9 no puede ser primo.

Con la cifra 7 hemos intentado hasta 400 concatenaciones, sin que resulte un número primo. Esto nos dice que el proceso es más complejo de lo que pudiera parecer en un principio, pues puede ocurrir que no haya solución a nuestro alcance con una cifra impar concreta.

Como pueden existir comportamientos muy distintos con las cuatro cifras 1, 3, 5 y 7, sería útil diseñar una función con dos parámetros, uno el número que deseemos prolongar y otro la cifra que adosemos. Para Excel podría valer esta:

```
Function extenprimo$(n, c)
Dim i, j, k, p, m
Dim s$
s = ""
If esprimo(n) Then extenprimo = Str$(n): Exit Function
m = n
For i = 1 To 12
p = numcifras(m)
m = 10 ^ (p + 1) * c + 10 * m + c ‘Adosa cifras bilateralmente
If esprimo(m) Then s = s + "#" + Str$(m)
Next i
If s = "" Then s = "NO"
extenprimo = s
End Function
```

Esta función devuelve una cadena de texto con todas las soluciones posibles. Los parámetros son, el número

n y la cifra **c**, y el resultado es el mismo número si es primo, un "NO" si no se encuentra solución o una lista de soluciones encontradas.

Aquí tienes ejemplos de estos casos:

13	13
2020	NO
888	# 1111188811111

Un gran problema del uso de la hoja de cálculo es que a partir de unos valores pasa los resultados a notación científica, con lo que se pierden cifras y se anula la utilidad del proceso. Por eso, en la función, solo se llega a doce cifras.

La solución a esto es cambiar a programas o lenguajes que usen todas las cifras posibles, pero entonces el fallo puede estar en la detección de primos. Por ejemplo, PARI, a partir de 2^64, sustituye la función ***isprime*** por ***ispseudoprime***, que para otras tareas puede valer, pero en esta introduce una falta de seguridad en la finalización del proceso. Consecuencia de esto es que nos tendremos que mover con objetivos lúdicos, y no teóricos. Lo que afirmemos será siempre una conjetura, sin valor teórico.

La traducción de la función a PARI puede ser:

exten(n,c)={my(i,p,k=0,m=n);while(k==0&&i<200,p=#digits(m);m = 10 ^ (p + 1) * c + 10 * m + c;if(ispseudoprime(m),k=m);i=+1);k}

Aquí llegamos a 200 cifras, pero podrían ser más, siempre que usemos *ispseudoprime*.

Si nuestro interés estuviera en la detección del menor primo, estos inconvenientes no serían tan graves. Esto es lo que hemos introducido en PARI, que detiene el proceso cuando detecta un primo, al que nombramos como E(N). También se puede parar el proceso en Excel.

Al detener el proceso en la primera solución, podremos asignar a cada número un índice K(N) que indique cuantas concatenaciones ha necesitado para llegar a un primo.

Aquí tienes un ejemplo de estos conceptos, con el 1:

Cifra	1	
N	E(N)	K(N)
131	131	0
132	11321	1
133	111133111	3
134	0	-1
135	11351	1
136	0	-1
137	137	0
138	0	-1
139	139	0
140	0	-1

Aparecerá un -1 cuando la función no sea capaz de detectar un primo, lo que ocurre en 134, 136, 138 y 140. Obtendremos un 0 si el número ya es primo, y el número de concatenaciones necesarias en el caso de que sí exista solución, como en 132 y 133.

Algoritmo

Una pequeña modificación en las funciones anteriores nos dará fácilmente la función K. En hoja de cálculo puede ser esta:

```
Function extenprimo(n, c)
Dim i, k, p, m, s

s = 0: k = 0
If esprimo(n) Then extenprimo = 0: Exit Function
m = n
i = 1
While i <= 12 And k = 0
p = numcifras(m)
m = 10 ^ (p + 1) * c + 10 * m + c
s = s + 1
If esprimo(m) Then k = 1
i = i + 1
Wend
If k = 0 Then s = -1
extenprimo = s
End Function
```

Si se ha entendido la primera versión, esta no presentará dificultad. Devuelve -1, 0 o un entero positivo según la tabla de más arriba. La hemos reproducido en Excel para cotejar los valores:

N	K(N)
131	0
132	1
133	3
134	-1
135	1
136	-1
137	0
138	-1
139	0
140	-1

Como curiosidad, en la siguiente tabla figuran las frecuencias de los valores de K(N) para los mil primeros números.

Estadísticas con la cifra 1

K(N)	Frecuencia	
-1	302	No existe extensión prima
0	168	Es ya primo
1	232	
2	134	
3	68	
4	42	
5	32	
6	21	
7	1	
Total	1000	

La frecuencia más alta corresponde a la prolongación con un solo 1, y la frecuencia 1 es la del número 24, cuya prolongación mínima es 1111111241111111. Lo hemos dado como ejemplo.

En la siguiente tabla comparamos las estadísticas para las cuatro cifras 1, 3, 7 y 9.

Estadísticas con las cuatro cifras				
K(N)	1	3	7	9
-1	302	477	397	481
0	168	168	168	168
1	232	192	199	164
2	134	72	103	82
3	68	49	58	33
4	42	21	31	23
5	32	14	27	26
6	21	6	17	23
7	1	1	0	0
Total	1000	1000	1000	1000

Es fácil descubrir en ella la constancia del valor 0, ya que corresponde a los primos y estos no cambian, son 168. También se entiende que las cifras 3 y 9 presentan menos casos, por el problema ya explicado de los múltiplos de 3. Por último, de los que admiten extensiones a primo los más frecuentes son los que solo admiten una.

Extensión a otros tipos de números

En el anterior apartado creábamos números primos adosando a un número cualquiera la misma cifra bilateralmente, tantas veces como fuera necesario hasta conseguir un número primo. Ahora realizaremos estudios similares, pero buscando otro tipo de números.

Cuadrados

Los cuadrados terminan en 0, 1, 4, 5, 6 y 9. Podríamos investigar la concatenación bilateral a un cuadrado en lugar de a un primo. Bastaría sustituir ESPRIMO por ESCUAD, función muy usada en este blog, o *issquare* en PARI. Las funciones son las mismas, pero con ese pequeño cambio. Para no cansar, adjuntaremos los primeros ejemplos que vayamos encontrando.

En una primera investigación observamos que no existen muchas soluciones, y que es preferible restringir nuestro estudio **a un solo dígito**, pues ese es el caso más frecuente, según se observa en esta primera tabla exploratoria:

	Cifra						
Número		0	1	4	5	6	9
1		1	1	1	1	1	1
2		NO	# 121	NO	NO	NO	NO
3		NO	NO	NO	NO	NO	NO
4		4	4	4	4	4	4
5		NO	NO	NO	NO	NO	NO
6		NO	NO	NO	NO	NO	NO
7		NO	NO	NO	NO	# 676	NO
8		NO	NO	# 484	NO	NO	NO
9		9	9	9	9	9	9
10		# 100# 10000#	NO	NO	NO	NO	NO
11		NO	NO	NO	NO	NO	NO
12		NO	NO	NO	NO	NO	NO
13		NO	NO	NO	NO	NO	NO
14		NO	NO	NO	NO	NO	NO
15		NO	NO	NO	NO	NO	NO

Hemos encontrado las extensiones 121, 676 y 484, además de las triviales.

Parece conveniente diseñar una función nueva, a la que llamaremos *extencuad*, que añada a un número la misma cifra tanto a la izquierda como a la derecha. Para Excel podría ser esta:

```
Function extencuad(n)
Dim i, j, k, p, m
Dim s$
Dim c(5)

s = ""
If escuad(n) Then extencuad = "NO": Exit Function
'No tenemos en cuenta los que ya son cuadrados
p = numcifras(n)
c(1) = 1: c(2) = 4: c(3) = 5: c(4) = 6: c(5) = 9 'Posibles cifras
For i = 1 To 5
m = 10 ^ (p + 1) * c(i) + 10 * n + c(i) 'Se añaden cifras
If escuad(m) Then s = s + "#" + Str$(m)
Next i
If s = "" Then s = "NO"
extencuad = s
End Function
```

En la siguiente tabla se recogen los primeros ejemplos de concatenación bilateral a cuadrado. Aparecen algunos capicúas, como 12321, y una solución doble en 62:

2	# 121	
7	# 676	
8	# 484	
40	# 9409	
52	# 1521	
62	# 4624# 5625	
68	# 1681	
180	# 91809	
188	# 11881	
232	# 12321	
326	# 43264	
416	# 14161	
424	# 94249	
451	# 64516	
464	# 14641	
494	# 44944	
522	# 55225	
553	# 65536	
664	# 16641	
716	# 17161	
752	# 47524	
796	# 97969	
928	# 49284	

En http://oeis.org/A305719 están publicadas las raíces cuadradas, ordenadas, de los resultados de la segunda columna, además de otros ejemplos:

A305719 Numbers whose squares have the same first and last digits.

1, 2, 3, 11, 22, 26, 39, 41, 68, 75, 97, 101, 109, 111, 119, 121, 129, 131, 139, 141, 202, 208, 212, 218, 222, 225, 235, 246, 254, 256, 264, 303, 307, 313, 319, 321, 329, 331, 339, 341, 349, 351, 359, 361, 369, 371, 379, 381, 389, 391, 399, 401, 409, 411, 419, 421, 429, 431, 439, 441, Estos números permiten su emparejamiento con los de la primera columna, resultando una función – inútil y dependiente de la base 10 – en la que sería un reto averiguar su sentido. Parecería aleatoria:

N	F(N)
2	11
7	26
8	22
40	97
52	39
62	75
68	41
180	303
188	109
232	111
326	208
416	119
424	307
451	254
464	121
494	212
522	235

Los cuadrados con la primera cifra igual a la última también se pueden conseguir en PARI. Basta con este código:

exten(n)={my(s=digits(n));issquare(n)&&(s[1]==s[#s])}

for(i=100,10^5,if(exten(i),print1(i,", ")))

Obtendremos esta lista, idéntica a la de Excel, pero ordenada:

121, 484, 676, 1521, 1681, 4624, 5625, 9409, 10201, 11881, 12321, 14161, 14641, 16641, 17161, 19321, 19881, 40804, 43264, 44944, 47524, 49284, 50625, 55225, 60516, 64516, 65536, 69696, 91809, 94249, 97969

El único punto difícil de entender es el de ***(s[1]==s[#s])***. En realidad, ***s*** es el conjunto de cifras de n, ***#s*** el número de ellas, y, por tanto, ***s[1]*** es la primera cifra y ***s[#s]*** la última.

Terminamos con el hecho de que en números menores de un millón solo existe la solución doble del 62.

Otro ejemplo

Triangulares

La extensión a triangulares de forma bilateral se resuelve como la de los cuadrados. Basta cambiar las posibles terminaciones de cifras, que ahora son 1, 3, 5, 6 y 8. En esta tabla figuran los primeros ejemplos:

N	Extensión triangular	Orden
6	666	36
7	171	18
9	595	34
12	8128	127
21	6216	111
40	3403	82
43	1431	53
56	5565	105
71	1711	58
77	8778	132
78	6786	116
89	1891	61
99	5995	109
177	61776	351
178	11781	153
256	12561	158
297	52975	325
302	83028	407
304	13041	161
315	33153	257
354	63546	356
386	13861	166
428	54285	329

Si en PARI sustituimos issquare(n) por issquare(8*n+1) nos resultarán soluciones triangulares ordenadas.

exten(n)={my(s=Vec(Str(n)));issquare(8*n+1)&&(s[1]==s[#s])}

for(i=100,10^5,if(exten(i),print1(i,", ")))

171, 595, 666, 1081, 1431, 1711, 1891, 3003, 3403, 5565, 5995, 6216, 6786, 8128, 8778, 10011, 10731, 11781, 12561, 13041, 13861, 15051, 15931, 16471, 17391, 18721, 19701, 33153, 34453, 38503, 39903, 52975, 54285, 54615, 55945, 59685, 60726, 61776, 63546, 66066, 67896, 69006, 83028, 85078

No tienen que coincidir con las anteriores, porque, por ejemplo, 3003 procedería de 00 y eso no lo hemos considerado. Estas sí están ordenadas.

Como ejemplos basta con estos. Ya tenemos una base para emprender otras búsquedas distintas.

NÚMEROS DOBLEMENTE TRIANGULARES

Se llaman así a aquellos números triangulares cuyo orden es también triangular. Los designaremos como DT. Si un número triangular de orden N se define como N(N+1)/2, en estos números, N también es triangular, por ejemplo m(m+1)/2, con lo que, sustituyendo queda:

$$DT(m)=(m(m+1)/2)(m(m+1)/2+1)/2=m(m+1)(m^2+m+2)/8$$

Esta es la fórmula utilizada en su publicación en OEIS:

A002817 Doubly triangular numbers: a(n) = n*(n+1)*(n^2+n+2)/8. 67
(Formerly M4141 N1718)
0, 1, 6, 21, 55, 120, 231, 406, 666, 1035, 1540, 2211, 3081, 4186, 5565, 7260, 9316, 11781, 14706, 18145, 22155, 26796, 32131, 38226, 45150, 52975, 61776, 71631, 82621, 94830, 108345, 123256, 139656, 157641, 177310, 198765, 222111, 247456, 274911, 304590 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Como un número triangular es suma de los primeros números consecutivos, estos doblemente triangulares han de equivaler a una suma de ese tipo en el que el número de sumandos sea triangular. Esto se visualiza muy bien en el triángulo de Floyd:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15

Si se van sumando los números fila a fila nos resultarán, 1, 6, 21, 55, 120,…los doblemente triangulares.

Para generarlos con hoja de cálculo basta crear una columna con los primeros números naturales, otra paralela con los triangulares y, por último, copiar la fórmula de la segunda en otra tercera:

N	N(N+1)/2	N(N+1)/2*(N/N+1)/2+1)/2
1	1	1
2	3	6
3	6	21
4	10	55
5	15	120
6	21	231
7	28	406
8	36	666
9	45	1035
10	55	1540
11	66	2211
12	78	3081
13	91	4186
14	105	5565
15	120	7260

La última fórmula se incluye para aclarar, pero en la hoja coincide con la segunda con órdenes distintos. Así:

N	N(N+1)/2	N(N+1)/2*(N/N+1)/2+1)/2
1	=C3*(C3+1)/2	=D3*(D3+1)/2
2	=C4*(C4+1)/2	=D4*(D4+1)/2
3	=C5*(C5+1)/2	=D5*(D5+1)/2
4	=C6*(C6+1)/2	=D6*(D6+1)/2
5	=C7*(C7+1)/2	=D7*(D7+1)/2
6	=C8*(C8+1)/2	=D8*(D8+1)/2

Se observa que las dos columnas poseen la misma fórmula. Por eso estos números son doblemente triangulares.

Relación con números combinatorios

Como también los números triangulares de orden N equivalen al número combinatorio C(N+1,2), que cuenta el número de pares de elementos de un conjunto de cardinal N+1, sin repetición, el número doblemente triangular contará el "número de pares de pares". Así, se puede expresar también como

$$DT(n) = \binom{\binom{n+1}{2}+1}{2}$$

En lenguaje de hoja de cálculo tendríamos:

DT(N)=COMBINAT(COMBINAT(N+1;2)+1;2)

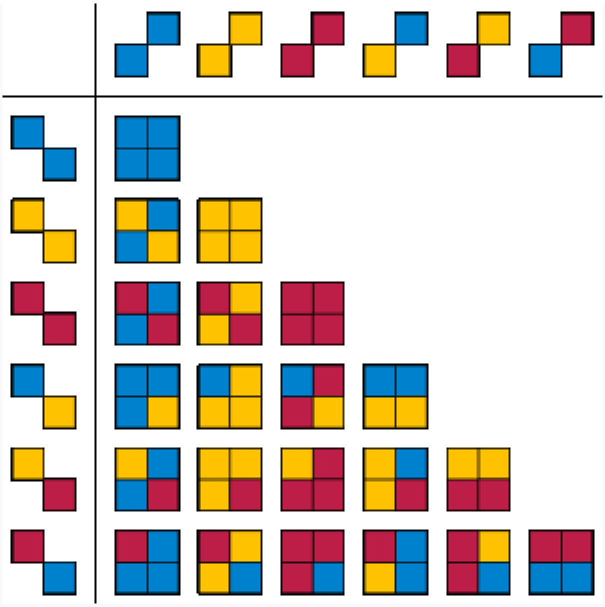
Escribe en una hoja

=COMBINAT(COMBINAT(12;2)+1;2)

y te resultará 2211, el número doblemente triangular de orden 11.

Colores en un cuadrado

Esta idea de "pares de pares" la visualiza Wikipedia en las formas de colorear las diagonales de un cuadrado si se consideran iguales las que surgen de rotaciones o simetrías. En la imagen figuran los pares de colores arriba y a la izquierda, mientras los "pares de pares" figuran en el centro:



Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Doubly_triangular_number

Este esquema de colores se puede reproducir con nuestra herramienta ***Cartesius***,

(http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

si representamos las combinaciones de colores con números de dos cifras. El planteo puede ser el siguiente:

Escribe a partir de la siguiente fila ⇓⇓⇓ (no dejes filas en blanco)
xtotal=2
xt=11,12,22,13,23,33
creciente

Combinamos pares de pares, representando los colores por 11, 12,…33 y exigiendo que sea creciente cada arreglo para que no se repitan los pares (de pares). El resultado es:

X1	X2
11	11
11	12
11	22
11	13
11	23
11	33
12	12
12	22
12	13
12	23
12	33
22	22
22	23
22	33
13	22
13	13
13	23
13	33
23	23
23	33
33	33

En la parte derecha de la hoja se reflejará el total, el número doblemente triangular 21.

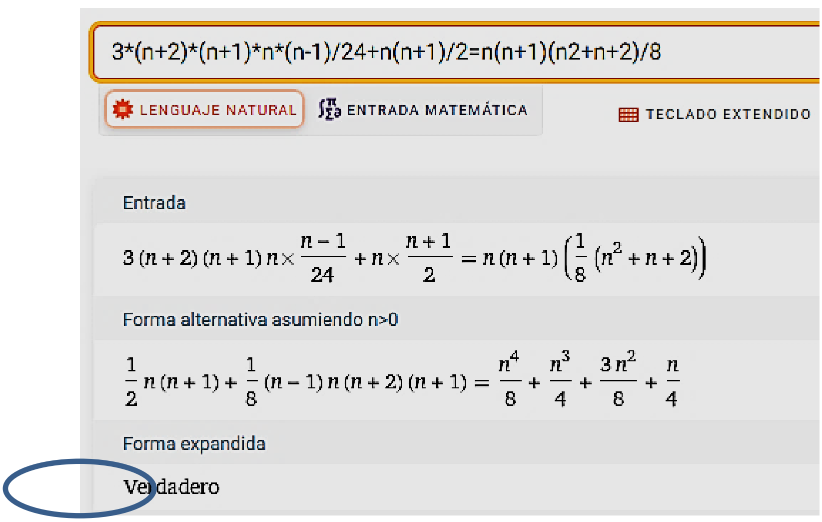
Total
21

En OEIS se propone esta otra fórmula con números combinatorios:

$$DT(n) = 3\binom{n+2}{4} + \binom{n+1}{2}$$

DT(n)=3*(n+2)*(n+1)*n*(n-1)/24+n(n+1)/2=n(n+1)(n^2+n+2)/8

Esta igualdad se verifica muy bien en WolframAlpha:



https://www.wolframalpha.com/

También Mitch Harris, Oct 17 2006 y Bruce J. Nicholson proponen esta otra expresión con números combinatorios:

$$DT(n) = \binom{n+1}{4} + \binom{n+2}{4} + \binom{n+3}{4}$$

También se puede verificar algebraicamente. Antes hemos sustituido los números combinatorios por su expresión respecto a **n**:

$$\frac{1}{24}((n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2) + (n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1) + (n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,n) = n\,(n+1)\left(\frac{1}{8}(n^2+n+2)\right)$$

Forma alternativa asumiendo n>0

Aumentar | Datos

$$\frac{1}{24}(n-2)\,(n-1)\,n\,(n+1) + \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+2)\,(n+1) + \frac{1}{24}\,n\,(n+2)\,(n+3)\,(n+1) = \frac{n^4}{8} + \frac{n^3}{4} + \frac{3\,n^2}{8} + \frac{n}{4}$$

Forma expandida

Verdadero

https://www.wolframalpha.com/

Aportación nuestra

Para n>=2, a(n) es la suma de dos números triangulares de esta forma:

DT(n)=T(n(n+1)/2)=T(n)+T((n^2+n-2)/2)

Esto es debido a la identidad:

n*(n+1)*(n^2+n+2)/8=n*(n+1)/2+(n^2+n-2)*(n^2+n)/8)

También la hemos verificado en

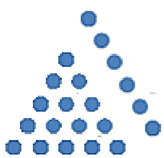
https://www.wolframalpha.com/

La idea nos surgió al descubrir las coincidencias con la sucesión de números triangulares que son suma de triangulares. Puedes consultar nuestra entrada

https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/04/sumandos-con-el-mismo-caracter-que-la.html

Así, por ejemplo, 21=6+15, 55=10+45, 120=15+105,…

En realidad, no es necesario acudir al Álgebra. La siguiente imagen representa muy bien esta descomposición:



En ella observamos que el triangular 21, de orden 6 (también triangular) se convierte en otro triangular al separarle el lado. Por tanto, 21 es la suma de dos triangulares, su lado, que es 6 y el triangular residual, 15.

Con sus fórmulas:

6*7/2=3*4/2+5*6/2

NÚMEROS DOBLE DE UN CUADRADO

Hoy haremos un ejercicio de “dar vueltas” a un tema, técnica muy usada en los primeros tiempos de este blog y que hemos ido abandonando a lo largo de sus temporadas. Consiste en tomar un concepto y buscarle propiedades desde varios puntos de vista.

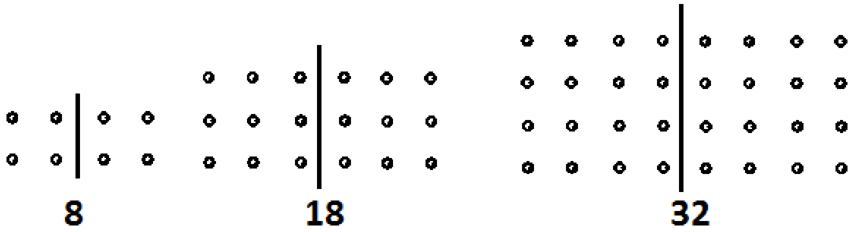
Hoy daremos vueltas a los números que son el doble de un cuadrado, como 2, 8, 72 o 288. Su expresión es, evidentemente, $D(n)=2n^2$, donde los hemos representado con la D de doble. Simultáneamente, son mitad de otro cuadrado, ya que $2n^2=(2n)^2/2$, lo que los convierte en el área de un triángulo isósceles de lado 2n, o de un cuadrado de diagonal 2n.

Es una expresión muy simple, pero que nos puede llevar a varios territorios muy diferentes entre sí.

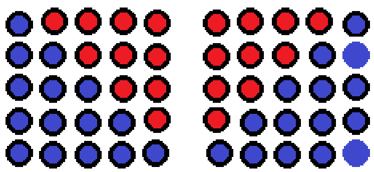
Están publicados en http://oeis.org/A001105, y de esa página extraeeremos algunas ideas.

Relación con números figurados

Es evidente que estos números son también figurados (representables con una figura geométrica), como los triangulares o pentagonales, pero especiales, no pertenecientes a la categoría general de números poligonales. Simplemente están formados por dos cuadrados adosados, tal como se ve en la siguiente imagen.



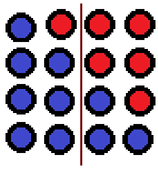
Como todo cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos, los dobles de cuadrados que estamos estudiando se podrán formar adosando cuatro triangulares:



En la imagen se han usado los triangulares T(4) y T(5) para formar el número

$50=2*5^2=2(T(4)+T(5))=2(10+15)=50$

Por tanto, además de ser dobles de cuadrados, estos números son suma de dobles de triangulares, como era de esperar. Al contrario, también son mitad de una suma de triangulares consecutivos, según la figura siguiente:



Algebraicamente, podemos expresar:

Todo doble de cuadrado es el promedio de dos números triangulares consecutivos:

$2n^2=(T(2n-1)+T(2n))/2=(2n(2n-1)+2n(2n+1)/4=2n*4n/4=2n^2$

Es decir **D(n)=(T(2n-1)+T(2n))/2**

Así: 2=(1+3)/2, 8=(6+10)/2, 18=(15+21)/2

Como los números triangulares, multiplicados por 8 y aumentados en una unidad se convierten en cuadrados ($8T(n)+1=(2n+1)^2$), como ocurre, por ejemplo, en $8*15+1=121=11^2$, la propiedad anterior nos indica que si efectuamos la misma operación con los dobles de cuadrados, resultará el promedio de dos cuadrados:

$8D(n)+1=(8T(2n-1)+1+8T(2n)+1)/2=((4n-1)^2+(4n+1)^2)/2$

Ejemplo: 8*D(4)+1=8*32+1=257

$(15^2+17^2)/2=(225+289)/2=514/2=257$

Si a un doble de cuadrado lo multiplicamos por 8 y le añadimos una unidad, resulta el promedio de dos cuadrados diferenciados en dos unidades.

La anterior operación desemboca en un cuadrado más la unidad, ya que $8D(n)+1=16n^2+1=(4n)^2+1$. Así ha ocurrido en el ejemplo anterior.

El cuadrado de un número múltiplo de 4 más la unidad es el promedio de dos cuadrados m^2 y $(m+2)^2$.

Por ejemplo, $1024+1=1025=(31^2+33^2)/2$

Con esto finalizamos la "vuelta" a este tipo de números figurados y sus propiedades algebraicas.

Relación con sumas

D(n) es el resultado de sumar todas las particiones de 2n en exactamente dos partes(Wesley Ivan Hurt, Jun 01 2013).

Es sencillo demostrarlo, pues en cada paréntesis de los siguientes figura una partición de 2n:

$(1+2n-1)+(2+2n-2)+\ldots(n+n)=n*2n=2n^2=D(n)$

La suma de enteros consecutivos entre D(n) y D(n+1)-1, ambos inclusive, es un cubo (Patrick J. McNab, Dec 24 2016).

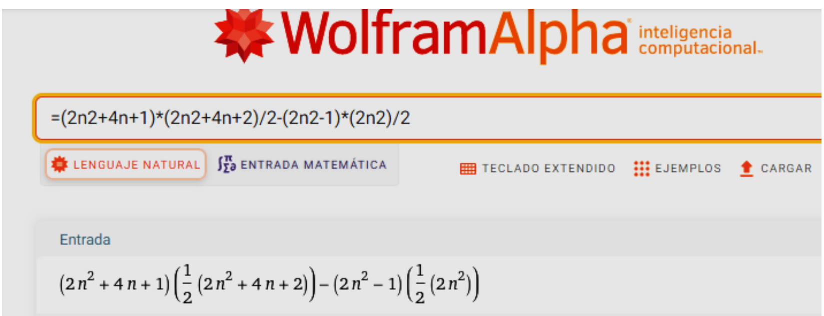
En efecto, entre 8 y 32, por ejemplo, esa suma es 8+9+10+11+…30+31, y es igual a $343=7^3$. En general:

Los primeros números consecutivos suman un triangular, luego esa suma será igual a S=T(D(n+1)-1)-T(D(n)-1). Desarrollando:

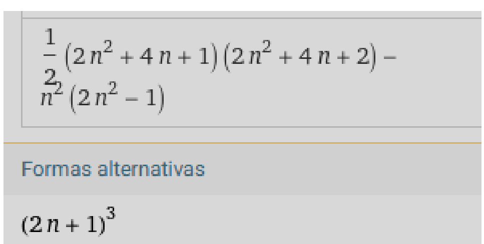
$S=T(2(n+1)^2-1)-T(2n^2-1)=T(2n^2+4n+1)-T(2n^2-1)$ que es igual a

$S=(2n^2+4n+1)*(2n^2+4n+2)/2-(2n^2-1)*(2n^2)/2$.

Le damos este dato a Wolfram Alfha



Nos devuelve la expresión simplificada:



En efecto, es un cubo, $(2n+1)^3$. Hemos programado estas sumas y se comprueba su carácter de cubo:

D(n)	2	8	18	32	50
Suma	27	125	343	729	1331

Recurrencias

Vincenzo Librandi propone la siguiente, en la que se mezcla a(n-1) con la variable n

a(n) = 4*n + a(n-1) – 2

No es difícil comprobarla con hoja de cálculo. Basta crear una columna con los valores 1, 2, 3, …y comenzar con a(1)=2, para después ir aplicando la relación hacia abajo:

n	4n+a(n-1)-2
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50
6	72
7	98
8	128
9	162
10	200

Algebraicamente: $4n+2(n-1)^2-2 = 4n+2n2-4n+2-2=2n^2$

Es preferible una recurrencia lineal homogénea, en la que a(n) depende de los términos anteriores sin implicar al número de orden. Muchos números figurados siguen una relación de recurrencia con los coeficientes 1, -3, 3, y en este caso es válida. Para demostrarlo hemos acudido a nuestra herramienta *ecurecurre,xlsm*, accesible desde la página

http://www.hojamat.es/sindecimales/otros.htm

En el listado sobre el blog que contiene hay que buscar *ecurecurre.xlsm*

Con ella se comprueba que los propuestos son los coeficientes válidos:

Sucesión	2	8	18	32
3,875	-5,5	2,125		
-5,5	7	-2,5		
2,125	-2,5	0,875		

Filas 3 Columnas 3

Resultado: Producto

	1
	-3
	3

Para confirmarlo hemos acudido a otra de nuestras herramientas, la que estudia relaciones de recurrencia de segundo orden:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#recurre2

Coeficientes					
A	3	B	-3	C	1
Valores iniciales					
X0	2	x1	8	x2	18

Al pedir la sucesión observamos que se reproduce la sucesión D(n):

2
8
18
32
50
72
98
128

$2n^2 = 3(2(n-1)^2))-3(2(n-2)^2))+2(n-3)^2$

Volvemos a acudir a Wolfram Alfha y nos da la igualdad como verdadera.

Entrada

$$2n^2 = 3\left(2(n-1)^2\right) - 3\left(2(n-2)^2\right) + 2(n-3)^2$$

Forma expandida

Verdadero

Caso de base prima

Con nuestro Buscador de naturales (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#buscador)

es sencillo crear la subsucesión de D(n) formadas por aquellos términos de base prima.

Resultado de la búsqueda

Fin

lúm.	Solución	Detalles
1	2	8
2	3	18
3	5	50
4	7	98
5	11	242
6	13	338
7	17	578
8	19	722
9	23	1058
10	29	1682
11	31	1922
12	37	2738
13	41	3362

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	200

Con estas propiedades:

PRIMO
EVALUAR 2*N^2

Forman la sucesión 8, 18, 50, 98, 242, 338, 578, 722, 1058, 1682, 1922, 2738, 3362, 3698, 4418,…

Está publicada en http://oeis.org/A079704

Los podemos representar como $\mathbf{2p^2}$

En ellos, la falta de pautas en la sucesión de primos hace inviables las recurrencias lineales, pero presentan algunas curiosidades.

Funciones TAU, SIGMA y PHI

TAU (número de divisores) tiene le valor de 6 en todos los términos, porque depende solo de los exponentes, y según su fórmula, ***TAU(2p²)=(1+1)(1+2)=6***

SIGMA (suma de divisores) posee un desarrollo parecido: ***SIGMA(2p²)=(1+2)(1+p+p²)***

Por ejemplo,

$SIGMA(242)=SIGMA(2*11^2)=(1+2)(1+11+11^2)=3*133=399$

PHI (cuenta coprimos con N y menores que él), según también su fórmula usual, tendría en este caso la siguiente:

PHI(2p²)= 2p²(1-1/2)(1-1/p)=p(p-1)

En el caso de $98=2*7^2$, se cumplirá PHI(98)=7*6=42

Podríamos seguir:

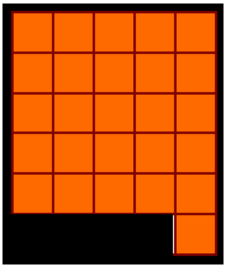
OMEGA(2p²)=2, BIGOMEGA(2p²)=3, …

REGRESOS

REGRESOS 5 – UN CUADRADO Y UNA UNIDAD

El día 5 de noviembre de 2008 se publicó en mi blog "Números y hoja de cálculo" una primera versión del tema de los números del tipo n^2+1

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2008/11/un-cuadrado-ms-una-unidad.html). Después se amplió algo, pero como es un tema interesante, regresamos a él con nuevas ideas y materiales



En este regreso estudiaremos números tipo n^2+1 según su naturaleza. Lo normal es comenzar con los que son primos

Primos del tipo n^2+1

Con cualquier buscador, exigiendo que un número sea primo y de la forma n^2+1 obtendremos una lista con los primeros números de ese tipo. Por ejemplo, con Excel nos resultaría

P	n
2	1
5	2
17	4
37	6
101	10
197	14
257	16
401	20
577	24
677	26
1297	36

En la tabla figuran los primos P y los valores de n tales que $P=n^2+1$. Hemos usado nuestra función ESPRIMO y la condición de que P coincida con la parte entera de su raíz cuadrada incrementada después en una unidad, o bien que sea cuadrado P-1. Es lógico que el valor de n sea par, salvo el primer caso P=1.

Otra forma de caracterizarlos es que su función PHI (indicatriz de Euler) sea un cuadrado, ya que PHI(N) cuenta los coprimos con N menores que él incluido 1, y en los números primos PHI(P)=P-1, y de ahí que sea un cuadrado en este caso.

Estos números están publicados en http://oeis.org/A002496, y según una conocida conjetura, forman una sucesión infinita

(Ver mi documento "Conjeturas" en

http://www.hojamat.es/publicaciones/conjeturas.pdf)

Salvo el caso de 2, todos serán de la forma 4K+1, por ser **n** par y, según el Teorema de Navidad de Fermat, se descompondrán en suma de cuadrados de forma única. Así que, además de la suma n^2+1^2, no existirá otra similar. Efectivamente, si ampliamos la tabla anterior con nuestra función ESSUMACUAD, obtenemos un resultado único:

P	n	Sumacuad
2	1	$$ 1 1
5	2	$$ 2 1
17	4	$$ 4 1
37	6	$$ 6 1
101	10	$$ 10 1
197	14	$$ 14 1
257	16	$$ 16 1
401	20	$$ 20 1
577	24	$$ 24 1
677	26	$$ 26 1
1297	36	$$ 36 1

Este es un resultado idéntico con el Buscador de Naturales:

Solución	Detalles
2	1 + 1
5	1 + 4
17	1 + 16
37	1 + 36
101	1 + 100
197	1 + 196
257	1 + 256
401	1 + 400
577	1 + 576
677	1 + 676
1297	1 + 1296

Hasta el número

Con estas propiedades:

primo
es cuadrado(N-1)
suma c c

Hay que prestar atención a las condiciones impuestas.

N^2+1 y los restos cuadráticos

Otra forma de ver la igualdad $P=n^2+1$ es considerar que -1 es un resto cuadrático de P. Puedes estudiar los restos cuadráticos en mi documento de Teoría de las congruencias (http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/teoria/teorcong.pdf)

Para cada número primo impar P, los números menores que él se dividen en *Restos cuadráticos*, si son restos de un cuadrado, y *No restos cuadráticos*, si no existe un cuadrado que presente un resto con ese valor módulo P.

Nuestra hoja de cálculo *Congruencias2*, (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/congruencias/herramientas/herrcong.htm) clasifica los posibles restos en Restos (cuadráticos) y No restos. Por ejemplo, para el 17, que es igual a 4^2+1, el -1 (en este caso equivalente a 16) sí figura como resto cuadrático. Lo vemos en la imagen:

Restos y no restos

Módulo P	17	
1	1	3
2	6	5
4	2	6
8	5	7
9	3	10
13	8	11
15	7	12
16	4	14

En la figura el 16 (-1) como resto, y el 4 (en rojo) como raíz cuadrada.

Los primos como el 23, que no figuran en nuestro listado, no poseerán -1 como resto cuadrático (en este caso 22):

Restos y no restos

Módulo P	23	
1	1	5
2	5	7
3	7	10
4	2	11
6	11	14
8	10	15
9	3	17
12	9	19
13	6	20
16	4	21
18	8	22

Vemos que el 22 (o su equivalente -1) figura entre los *no restos*, por lo que 23 no tiene la forma n^2+1, como era de suponer.

Estas consideraciones son triviales para el caso de números primos, pero serán útiles más adelante en el apartado de números compuestos.

Compuestos del tipo n^2+1

Otras veces n^2+1 es un compuesto, como 26 o 50. En ese caso la figura cuadrada se puede convertir en un rectángulo al añadirle un cuadradito más, pues se formaría uno de 2 por 13 o de 5 por 10 o 2*25.

Podíamos afirmar que estos compuestos son aquellos en los que n^2+1 se puede convertir en un rectángulo de lados enteros.

Según la definición de resto cuadrático, si un compuesto del tipo **C=n^2+1** tiene un divisor primo **p**, -1 deberá ser resto cuadrático módulo **p**, tal como vimos en el caso de los primos. Esto es muy importante, porque ningún número compuesto n^2+1 podrá ser múltiplo de p si este no admite resto -1. Sería el caso de 23: ningún elemento de la sucesión http://oeis.org/A002496 será múltiplo de 23.

En la sucesión http://oeis.org/A070303 figuran aquellos primos que no pueden ser divisores de un compuesto del tipo n^2+1:

3, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 103, 107, 109, 113, 127,…

Así que, por ejemplo, ningún número múltiplo de 7 puede convertirse en cuadrado al restarle una unidad.

Son aquellos que poseen la forma 4k+3, y no equivalen a una suma de cuadrados.

Lo puedes comprobar con este pequeño programa en PARI:

for(i=1,10^6,if(issquare(i*7-1),print(i)))

Al ejecutarlo descubrimos que no imprime nada, dentro del primer millón de primeros múltiplos de 7.

Resumiendo:

- Los restos cuadráticos clasifican, respecto a expresiones del tipo n^2+1, a los números primos en tres clases:

- Primos que no dividen a este tipo de expresiones: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43,…En la descomposición factorial de cuadrados más una unidad no figurarán estos números primos. Son los que presentan la forma 4N+3
- Números primos que sí son factores de expresiones del tipo n^2+1: 2, 13, 29, 41, 53,…Se corresponden con los primos de la forma 4N+1. Por ejemplo, $5^2+1=26=2*13$
- Por último, los que se pueden expresar como n^2+1: 5, 17, 37, 101, 197,… que son un subconjunto de los anteriores.

Así, por ejemplo, se dan estas descomposiciones:

$32^2+1=5^2*41$; $57^2+1=2*5^3*13$;

$211^2+1=2*113*197=2*113*(14^2+1)$

Los números de la forma n^2+1 tienen una propiedad muy elegante, y es que son divisores de otros números similares, y además, su cociente también es del tipo n^2+1, es decir, que para todo n, existen m y p tales que

$(n^2+1)(m^2+1)= p^2+1$. En efecto, basta tomar m=n-1 y $p=n^2-n+1$:

$$(n^2+1)\cdot((n-1)^2+1) \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

$$(n^2-n+1)^2+1 \Rightarrow n^4-2\cdot n^3+3\cdot n^2-2\cdot n+2$$

Triangulares del tipo n^2+1

Si a un número natural le exigimos que sea triangular del tipo n^2+1, es equivalente a que su anterior sea un cuadrado. Buscamos, pues, un cuadrado seguido de un triangular. No es difícil plantearlo. En nuestras funciones de Excel sería, usando la conectiva lógica Y:

Y(ESCUAD(N-1);ESTRIANGULAR(N))

Con ella es fácil encontrar los primeros ejemplos de triangulares con la forma n^2+1:

$10=4*5/2=3^2+1$

$325=25*26/2=18^2+1$

$11026=148*149/2=105^2+1$

Con PARI podemos usar el criterio issquare(i-1)&&issquare(8*i+1) y obtendríamos fácilmente otro elemento, el 374545.

Estudio algebraico

Podemos plantear que un número triangular sea el consecutivo a un cuadrado:

$X*(X+1)/2=Y^2+1$

Manipulamos esta igualdad buscando una ecuación diofántica tipo Pell-Fermat:

$X^2+X-2Y^2-2=0$

$4X^2+4X+1-8Y^2-9=0$

$(2X+1)^2-8Y^2=9$

$Z^2-8Y^2=9$

En este tipo de ecuaciones solemos intentar resolverlas como una ecuación de Pell (en lugar del 9 debería haber un 1 o un -1), para después aprovechar, si es posible, la recurrencia entre soluciones.

Usamos nuestra hoja de cálculo correspondiente (descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#pell)

Sus primeras soluciones son:

Z=9, X=4, Y=3, con el triangular 4*5/2=10 y el cuadrado 3^2=9

Z=51, X=25, Y=18, Triangular 25*26/2=325 y cuadrado 18^2=324

"Engañamos" al algoritmo usando como primera solución Z=9, Y=3, con lo que el resto de soluciones se genera fácilmente de forma recursiva:

Z	Y	Constante	X	Triangular
3	**1**	**+1 ó -1**	1	1
9	3	9	4	10
51	18	9	25	325
297	105	9	148	11026
1731	612	9	865	374545
10089	3567	9	5044	12723490
58803	20790	9	29401	432224101
342729	121173	9	171364	14682895930

Excel no puede seguir con más cifras enteras. Estas soluciones están publicadas en http://oeis.org/A164055:

A164055 Triangular numbers that are one plus a perfect square. ....

1, 10, 325, 11026, 374545, 12723490, 432224101, 14682895930, 498786237505, 16944049179226, 575598885856165, 19553418069930370, 664240615491776401, 22564627508650467250, 766533094678624110085, 26039560591564569275626

Con el lenguaje PARI el planteo es muy simple:

for(i=1,10^8,if(issquare(i-1)&&issquare(8*i+1),print1(i,", ")))

Aquí se exige que i sea triangular (*issquare(8*i+1)*) y

En esta captura de pantalla se comprueba el resultado:

```
1, 10, 325, 11026, 374545, 12723490,
(18:47) gp >
```

Ha sido interesante estudiar esta sucesión desde varios puntos de vista.

Oblongos del tipo n^2+1

Es costumbre nuestra prolongar los estudios sobre triangulares a sus dobles, que son los números oblongos: O(n)=n(n+1). Nuestra sorpresa ha sido que solo existe la solución X=2=1*2 $Y=1^2$

No es difícil justificar esa ausencia. Si planteamos la ecuación lo razonaremos:

$X(X+1)=Y^2+1$

$X^2+X=Y^2+1$

$Y^2-X^2=X-1$

Esta igualdad solo se cumple para X=1 y X=Y

En los demás casos, con X>1, la diferencia entre X^2 y su siguiente cuadrado es 2X+1, siempre mayor que X-1, luego no habrá más soluciones.

Poligonales del tipo n^2+1

Hemos estudiado ya los triangulares, y los cuadrados no se pueden considerar en este caso porque no tendría sentido, así que probaremos con los pentagonales. Nuestra función ESPOLIGONAL (ver, por ejemplo, https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/09/consecutivos-que-son-poligonales.html) nos puede ayudar con la hoja de cálculo.

Con Excel

Usamos la fórmula de los pentagonales, $P(n)=(3*n^2-n)/2$, y un algoritmo similar, obteniendo:

Pentagonal Cuadrado

1 0

5 4

145 144

2501 2500

43265 43264

Comprobamos con este código PARI:

```
is(n)={my(m=1+24*n,b=(1+sqrt(m)));issquare(m)&&b%6==0&&issquare(n-1)}
 for(i=1,5*10^8,if(is(i),print1(i,", ")))
```

Obtenemos:

1, 5, 145, 2501, 43265, 1387685, 24010001, 415425925

Es muy costoso y lento seguir. Lo dejamos en este punto.

Invitamos a repetir el trabajo con hexagonales. Entre los primeros sólo hemos encontrado 1 y 325.

REGRESOS 6 – OBLONGOS Y PITAGÓRICOS

Desde la publicación de nuestra entrada de título “Oblongos y pitagóricos”

(https://hojaynumeros.blogspot.com/2010/03/oblongos-y-pitagoricos-3.html)

hemos estudiado algunas relaciones entre catetos e hipotenusa dentro de una terna pitagórica. Parece conveniente repasar las mismas, eliminando lo accesorio, y efectuar una síntesis.

Catetos que se diferencian en una unidad

Comenzaremos con un repaso a la primera cuestión que publicamos:

Una cuestión que ha dado juego desde los tiempos de Girard y Fermat y que permite recorrer alternativas de cálculo es la siguiente:

De todos los triángulos rectángulos de lados enteros ¿Cuáles cumplen que la diferencia entre los catetos es la unidad?

Recordábamos que la primera terna en cumplir esta condición es la popular 3, 4 y 5. El resto resultará de la ecuación $x^2+(x+1)^2=y^2$.

Otra forma de expresarlo es que el área del rectángulo formado por los dos catetos es un número oblongo, tipo N(N+1) y, por tanto, el área del triángulo será triangular (N(N+1)/2).

Podemos resolverla mediante búsqueda y con técnicas algebraicas.

Búsqueda

Como últimamente usamos funciones, organizaremos la búsqueda con la siguiente:

```
Function catetoscons$(n)
Dim a
Dim s$
s = ""
a = n^2 + (n+1)^2
```

If escuad(a) Then s = Str$(n) + Str$(n + 1) + Str$(Sqr(a))
catetoscons = s
End Function

Su funcionamiento se entiende bien: si n^2+(n+1)^2 es cuadrado, devuelve la terna completa. Las primeras conseguidas son:

N	Terna
3	3 4 5
20	20 21 29
119	119 120 169
696	696 697 985
4059	4059 4060 5741
23660	23660 23661 33461

Los valores de N están publicados en http://oeis.org/A001652. Volveremos a esta sucesión para revisar algunas propiedades.

Versión en PARI

Con este código avanzaremos más lejos en los valores de N:

is(n)={issquare(n^2+(n+1)^2)}
for(i=1,10^9,if(is(i),print1(i,", ")))

Obtenemos este resultado:

3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519,

Hemos llegado más lejos, pero con tantas cifras la búsqueda se hace muy lenta. Es preferible algún otro procedimiento más rápido, por lo que pasamos al Álgebra:

Estudio algebraico

La ecuación $x^2+(x+1)^2=y^2$ se puede desarrollar de esta forma: $x^2+(x+1)^2=y^2$; $2x^2+2x+1=y^2$; $(2x+1)^2+1=2y^2$; $(2x+1)^2 - 2y^2 = -1$, por lo que llamando $z=2x+1$ desembocamos en una ecuación de Pell con segundo miembro igual a -1

$Z^2-2y^2 = -1$

Utilizamos la hoja de cálculo *pell.ods* o *pell.xlsm* contenidas en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

con el resultado que indica la imagen siguiente

1	2	2	2	2	2	2
1	3	7	17	41	99	239
1	2	5	12	29	70	169
-1	1	-1	1	-1	1	-1
Solución		Solución		Solución		Solución

en la que valdrán las soluciones correspondientes a -1

Z=1; Y=1; Imposible, pues X sería negativo

Z=7; Y=5 X=3; X+1=4; Y=5

Z=41; Y=29 X=20; X+1=21; Y=29

Z=239; Y=169 X=119; X+1=120; Y=169

Z=1393; Y=985 X=696; X+1=697; Y=985

Este método tiene el inconveniente de que depende de la precisión que tenga la hoja de cálculo en los números con coma flotante, lo que hará que se rompa en algún momento la periodicidad de los cocientes, en este caso el 2. Por ello se puede completar con una fórmula recursiva que obtenga soluciones exactas conociendo las primeras.

En este ejemplo cada elemento de las distintas celdas cumple la fórmula

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

pero como las soluciones aparecen de forma alternada, deberemos reiterar dos veces, y nos quedará:

$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} = 2(2a_{n+2} + a_{n+1}) + 2a_{n+1} + a_n = 4a_{n+2} + 4a_{n+1} + a_n = 6a_{n+2} - a_n$

Con esta fórmula recursiva se van obteniendo las soluciones sin errores a partir de las dos primeras:

$Z_0 = 1$; $Z_2 = 7$; $Z_4 = 6*7-1 = 41$; $Z_6 = 6*41-7 = 239$;…

$Y_0 = 1$; $Y_2 = 5$; $Y_4 = 6*5-1 = 29$; $Y_6 = 6*29-5 = 169$;…

Pero no olvidemos que Z es una variable auxiliar Z=2X+1 y que después debemos despejar X

La siguiente lista de ternas, que coincide con la primera que propuso Girard, se ha obtenido mediante esta técnica. Los valores de N coinciden con los de la segunda columna.

1	0	1
5	3	4
29	20	21
169	119	120
985	696	697
5741	4059	4060
33461	23660	23661
195025	137903	137904
1136689	803760	803761
6625109	4684659	4684660
38613965	27304196	27304197
225058681	159140519	159140520
1311738121	927538920	927538921
7645370045	5406093003	5406093004
44560482149	31509019100	31509019101
259717522849	183648021599	183648021600
1513744654945	1070379110496	1070379110497
8822750406821	6238626641379	6238626641380
51422757785981	36361380737780	36361380737781
299713796309065	211929657785303	211929657785304

Los valores de N coinciden con los contenidos en http://oeis.org/A001652, que, por cierto, usa esta recurrencia como definición, que con el cambio de variable entre Z y X queda así:

*a(n) = 6*a(n-1) - a(n-2) + 2 with a(0) = 0, a(1) = 3.*

0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519, 927538920, 5406093003, 31509019100, 183648021599, 1070379110496, 6238626641379, 36361380737780, 211929657785303,

Con hoja de cálculo ya no podemos seguir, por el problema de la coma flotante. Lo podemos intentar con PARI:

a=0;b=3;print1(a,", ");print1(b,", ");while(a<10^20,c=6*b-a+2;print1(c,", ");a=b;b=c)

Como llegamos a 10^20, en pocos segundos se avanza en la lista de valores de N:

```
0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, 4684659, 27304196, 159140519, 9
27538920, 5406093003, 31509019100, 183648021599, 1070379110496, 6238626641379, 3
6361380737780, 211929657785303, 1235216565974040, 7199369738058939, 419610018623
79596, 2445666414362186 39, 14254388467549322 40, 83080664390933748 03, 48422959787
805316580, 282229692287738524679, 1644955193938625831496,
```

Una curiosidad

Cuando no se tienen claras las fórmulas de recurrencia lineal, pero se dispone de suficientes términos iniciales.

Se puede acudir a mi hoja de cálculo *ecurrecurre*, disponible en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm

En este caso usamos como datos los términos iniciales 0, 3, 20, 119, 696, y elegimos la variedad “No homogénea”, para que admita el sumando independiente 2. Pulsamos el botón de ***resolver*** y nos devuelve los coeficientes 6, -1 y 2.

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	Resolver
Sucesión	0	3	20	119	696	
-5,375	7,5	-1,125				2
-12,375	14,5	-2,125				-1
2,125	-2,5	0,375				6

Recurrencia doble

Fermat propuso una fórmula de recurrencia para generar ternas de este tipo a partir de otras similares. Dada la terna (x,x+1,y), se puede generar otra similar (x’,x’+1,y’) mediante las fórmulas x’=2x+3y+1 y y’=4x+3y+2.

Cuando se buscan las soluciones de la ecuación de Pell las recurrencias vienen dadas por las fórmulas de recurrencia $z_{n+1}=z_n*z_0+D*y_n*y_0$ $y_{n+1}=z_n*y_0+y_n*z_0$, pero en el caso $z^2-2y^2 = -1$ las soluciones surgen de forma alternada.

Así, como en este caso z_0=1, y_0=1, tendremos:

$z_{n+1}=z_n+2y_n$; $y_{n+1}=z_n+y_n$ y reiterando dos veces

Z''=Z'+2Y'=(Z+2Y)+2(Z+Y) = Z+2Y+2Z+2Y = 3Z+4Y

Y''=Z'+Y' = Z+2Y+Z+Y = 2Z+3Y

Teniendo en cuenta que Z=2X+1, y que Y=X+1, nos resulta

Y''=2Z+3Y=2(2X+1)+3Y = 4X+3Y+2, que es la segunda fórmula de Fermat

De Z''=3Z+4Y podemos obtener (2X''+1)=3(2X+1)+4Y; 2X'' = 6X+4Y+2;

X'' = 3X+2Y+1, que es la primera

Aplicamos estas dos fórmulas al cateto menor y a la hipotenusa y obtenemos los mismos resultados a partir de 3, 4 y 5

X''=3X+2Y+1 X+1 Y''=4X+3Y+2

3	4	5
20	21	29
119	120	169
696	697	985
4059	4060	5741
23660	23661	33461
137903	137904	195025

803760 803761 1136689
4684659 4684660 6625109
27304196 27304197 38613965
159140519 159140520 225058681

Uso de la generación de ternas

La terna 3, 4, 5 está engendrada por las fórmulas clásicas 2uv, u^2-v^2 y u^2+v^2 para u=2 y v=1. Si sustituimos u y v por u, v+2u se mantendrá la misma diferencia entre catetos.

Basta ver que si engendramos los nuevos catetos y los restamos (en orden contrario) resultará: $2u(v+2u) - (v+2u)^2+u^2= 2uv+4u^2-v^2-4u^2-4uv+u^2 = u^2-v^2-2uv$, que es la diferencia original.

Esto nos permite engendrar de nuevo la lista que estamos considerando, tomando, n primer lugar u=2 v=1, y generando con ella la primera terna 3, 4 y 5. Después se aplica la fórmula de recurrencia $u_n = 2u_{n-1}+v_{n-1}$ $v_n = u_{n-1}$ y se vuelve a generar una terna con ella, que resultará tener la misma diferencia pero con signo cambiado. Así hemos generado la lista con hoja de cálculo:

u	v	x	y	z
2	1	4	3	5
5	2	20	21	29
12	5	120	119	169
29	12	696	697	985
70	29	4060	4059	5741
169	70	23660	23661	33461
408	169	137904	137903	195025
985	408	803760	803761	1136689
2378	985	4684660	4684659	6625109
5741	2378	27304196	27304197	38613965
13860	5741	159140520	159140519	225058681

Relación con triangulares

Área triangular y oblonga

Ya se comentó anteriormente que el área del triángulo rectángulo de catetos N y N+1 es un número triangular. En la sucesión que nos ocupa, las áreas son las siguientes (prescindimos del cero):

6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470,…

Están contenidas en http://oeis.org/A029549

En mi entrada de blog

http://hojaynumeros.blogspot.com/2021/05/triangulares-que-son-oblongos.html)

Se llega a la misma sucesión si exigimos que unos números sean triangulares y oblongos a la vez

```
? para (i = 1, 10 ^ 8, si (es cuadrado (8 * i + 1) && es cuadrado (4 * i + 1), imprime (i)))
6
210
7140
242556
8239770
```

```
for(i=1, 10^8, if(issquare(8*i+1)&&issquare(4*i+1), print(i)))
```

En la parte inferior de la imagen se puede leer el código PARI usado.

Estas áreas están publicadas en

http://oeis.org/A029549

*A029549 a(n + 3) = 35*a(n + 2) - 35*a(n + 1) + a(n), with a(0) = 0, a(1) = 6, a(2) = 210.*

0, 6, 210, 7140, 242556, 8239770, 279909630, 9508687656, 323015470680, 10973017315470, 372759573255306, 12662852473364940, 430164224521152660, 14612920781245825506, 496409142337836914550, 16863297918705209269200

Resumimos la situación en la siguiente tabla, en la que en la última columna figuran las expresiones del área como número oblongo.

Cateto 1	Cateto 2	Área	N(N+1)
3	4	6	2*3
20	21	210	14*15
119	120	7140	84*85
696	697	242556	492*493
4059	4060	8239770	2870*2871
23660	23661	279909630	16730*16731
137903	137904	9508687656	97512*97513

Por tanto, las hipotenusas de estas ternas son números triangulares y también oblongos, es decir, son el doble de otro triangular.

Otras diferencias entre catetos

Si tomamos la terna 3, 4, 5 y multiplicamos sus lados por un mismo número, es evidente que resultará otra terna, pero no primitiva, en la que los catetos se diferenciarán en el factor de multiplicación que hayamos usado.

Así que cualquier número entero puede ser diferencia entre catetos. Además, si es diferencia en una terna, puede serlo en infinitas. La causa es que si en la generación de terna mediante los valores (u^2-v^2, $2uv$, u^2+v^2), también tendrán la misma diferencia si sustituimos u, v por 2u+v, u. En efecto, los lados serían:

Hipotenusa: $(2u+v)^2+u^2=4u^2+v^2+4uv+u^2=5u^2+v^2+4uv$

Cateto 1: $(2u+v)^2-u^2=4u^2+v^2+4uv-u^2=3u^2+v^2+4uv$

Cateto 2: $2*(2u+v)*u=4u^2+2uv$

Diferencia u^2-v^2-2uv

Es la misma diferencia que entre los dos catetos primitivos, u^2-v^2 y 2uv

Lo vemos con un ejemplo: Si u=2 y v=1, resulta la conocida 3, 4 y 5, con diferencia 1 entre catetos. Si aplicamos la transformación 2u+v, u, queda que u=2*2+1=5 v=2, Cateto 1: $5^2-2^2=21$, 2*5*2=20, y mantienen la misma diferencia 1.

Reiterando el procedimiento obtendremos infinitas ternas con la misma diferencia (salvo signo u orden). Si la primera es primitiva, todas las demás lo serán, porque si u y v son primos entre sí, también lo serán 2u+v y u.

Ejemplo:

De los valores u=4, v=3, x=7, y=24, z=25, con diferencia entre catetos igual a 17, podemos engendrar u=11, v=4, x=88, y=105, z=137, con 105-88 = 17 y después u=26, v=11, x=572, y=555 z=797, y así tantas como queramos.

Valores de las diferencias

Si sólo admitimos ternas primitivas, no todos los números pueden ser diferencia de catetos. Los únicos posibles son 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, 119, ...

La razón es que las diferencias han de tener factores primos del tipo 8k+1 o bien 8k-1 (Ver http://oeis.org/A058529)

Otras relaciones entre hipotenusa y cateto

En las últimas cifras

Existen muchas hipotenusas que coinciden con catetos en las dos últimas cifras. Para que el estudio no tenga casos triviales, eliminamos los que terminan en dos ceros. Un ejemplo sería la terna (260, 288, 388), en la que dos lados terminan en 88. No es difícil encontrar hipotenusas de este tipo. Podemos probar esta función para Excel, en la que **n** es el número a estudiar y **c** el número de cifras en las que coincide con un cateto:

Function hip_mod_cat(n, c)
Dim i, m, p, r
Dim s$

s = "" ‘En esta cadena se volvará la terna pitagórica
m = 10 ^ c ‘Esta variable contendrá 10^c, 10, 100, 1000…
r = n Mod m ‘Encuentra las últimas cifras
If r = 0 Then hip_mod_cat = "NO": Exit Function ‘Desechamos potencias de 10

For i = r To n - m Step m

'If n - i Mod m = 0 Then ‘Tienen cifras iguales

If escuad(n ^ 2 - i ^ 2) Then p = Sqr(n ^ 2 - i ^ 2): s = s + Str$(p) + ", " + Str$(i) + ", " + Str$(n) ‘Si es un cateto, creamos la terna en modo texto

'End If

Next i

If s = "" Then s = "NO"

hip_mod_cat = s

End Function

Con esta función se puede crear un bucle de búsqueda y obtenemos estas ternas:

120, 22, 122	
140, 48, 148	
160, 78, 178	
180, 112, 212	
220, 21, 221	
240, 44, 244	
200, 150, 250	
260, 69, 269	
220, 192, 292	
280, 96, 296	
300, 125, 325	
240, 238, 338	
320, 156, 356	
360, 66, 366	
260, 288, 388	
340, 189, 389	
360, 224, 424	
440, 42, 442	280, 342, 442
420, 144, 444	
380, 261, 461	
480, 88, 488	
480, 234, 534	
520, 138, 538	
420, 341, 541	
320, 462, 562	

Observamos que algunas hipotenusas presentan dos soluciones. Podíamos estudiar este caso, pero no merece la pena, para una simple curiosidad.

Como el proceso de búsqueda es rápido y aparecen pronto muchas soluciones, no abandonaremos la hoja de cálculo para buscar otros instrumentos.

El tercer cateto será siempre múltiplo de 10, ya que es la raíz cuadrada de una diferencia de cuadrados con las cifras últimas coincidentes.

Como curiosidad, estas son las soluciones para tres cifras, por si deseas reproducirlas. El comportamiento del otro cateto te dará una pista para entender el proceso.

1100, 105, 1105
1200, 220, 1220
1300, 345, 1345
1400, 480, 1480
1500, 625, 1625
1600, 780, 1780
1700, 945, 1945
1800, 1120, 2120
2200, 210, 2210
1900, 1305, 2305
2400, 440, 2440
2000, 1500, 2500
2600, 690, 2690
2100, 1705, 2705
2200, 1920, 2920
2800, 960, 2960
2300, 2145, 3145
3000, 1250, 3250
3300, 315, 3315
2400, 2380, 3380
3200, 1560, 3560
2500, 2625, 3625
3600, 660, 3660
2600, 2880, 3880

Así que es condición necesaria que el tercer cateto termine en ceros.

Hipotenusa y cateto anagramáticos

Finalizamos esta exploración con un ejemplo más de relación entre hipotenusa y cateto. Con él y todo lo anterior como base, se pueden intentar otras búsquedas, que ya no entran aquí. Lo dejamos como propuesta.

Dos números son anagramáticos si poseen las mismas cifras y con la misma frecuencia. Para estudiarlos usaremos nuestra función *digiordenado*, que ordena las cifras de un número entero. La puedes consultar en esta entrada del blog:

https://hojaynumeros.blogspot.com/2017/05/sumas-anagramaticas.html

Con esta función es fácil saber si dos números son anagramáticos, pues entonces *digiordenado* dará el mismo resultado en ambos. Con esta idea, hemos construido una dunción similar a las anteriores. Es esta:

```
Function hip_anam_cat(n)
Dim i, p, r
Dim s$

s = ""
For i = 1 To n - 1
```

```
If digiordenado(n) = digiordenado(i) And escuad(n ^
2 - i ^ 2) Then
p = Sqr(n ^ 2 - i ^ 2): s = s + Str$(p) + ", " + Str$(i) +
", " + Str$(n)
End If
Next i
If s = "" Then s = "NO"
hip_anam_cat = s
End Function
```

No necesita explicación. Con ella hemos encontrado estos ejemplos:

33, 56, 65	
72, 135, 153	
144, 108, 180	
120, 182, 218	
204, 253, 325	
180, 273, 327	
324, 135, 351	
240, 364, 436	
300, 455, 545	
252, 561, 615	
555, 296, 629	
408, 506, 650	330, 560, 650
360, 546, 654	
648, 270, 702	
228, 704, 740	
420, 637, 763	
360, 675, 765	117, 756, 765
207, 780, 807	
480, 728, 872	
888, 259, 925	
612, 759, 975	
540, 819, 981	

La tercera columna es la de hipotenusas, que son anagramáticas con el segundo cateto. Se observan soluciones dobles en 650 y 765.

El primer cateto siempre será múltiplo de 3, pues si los otros dos lados tienen las mismas cifras, la diferencia de sus cuadrados será múltiplo de 9 y, por tanto, su cuadrado lo será, luego el cateto será múltiplo de 3.

Como curiosidad, esta sería la versión para el lenguaje PARI:

is(n)={my(k=1,v=0);while(k<=n-1&&v==0,if(issquare(n*n-k*k)&&vecsort(digits(k))==vecsort(digits(n)),v=1);k+=1);v}

for(i=1,10000,if(is(i),print1(i,", ")))

Aquí, *digiordenado* se sustituye por *vecsort(digits(k))*

Devuelve las hipotenusas:

65, 153, 180, 218, 325, 327, 351, 436, 545, 615, 629, 650, 654, 702, 740, 763, 765, 807, 872, 925, 975, 981, 1325, 1453, 1480, 1530, 1625, 1635, 1640, 1800, 1865, 1872, 1940, 2132, 2180, 2601, 2725…

Con estos ejemplos ya podemos emprender otras búsquedas similares.

REGRESOS 7 – OTROS AUTOMÓRFICOS

En el año 2009 publiqué un pequeño reto sobre cuadrados automórficos

https://hojaynumeros.blogspot.com/2009/05/numeros-automorficos.html

Los números de la primera columna de la siguiente tabla

*son **automórficos.***

1	1
5	25
6	36
25	625
76	5776
376	141376
625	390625
9376	87909376
90625	8212890625
109376	11963109376

Si los estudias adivinarás pronto qué propiedad tienen para recibir este nombre.

¿Cómo podríamos encontrarlos con una hoja de cálculo? Para construir la tabla que se incluye se han usado macros, pero se puede prescindir de ellas. Puedes crear una tabla de números consecutivos y después aplicarles una condición.

Esta tabla es complementaria de la anterior. ¿Qué relación tiene con ella?

1	0	0
5	4	20
6	5	30
25	24	600
76	75	5700
376	375	141000
625	624	390000
9376	9375	87900000
90625	90624	8212800000
109376	109375	11963000000

La pista que daba la segunda tabla era que $a^2-a = a(a-1) = N*10$

Años más tarde, en 2013, se estudiaron los primos automórficos, que poseen como últimas cifras su número de orden como primo.

https://hojaynumeros.blogspot.com/2013/11/primo-que-tienes-que-ver-con-tu-numero.html

Ahora nos dedicaremos, fundamentalmente, a los números poligonales que sean automórficos. Como los cuadrados son poligonales, incluiremos lo que aparezca de nuevo respecto a la entrada de 2009.

Estos números poseen una fórmula general, y la usaremos en las búsquedas, y si se requiere un estudio algebraico, la simplificaremos para cada caso en particular.

Función de búsqueda

Los poligonales los tenemos muy estudiados en este blog y están contenidos en nuestra publicación

http://www.hojamat.es/publicaciones/poligonales.pdf

Las fórmulas para su formación las puedes estudiar en ella. Aquí las usaremos en su versión para hojas de cálculo:

Function poligonal(n, k)
poligonal = n * (n * (k - 2) - (k - 4)) / 2
End Function

En ella **n** es el orden o longitud del "lado" y **k** el tipo, o número de lados.

Una vez contemos con esta función podremos buscar los casos automórficos. La plasmamos así:

Function autopolig(n, k) 'Devuelve el poligonal dado su índice si es automórfico
Dim b, l, u
Dim s$, t$

b = poligonal(n, k) ‘Busca el poligonal
t = ajusta(b) ‘Se convierten los datos a String
s = ajusta(n)
l = Len(s$) ‘Ahora se ve si coinciden las cifras
If s = Right(t, l) Then u = Val(t) else u=0
autopolig = u
End Function

Con esta función podemos buscar poligonales automórficos, a los que llamaremos *polimórficos*. Con esto se podría dar por terminada la cuestión, porque nos da fácilmente todas las soluciones, pero deseamos estudiar también cada caso por separado. Aquí tenemos algunos listados:

Triangulares: 1, 15, 325, 195625, 43959376, 4106490625,… http://oeis.org/A219253

Cuadrados: , 1, 25, 36, 625, 5776, 141376, 390625, 87909376, 8212890625,… http://oeis.org/A035383

Pentagonales: 1, 35, 925, 585625, 131859376, 12319290625

Estudiaremos ahora cada tipo en particular para casos interesantes.

Triangulares

En el caso de los triangulares el automorfismo se puede expresar con su fórmula clásica N(N+1)/2:

$N(N+1)/2 = N$ módulo 10^m siendo m el número de cifras de N

Lo podemos expresar de forma más sencilla:

$N(N+1)-2N=N^2+N-2N=N^2-N=N(N-1) = 0$ (mod 10^m

Por ejemplo, 325 es automórfico, porque su número de orden es 25, y se cumple que 25(25-1)=25*24=600, que es múltiplo de 10^2, siendo 2 el número de cifras de 25

Tenemos listado de estos números: 1, 15, 325, 195625, 43959376, 4106490625, 396606890625, 25271617109376, 83084112890625, 22661209212890625, 1596879961787109376, 33445656300081787109376, 1795096118003159918212890625

… http://oeis.org/A219253

Vemos que el problema se vuelve algo intratable. Con la propiedad anterior se puede abordar con hoja de cálculo sin gran coste de tiempo. Usamos la función siguiente, similar a la general, en la que hemos integrado la condición modular:

```
Function trimorfico(n)
Dim a, b, u, l
Dim s$, t$

a = numcifras(n)
If n * (n - 1) Mod 10 ^ a = 0 Then
b = n * (n + 1) / 2
t = ajusta(b)
s = ajusta(n)
l = Len(s$)
If s = Right(t, l) Then u = Val(t) Else u = 0
End If
trimorfico = u
End Function
```

Con algunos segundos de tiempo se consiguen varios términos:

N	Triangular(N)
1	1
5	15
25	325
625	195625
9376	43959376

Esto anima a intentar el mismo proceso con PARI. El código es algo complejo:

```
issub(vv, v) = {for (i=1, #v - #vv + 1, if (vector(#vv, k, v[k+i-1]) == vv, return(1)); ); }

substring(ss,s)={my(vv=Vec(ss),v=Vec(s));return(issub(vv,v))}

trimorf(n)={my(a,b,u=0,l,s="",t="");a=#Str(n);if(n*(n-1)%10^a==0,b=n*(n+1)/2;t=Str(b);s=Str(n);u=substring(s,t));if(u>0,return(b))}

for (i=1,10^7,m=trimorf(i);if(m>0,print(m)))
```

Con él se llega más lejos que con hoja de cálculo:

```
1
15
325
195625
43959376
4106490625
396606890625
25271617109376
```

Este ejemplo ilustra la conveniencia de una condición previa para acelerar la velocidad de un algoritmo.

Cuadrados

Con este ejemplo comenzamos el tema en el año 2009. Lo completamos ahora.

Podemos usar la función *autopolig* con la fórmula n^2, pero merece la pena buscar una condición como procedimos con los triangulares:

N^2 = N módulo 10^m siendo m el número de cifras de N

N^2-N=N(N-1) = 0(mod 10^m

Resulta la misma condición que para los triangulares. En realidad, es similar a la condición de exigir que N termine en una de las cifras 1, 5 o 6, que son las únicas terminaciones que coinciden con sus cuadrados.

Si cambiamos n*(n-1)/2 por n^2 en la función anterior nos resultan bien las soluciones para cuadrados:

N	N^2
1	1
5	25
6	36
25	625
76	5776
376	141376
625	390625
9376	87909376

Los valores de N coinciden con los primeros de los publicados en http://oeis.org/A003226: 1, 5, 6, 25, 76, 376, 625, 9376, 90625, 109376, 890625, 2890625, 7109376, 12890625, 87109376, 212890625, 787109376, 1787109376, 8212890625, 18212890625, 81787109376, 918212890625, 9918212890625, 40081787109376, 59918212890625, 259918212890625, 740081787109376

Los valores de N^2 los podemos lograr con la misma sustitución en el código PARI:

```
1
25
36
625
5776
141376
390625
87909376
8212890625
11963109376
793212890625
8355712890625
50543227109376
```

Otros poligonales

Antes de pasar a algunos casos particulares, es fácil plantear que la condición en la que coinciden triangulares y cuadrados es válida para otros poligonales:

N^2-N=N(N-1) = 0(mod 10^m

Es sencilla su justificación, basada en la fórmula general del poligonal de lado n y número de lados k:

P(n,k)=n(n(k-2)-(k-4))/2

Con ella se justifica fácilmente:

N(N*(k-2)-(k-4)/2=N mod 10^m

(k-2)N^2-(k-4)N=2N mod 10^m

(k-2)(N^2-N)=0 mod 10^m

Si k-2 es primo con 100 (sin factores 2 y 5) vale el criterio para todos esos poligonales, y en ellos se simplifica la búsqueda con seguridad, aunque aparecerán otros casos.

Pentagonales

La fórmula de los números pentagonales (además de la general para poligonales usada en *autopolig*) es $(3n^2-n)/2$. Podemos aplicarle el filtro del módulo, porque k-2=5-2=3 en este caso, primo con 10. El resultado, tanto con ese filtro como sin él, es el mismo:

1, 35, 925, 585625, 131859376, 12319290625,…

1	1
5	35
25	925
625	585625
9376	131859376

Con la adaptación a PARI se llega más lejos en la segunda columna:

1
35
925
585625
131859376
12319290625
1189818890625
75814837109376

Los valores de la primera columna cinciden con los de los triangulares, por ser 5-2 primo con 10.

Hexagonales

En estos aparecen más casos, porque k-2=6-2=4 no es primo con 10. Por esa abundancia, el algoritmo *autopolig* funciona con más rapidez:

N	HEX(N)
1	1
5	45
6	66
25	1225
26	1326
50	4950
51	5151
75	11175
76	11476
125	31125
376	282376
500	499500
501	501501
625	780625
876	1533876
4376	38294376

Los valores de N están publicados en http://oeis.org/A039594 y los de HEX(N) en http://oeis.org/A038494

Soluciones universales

En la equivalencia que hemos usado como filtro para los poligonales, $(k-2)(N^2-N)=0 \mod 10^m$, los elementos que cumplan $(N^2-N)=0 \mod 10^m$ figurarán en todos ellos como automórficos, porque no les afecta el valor de (k-2). Son soluciones universales, que figuran en todos los casos que hemos estudiado hasta ahora. Coinciden con los valores de N en los triangulares, y son

1, 5, 25, 625, 9376, 90625, 890625, 7109376,…

Si recorres con *autopolig* los distintos tipos de poligonales, verás que estos valores pertenecerán a todos ellos. Por ejemplo, creamos la sucesión para decágonos (k=10):

1, **5**, 6, **25**, 26, 50, 51, 75, 76, 125, 126, 250, 251, 375, 376, 500, 501, **625**, 626, 750, 751, 875, 876, 1876, 2500, 2501, 3125, 4376, 5000, 5001, 5625, 6876, 7500, 7501, 8125, **9376**, 15625, 25000, 25001, 34376, 40625, 50000, 50001, 59376, 65625, 75000, 75001, 84376, **90625**, 109376, 140625, 250000, 250001, 359376, 390625, 500000, 500001, 609376, 640625, 750000, 750001, 859376, **890625**, 2109376, 2500000, 2500001, 2890625, 4609376, 5000000, 5000001, 5390625, **7109376**, 7500000, 7500001, 7890625, 9609376,…

Figuran en negrita los ***valores universales***, que pertenecen a todas las sucesiones dependientes de poligonales. Es un interesante resultado. Por ejemplo, en esta tabla figuran el número de lados k y los poligonales correspondientes al 9376:

K	Poligonal(9376,K)
3	43959376
4	87909376
5	131859376
6	175809376
7	219759376
8	263709376
9	307659376
10	351609376
11	395559376
12	439509376
13	483459376
14	527409376
15	571359376
16	615309376
17	659259376
18	703209376
19	747159376
20	791109376

Todos terminan en las cifras 9376.

NÚMEROS CON DIVISORES CONSECUTIVOS

Todos los números pares poseen al menos un par de divisores consecutivos, el (1, 2). Los múltiplos de 6 poseen también el (2, 3). Los factoriales poseen muchos, debido a su definición. Por ejemplo, 5!=120 posee los pares (1,2) (2,3) (3,4), (4,5) y (5,6). En el extremo opuesto están los impares, y entre ellos los primos mayores que 2, en los que no existe ningún par de divisores consecutivos, como es claro.

Otros números poseen pares inesperados. Por ejemplo 936 posee el par (12, 13), que no se esperaría sin conocer su descomposición factorial. Es elemental construir un número con los pares de consecutivos que nosotros deseemos, por ejemplo 5*6*17*18. Basta multiplicar según sea nuestro objetivo.

No es difícil, ante un número propuesto cualquiera, como el 17432, averiguar si posee divisores consecutivos. En primer lugar, solo trabajaríamos con números pares, pues los impares no presentan esta situación, ya que n(n+1) es siempre par.

Otra forma de presentar el problema es la búsqueda de divisores oblongos, ya que al tener la descomposición

N(N+1) nos garantizan la existencia de un par de divisores consecutivos.

Con toda esta introducción y alguna búsqueda previa, queda claro que los casos de uno o de dos pares no tienen mucho interés, ya que cada tres números pares consecutivos aparecerá un múltiplo de 6.

Búsqueda del número de pares

La experiencia de años nos indica que en las búsquedas es conveniente comenzar con ideas muy simples, para después complicar si se ve necesario.

En este caso el esquema de búsqueda sería:

- Llamamos N al número y M al número de pares encontrado.
- Averiguamos si es par. Si no lo es le asignamos una salida M=0
- Si es par, recorremos los números menores que él desde el 1 hasta N/2-1, que sería el mayor divisor a considerar (pues N/2 siempre sería divisor). Iniciamos M=0. Añadimos un caso especial para N=2.
- Por cada par que aparezca, incrementamos M en una unidad, y al final esa sería la salida del algoritmo.

En Excel se podría definir esta función:

```
Public Function paresdivcons(n)
Dim m, d
If n / 2 <> n \ 2 Then paresdivcons = 0: Exit Function 'No es par
If n = 2 Then paresdivcons = 1:exit function ‘Caso del 2
m = 0 'Contador de pares
For d = 1 To n / 2 - 1
If n / d = n \ d And n / (d + 1) = n \ (d + 1) Then m = m + 1 'Hay un par
Next d
paresdivcons = m
End Function
```

Hemos usado el criterio **n/d=n\d**, que es sencillo, para averiguar si **n** es múltiplo de **d** (se iguala la división con decimales con la división entera). Podíamos haber usado también **n mod d =0**.

Así el número que se eligió como ejemplo más arriba, el 17432, tendría un solo par de divisores consecutivos, porque **paresdivcons(17432)=1**. Será entonces, necesariamente, el par (1,2), como puedes comprobar en el listado de divisores:

17432 8716 4358 2179 8 4 2 1

Casos particulares

Vimos más arriba que los números impares no pueden tener pares de divisores consecutivos. En ellos M=0

Los semiprimos pares, salvo el 6, presentarán un solo par, el (1,2) porque si N=2P con P primo, sus únicos divisores serían 1, 2, P y 2P, por lo que solo contaríamos con dos pares si P=3.

Estos dos casos, junto al de los factoriales, nos da la idea de establecer una medida de la abundancia de pares de consecutivos que posee un número. Para mejor comparar unos con otros, podíamos medir esta cuestión con el cociente M/D, siendo D el número total de divisores. Así, M/D siempre estaría entre 0 y 1, lo que facilitaría las gráficas y las comparaciones. Le vamos a llamar ADP (abundancia de pares).

El conteo de los divisores de un número está muy estudiado. Es la función TAU o DIVISOR, que puedes consultar en nuestra publicación "Funciones multiplicativas",

http://www.hojamat.es/publicaciones/multifun.pdf

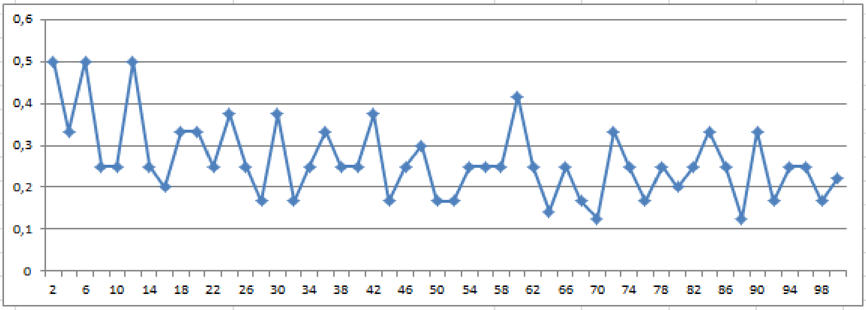
En esta tabla puedes observar los valores de ADP en los primeros números pares:

N	M	TAU	APD	FACTORES	DIVISORES
2	1	2	0,5	[2,1]	2 1
4	1	3	0,333333333	[2,2]	4 2 1
6	2	4	0,5	[2,1][3,1]	6 3 2 1
8	1	4	0,25	[2,3]	8 4 2 1
10	1	4	0,25	[2,1][5,1]	10 5 2 1
12	3	6	0,5	[2,2][3,1]	12 6 4 3 2 1
14	1	4	0,25	[2,1][7,1]	14 7 2 1
16	1	5	0,2	[2,4]	16 8 4 2 1
18	2	6	0,333333333	[2,1][3,2]	18 9 6 3 2 1
20	2	6	0,333333333	[2,2][5,1]	20 10 5 4 2 1
22	1	4	0,25	[2,1][11,1]	22 11 2 1
24	3	8	0,375	[2,3][3,1]	24 12 8 6 4 3 2 1
26	1	4	0,25	[2,1][13,1]	26 13 2 1
28	1	6	0,166666667	[2,2][7,1]	28 14 7 4 2 1
30	3	8	0,375	[2,1][3,1][5,1]	30 15 10 6 5 3 2 1
32	1	6	0,166666667	[2,5]	32 16 8 4 2 1
34	1	4	0,25	[2,1][17,1]	34 17 2 1
36	3	9	0,333333333	[2,2][3,2]	36 18 12 9 6 4 3 2 1
38	1	4	0,25	[2,1][19,1]	38 19 2 1
40	2	8	0,25	[2,3][5,1]	40 20 10 8 5 4 2 1
42	3	8	0,375	[2,1][3,1][7,1]	42 21 14 7 6 3 2 1

La primera columna contiene el valor del número N, y después le siguen M, número de pares, TAU, como contador de divisores, y a continuación su cociente, APD, que hemos tomado como medida estándar. Las dos últimas columnas contienen respectivamente, los factores primos y la lista de divisores, para comprobar. El segundo número que figura entre corchetes en la columna de factores es su exponente. Por ejemplo, para 12 es [2,2][3,1].

En este listado comprobamos que los que menos abundancia tienen son los semiprimos mayores que 6, con APD=0,25, y unos que habíamos olvidado, como son las potencias de 2. Observamos que 8, 16 y 32 solo preesentan el par (1,2).

Si construimos una gráfica, deberemos esperar algún tipo de periodicidad:



Se observan máximos relativos en 2, 6 y 12 y mínimos en 70 y 88 y periodos parciales de 6 unidades.

Caso general

Con lo que hemos observado hasta ahora podemos resumir la situación para números en general:

Todo número N se puede descomponer de la forma $N=2^k*p_1*p_2*p_3\ldots$, donde p_1, p_2 p_3, son primos impares , repetidos o no.

Si $N=2^k$, sin primos acompañantes, ya sabemos que solo puede presentar el par (1,2)

Por el contrario, si $N=p_1*p_2*p_3\ldots$todos los divisores son impares, y es imposible que contengan ningún par de divisores consecutivos.

Por último, si N contiene potencias de 2 y también algún primo, deberemos distinguir

Si la potencia de 2 tiene exponente 1, y solo existe un primo mayor que 3, por ejemplo en 2*7=14, como semiprimo de este tipo presentará el par (1,2).

Si la potencia de 2 es mayor, pueden surgir pares por pura coincidencia, como en $N=2^3*7=56$, en el que aparece el par (7,8).

Si existe abundancia de factores primos, es de esperar que surjan más pares, pero esta es una idea empírica. Sobre ella construiremos algunas frecuencias sin valor probatorio.

Frecuencias

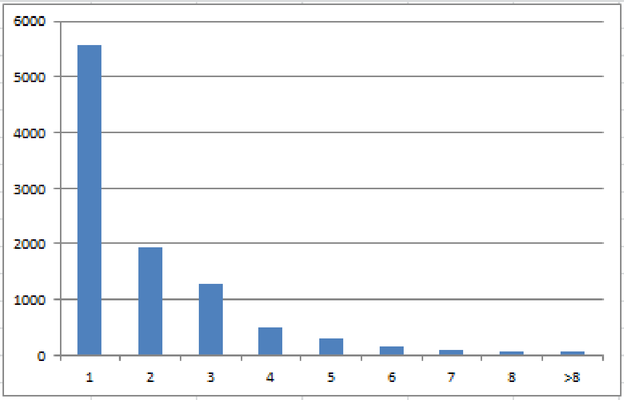
Para tener un término de comparación, recorreremos todos los números pares desde 2 hasta 20000 para encontrar las frecuencias según el número de divisores. Para quienes sientan curiosidad, hemos usado esta función de Excel:

```
Function histodivcons$(n)
Dim i, a
Dim f(9)
Dim s$
For i = 0 To 9: f(i) = 0: Next i
For i = 1 To n
a = paresdivcons(i * 2)
If a < 9 Then f(a) = f(a) + 1 Else f(9) = f(9) + 1
Next i
s = ""
For i = 1 To 9: s = s + Str$(f(i)) + ", ": Next i
```

histodivcons = s
End Function

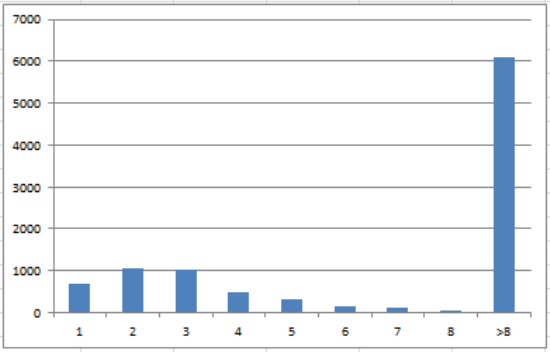
En este caso, con números sin filtrar, resultan esta tabla y este diagrama de columnas:

2N	Div
1	5563
2	1944
3	1293
4	499
5	303
6	157
7	101
8	59
>8	81
Total	10000



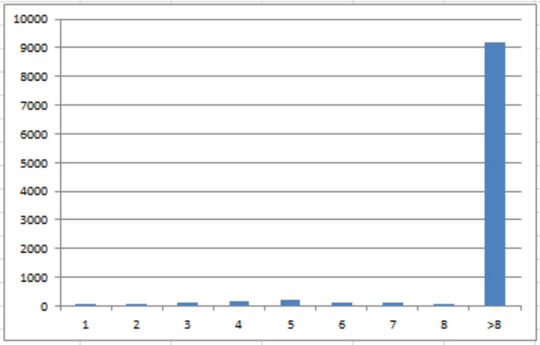
Ahora podríamos exigir que su número de divisores (función TAU) sobrepasara el número 16 (o igual a 16), que es el que presentan los números con cuatro divisores sin repetir. Resultaría entonces algo muy distinto:

2N	Div
1	690
2	1064
3	1021
4	493
5	302
6	157
7	101
8	59
>8	6113
Total	10000



Por último, si exigimos que TAU sobrepase el valor 31, queda:

2N	Div
1	2
2	25
3	110
4	177
5	191
6	136
7	98
8	57
>8	9204
Total	10000



Queda así comprobada de forma empírica la influencia del número de divisores en el de pares de consecutivos. Esto refleja la componente de azar que presentan estos.

PARES DE PRIMOS Y DIFERENCIA DE CUADRADOS

En mis cálculos diarios en Twitter (@connumeros) me encontré por casualidad con cuatro primos con diferencias de cuadrados iguales, tanto de consecutivos como si los tomamos de forma alterna. Eran estos:

23, 43, 163 y 167

Sus diferencias de cuadrados iguales son dos:

167^2-163^2=43^2-23^2

167^2-43^2=163^2-23^2

Esto es porque 23^2+167^2=28418=43^2+163^2

Es evidente que la tercera forma de crear diferencias (cuarto con primero y tercero con segundo) no nos devolvería una igualdad.

Es esta una situación que se presta a crear métodos o algoritmos para la búsqueda de nuevos conjuntos de cuatro primos. No tiene más trascendencia el tema, y si no te atraen estas técnicas, no te servirá esto de mucho.

Uso de la hoja “Cartesius”

Lo primero que me planteé ante este ejemplo es la cuestión de si existirían muchos conjuntos similares del mismo tipo. No tenía ninguna opinión previa, por lo que acudí a mi hoja “Cartesius” para ver si había algo útil entre los primeros primos. Es una herramienta lenta, por lo que solo exploré hasta el número 61. Mi gran sorpresa fue que resultaron muchos ejemplos posibles para los primeros primos.

Este fue el resultado:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
7	11	17	19		72	72	240	240
7	13	13	17		120	120	120	120
7	13	29	31		120	120	792	792
7	17	17	23		240	240	240	240
7	17	59	61		240	240	3432	3432
7	19	23	29		312	312	480	480
7	19	37	41		312	312	1320	1320
7	23	37	43		480	480	1320	1320
7	31	53	61		912	912	2760	2760
7	41	43	59		1632	1632	1800	1800
11	17	19	23		168	168	240	240
11	17	41	43		168	168	1560	1560
11	19	59	61		240	240	3360	3360
11	23	31	37		408	408	840	840
11	29	31	41		720	720	840	840
11	31	37	47		840	840	1248	1248
13	17	29	31		120	120	672	672
13	23	43	47		360	360	1680	1680
13	29	53	59		672	672	2640	2640
13	41	47	61		1512	1512	2040	2040
17	23	59	61		240	240	3192	3192
17	31	53	59		672	672	2520	2520
19	23	41	43		168	168	1320	1320
19	29	37	43		480	480	1008	1008
19	31	47	53		600	600	1848	1848
23	29	37	41		312	312	840	840
23	37	37	47		840	840	840	840
29	37	41	47		528	528	840	840

En las primeras columnas figuran los cuatro primos en orden creciente y en las siguientes los dos tipos de diferencias que resultan ser iguales. Todas son divisibles entre 4, por ser un producto de suma por diferencia entre impares.

Código

Lo que sigue es un poco específico, propio del lenguaje de “Cartesius”, pero creo que merece la pena explicarlo. Estas son las condiciones impuestas a “Cartesius”:

xtotal=4

xt=1..65

xt=filtro(primo)

es (x2^2-x1^2)=(x4^2-x3^2)

es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<x4)>0

Las tres primeras se entienden bien: combinaremos cuatro números (***xtotal=4***) desde 1 hasta 65 (***xt=1..65***) y exigiremos que sean primos (***xt=filtro(primo)***). Con estas condiciones se preparan automáticamente los primos que se van a combinar, según vemos en esta imagen:

	X1	X2	X3	X4
1	2	2	2	2
2	3	3	3	3
3	5	5	5	5
4	7	7	7	7
5	11	11	11	11
6	13	13	13	13
7	17	17	17	17
8	19	19	19	19
9	23	23	23	23
10	29	29	29	29
11	31	31	31	31
12	37	37	37	37
13	41	41	41	41
14	43	43	43	43
15	47	47	47	47
16	53	53	53	53
17	59	59	59	59
18	61	61	61	61
19				

En total, dieciocho primos, que combinaremos de todas las formas posibles (por eso la herramienta es lenta).

La tercera condición exige la igualdad entre diferencias de cuadrados:

es (x2^2-x1^2)=(x4^2-x3^2)

Exige que sean iguales las diferencias entre consecutivos, lo que garantiza que también sean iguales las diferencias alternadas. La palabra ***“es”*** significa que se exige que sea verdadera la expresión que le siga.

es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<x4)>0

Esta última condición elimina casos repetidos. Exige que X3 sea menor que X4, X1 menor que X2 y X2 menor o igual que X3.En “Cartesius”, como en otros lenguajes, el producto funciona como la conectiva lógica Y y la suma como la O.

Con este proceso ya tenía la idea de que estos casos abundarían en cualquier rango de números, y, por su naturaleza, que serían infinitos (conjetura). Se observan varios números en la cuarta columna que son cabecera de varios conjuntos, como el 61, que pertenece a varias soluciones.

Otra observación en la tabla es la de que están un poco mezclados los primos de tipo 4K+1 y con los de 4K+3.

Algoritmo en forma de función

Ya que este blog va de números y hoja de cálculo, parece conveniente acudir a esta herramienta general para completar y comprobar lo conseguido con Cartesius. La estructura de la función que presentaremos requiere el uso de cuatro bucles distintos, uno por cada primo al cuadrado, y en este caso serán del tipo WHILE_WEND, pero es fácil comprobar que no ralentizan mucho el proceso.

La función, tipo String o texto, actuará sobre un primo cualquiera (si no es primo, sale del código con la palabra “NO”) y devolverá todos los conjuntos de cuatro primos cuyo primer elementoo es ese número primo. Así se consigue una búsqueda sistemática si se desea.

Usaremos nuestra función PRIMANT, que devuelve el primo anterior a un número, porque la búsqueda de primos será descendente.

Este es el código de la función:

Function dos_dif_cubos(n)
Dim i, j, k, d, d1
Dim s$

If Not esprimo(n) Then dos_dif_cubos = "NO": Exit Function
s = ""
k = n
While k > 2 ‘Segundo primo, porque **n** es el primero
d = n ^ 2 - k ^ 2 ‘Primera diferencia de cuadrados

```
j = k
While j > 2 'Tercer primo
i = j
While i > 2 'Cuarto primo
d1 = j ^ 2 - i ^ 2 'Segunda diferencia
If d1 = d And d <> 0 And d1 <> 0 Then s = s + Str$(n) + ", " + Str$(k) + ", " + Str$(j) + ", " + Str$(i) + " # " 'Se da la igualdad buscada

i = primant(i) 'Desciende i
Wend
j = primant(j) 'Desciende j
Wend
k = primant(k) 'Desciende k
Wend
if s="" then s="NO"
dos_dif_cubos = s
End Function
```

Devuelve una cadena con todos los conjuntos de cuatro primos que presentan diferencias iguales dos a dos, y cuyo sumando mayor es $\mathbf{n^2}$.

Por ejemplo, para el primo 23 obtendríamos:

23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #

Con ellos podríamos construir estas igualdades entre diferencias de cuadrados:

23^2-19^2=17^2-11^2
23^2-17^2=19^2-11^2
23^2-17^2=17^2-7^2

Con esta función podemos recorrer sistemáticamente cualquier rango de números primos (si alguno no es primo devolverá un “NO”).

Por ejemplo, esta sería la tabla de resultados para los primeros primos. Así que con esta función podemos crear un catálogo sistemático de los posibles conjuntos de cuatro primos con la propiedad buscada.

2		NO			
3		NO			
5		NO			
7		NO			
11		NO			
13		NO			
17		17, 13, 13, 7 #			
19		19, 17, 11, 7 #			
23		23, 19, 17, 11 #	23, 17, 17, 7 #		
29		29, 23, 19, 7 #			
31		31, 29, 17, 13 #	31, 29, 13, 7 #		
37		37, 31, 23, 11 #			
41		41, 37, 29, 23 #	41, 37, 19, 7 #	41, 31, 29, 11 #	
43		43, 41, 23, 19 #	43, 41, 17, 11 #	43, 37, 29, 19 #	43, 37, 23, 7 #
47		47, 43, 23, 13 #	47, 41, 37, 29 #	47, 37, 37, 23 #	47, 37, 31, 11 #
53		53, 47, 31, 19 #			

Estas cadenas de conjuntos de cuatro primos para uno dado se pueden conseguir también con ***Cartesius***.

Basta adaptar el código de más arriba a un valor concreto, por ejemplo el 61:

xtotal=3
xt=1..61
xt=filtro(primo)
es (x2^2-x1^2)=(61^2-x3^2)
es (x1<x2)*((x2<x3)+(x2=x3))*(x3<61)>0

Obtendremos una lista de cinco conjuntos de primos que se completan con el 61:

X1	X2	X3
7	17	59
7	31	53
11	19	59
13	41	47
17	23	59

Esta solución coincide con la de la función *dos_dif_cubos*:

DOS_DIF_CUBOS(61)= 61, 59, 23, 17 # 61, 59, 19, 11 # 61, 59, 17, 7 # 61, 53, 31, 7 # 61, 47, 41, 13

Con esto damos por resuelta la búsqueda. Nos queda un detalle, con el que comenzamos este estudio, y es la procedencia de estas diferencias de dos sumas de cubos con el mismo resultado.

Sumas de cubos equivalentes

Recordamos las frases de inicio de estas búsquedas:

23, 43, 163 y 167

Sus diferencias de cuadrados iguales son dos:

167^2-163^2=43^2-23^2

167^2-43^2=163^2-23^2

Esto es porque 23^2+167^2=28418=43^2+163^2

Si ahora buscáramos todos los números que equivalen al menos a dos sumas de cuadrados de primos, encontraríamos dos igualdades de diferencias del tipo buscado. Usaremos esta descomposición de un número en dos cuadrados de primos que sigue. Es una cadena de texto, y el primer carácter es el número de descomposiciones de ese tipo que presenta. Si no es posible la descomposición devolverá un “NO”.

```
Public Function sumadoscuad_prim$(n)
Dim i, r, t, w, m
Dim s$

s = "" 'Variable de respuesta
m = 0 'Contador de soluciones
r = Sqr(n) 'Tope de búsqueda
i = 2
While i < r
```

t = n - i ^ 2
w = Sqr(t)
If escuad(t) And esprimo(w) And i <= w Then m = m + 1: s = s + " # " + Str$(i) + ", " + Str$(w)
‘Si es cuadrado de un primo se incrementa **m** y se incorpora a la solución
i = primprox(i)
Wend
If s = "" Then s = "NO" Else s = ajusta(m) + " # " + s
sumadoscuad_prim = s
End Function

Con esta función se pueden unificar las dos cuestiones, enlazando diferencias y sumas, según vemos en la siguiente tabla, que elige el primo mayor y lo incorpora a una diferencia. Comprende todos los números enteros que equivalen a dos sumas de cuadrados de primos:

Suma	Soluciones	Mayor	Cuatro primos
338	2 # # 7, 17 # 13,	17	17, 13, 13, 7 #
410	2 # # 7, 19 # 11,	19	19, 17, 11, 7 #
578	2 # # 7, 23 # 17,	23	23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #
650	2 # # 11, 23 # 17,	23	23, 19, 17, 11 # 23, 17, 17, 7 #
890	2 # # 7, 29 # 19,	29	29, 23, 19, 7 #

Tomamos el primo mayor y creamos con él diferencias de cuadrados, que coinciden con los elementos de la izquierda.

SEMIPRIMOS DE LA FORMA N^2+K

Hay semiprimos que son cuadrados, como 4=2*2 o 9=3*3, pero existen muchos que no lo son, pero que se acercan a uno de ellos. Hoy buscaremos estos semiprimos, intentando, de forma simultánea buscar o descubrir algunas de sus propiedades.

Comenzaremos con unos que ya están publicados, los de tipo n^2+1, con lo que practicaremos de cara a los otros casos. Son estos:

A144255 ....
..Semiprimes of the form n^2+1.
10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901, 1157, 1226, 1522, 1765, 1937, 2026, 2117, 2305, 2402, 2501, 2602, 2705, 3365, 3482, 3601, 3722, 3845, 4097, 4226, 4762, 5042, 5777, 6085, 6242, 6401, 7226, 7397, 7745, 8465, 9026, 9217

(http://oeis.org/A144255)

Al no tener ninguna prisa en la búsqueda, practicaremos varias técnicas.

Buscador de Naturales

En estas semanas estamos ampliando las prestaciones de nuestro Buscador, que tiene décadas de vida y le viene bien un repaso. Es descargable desde http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador

Para encontrar el listado anterior basta con exigir que el número sea semiprimo y que su anterior sea cuadrado. Lo logramos así:

SEMIPRIMO
ES CUADRADO(N-1)
EVALUAR FACTORES

La exigencia de ser semiprimo es directa, por lo que solo escribimos SEMIPRIMO, pero la otra se refiere a N-1, y eso supone usar la partícula ES. La tercera condición produce la descomposición factorial de los números encontrados, que es claramente propia de un semiprimo:

Solución	Detalles
10	2 5
26	2 13
65	5 13
82	2 41
122	2 61
145	5 29
226	2 113
362	2 181
485	5 97
626	2 313
785	5 157

Obtenemos los primeros términos copiados más arriba.

Con una función de Excel

En este blog usamos a menudo la función ESCUAD para averiguar si un número es cuadrado y ESSEMIPRIMO para detectar los semiprimos. Basta unirlos convenientemente con la partícula AND:

ESSEMIPRIMO(N) AND ESCUAD(N-1)

Con este criterio y un bucle de búsqueda logramos un resultado similar al anterior:

N	FACTORES N-1	FACTORES N
10	[3,2]	[2,1][5,1]
26	[5,2]	[2,1][13,1]
65	[2,6]	[5,1][13,1]
82	[3,4]	[2,1][41,1]
122	[11,2]	[2,1][61,1]
145	[2,4][3,2]	[5,1][29,1]
226	[3,2][5,2]	[2,1][113,1]
362	[19,2]	[2,1][181,1]
485	[2,2][11,2]	[5,1][97,1]
626	[5,4]	[2,1][313,1]
785	[2,4][7,2]	[5,1][157,1]
842	[29,2]	[2,1][421,1]
901	[2,2][3,2][5,2]	[17,1][53,1]

En la tabla comprobamos que N-1 es cuadrado y N es semiprimo.

Con el lenguaje PARI

Podemos usar esta función, a la que hemos añadido un bucle de búsqueda:

es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}
for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))

Escrita en la web de PARI (https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html) produce el mismo resultado:

```
? es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}
for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))
10, 26, 65, 82, 122, 145, 226, 362, 485, 626, 785, 842, 901,
```

```
es(i)={bigomega(i)==2&&issquare(i-1)}
for(i=2,1000,if(es(i),print1(i,", ")))
```

A partir de ahora acudiremos a estas tres herramientas, pero dando menos detalles.

Propiedades de estos números

Iwaniec probó que existen infinitos números de este tipo.

Es claro que n^2+1 no puede ser cuadrado, luego sus factores serán distintos, y el más pequeño será menor

que n. A esos factores se les pueden aplicar algunas ideas contenidas en
http://hojaynumeros.blogspot.com/2022/10/regresos-5-un-cuadrado-y-una-unidad-1.html

En efecto, al ser n^2+1 suma de dos cuadrados, sus factores serán el 2 o del tipo 4k+1.

Un cálculo ilustrativo es el de la media geométrica de los dos factores, que, evidentemente, se situará cercana al valor de n. Esta media será la raíz cuadrada del número. Su discrepancia con la media aritmética medirá el nivel de desigualdad entre los dos factores del número semiprimo:

Media aritmética	Media geométrica	D
3,5	3,16227766	0,3377
7,5	5,099019514	2,401
9	8,062257748	0,9377
21,5	9,055385138	12,445
31,5	11,04536102	20,455
17	12,04159458	4,9584
57,5	15,03329638	42,467
91,5	19,02629759	72,474
51	22,02271555	28,977
157,5	25,01999201	132,48
81	28,01785145	52,982
211,5	29,01723626	182,48
35	30,01666204	4,9833

De la misma forma, podemos encontrar semiprimos del tipo n^2+2

6	2	[2,1][3,1]
38	6	[2,1][19,1]
51	7	[3,1][17,1]
123	11	[3,1][41,1]
146	12	[2,1][73,1]
291	17	[3,1][97,1]
326	18	[2,1][163,1]
731	27	[17,1][43,1]
843	29	[3,1][281,1]
1227	35	[3,1][409,1]
1371	37	[3,1][457,1]
1766	42	[2,1][883,1]
1851	43	[3,1][617,1]

En este caso los factores no han de ser necesariamente 2 o del tipo 4k+1. Basta comprobarlo en la tabla anterior.

Como curiosidad, estos son los del tipo n^2+3:

4	1	[2,2]
39	6	[3,1][13,1]
259	16	[7,1][37,1]
327	18	[3,1][109,1]
403	20	[13,1][31,1]
579	24	[3,1][193,1]
679	26	[7,1][97,1]
1027	32	[13,1][79,1]
1159	34	[19,1][61,1]
1299	36	[3,1][433,1]
1603	40	[7,1][229,1]
1939	44	[7,1][277,1]

K=-1

Un caso interesante es el de K=-1, es decir, semiprimos del tipo n^2-1. En ellos el semiprimo tendrá como factores (n+1)(n-1), o lo que es lo mismo, será producto de dos primos gemelos. Lo puedes comprobar en la siguiente tabla, en la que en la primera columna figuran los semiprimos, en la segunda las raíces de los cuadrados y en la siguiente los primos gemelos con exponente 1:

15	4	[3,1][5,1]
35	6	[5,1][7,1]
143	12	[11,1][13,1]
323	18	[17,1][19,1]
899	30	[29,1][31,1]
1763	42	[41,1][43,1]
3599	60	[59,1][61,1]
5183	72	[71,1][73,1]

Con esta propiedad figuran estos semiprimos como producto de primos gemelos: en OEIS:

A037074 ....
... Numbers that are the product of a pair of twin primes.
15, 35, 143, 323, 899, 1763, 3599, 5183, 10403, 11663, 19043, 22499, 32399, 36863, 39203, 51983, 57599, 72899, 79523, 97343, 121103, 176399, 186623, 213443, 272483, 324899, 359999, 381923, 412163, 435599, 656099, 675683, 685583

http://oeis.org/A037074

Encontrarlos con nuestras herramientas es fácil:

Buscador de naturales:

Solución	Detalles
15	3 5
35	5 7
143	11 13
323	17 19
899	29 31
1763	41 43

Hasta el número

Con estas propiedades

SEMIPRIMO
ES CUADRADO(N+1)
EVALUAR FACTORES

No necesita explicación, pues similar al caso anterior. Se distinguen bien los pares de primos gemelos.

Con Excel

Cambiamos la condición a

ESSEMIPRIMO(N) AND ESCUAD(N+1)

En la tabla hemos destacado que la raíz de N+1 es la media aritmética de los dos primos gemelos:

N	Primos gemelos	Raiz
15	[3,1][5,1]	4
35	[5,1][7,1]	6
143	[11,1][13,1]	12
323	[17,1][19,1]	18
899	[29,1][31,1]	30
1763	[41,1][43,1]	42
3599	[59,1][61,1]	60
5183	[71,1][73,1]	72

Estas propiedades nos garantizan que el conjunto de estos semiprimos es infinito, Como el par de primos gemelos es siempre del tipo (6k-1, 6k+1), salvo el par (3, 5), los números encontrados tendrán la fórmula $(6k)^2-1=36k^2-1$ con lo que n+1 será múltiplo de 36, como es fácil observar en la tabla, que en su tercera columna solo contiene múltiplos de 6, salvo el primero.

Si expresamos el número $36k^2-1$ como $9(2k)^2-1$ descubriremos que las soluciones presentan resto -1 módulo 9, o lo que es lo mismo, resto 8. Pero con este módulo el resto es equivalente a sumar las cifras eliminando 9, es decir su *raíz digital*. Por eso en OEIS se destaca:

Todos los semiprimos encontrados, salvo el primero, poseen raíz digital 8.

Por ejemplo, en 5183 tenemos 5+1+8+3=17 y 1+7=8.

Puedes repasar la raíz digital en
https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_root

Al ser las funciones PHI y SIGMA multiplicativas, y ser PHI(p)=p-1 y SIGMA(p)=p+1 en los números primos, si los aplicamos a este caso del producto N=p(p+2) de dos primos gemelos, obtendremos:

PHI(N)=(p-1)(p+2-1)=(p-1)(p+1)
SIGMA(N)=(p+1)(p+2+1)=(p+1)(p+3)

La diferencia entre ambas será (p+1)*4=(p+1+p+1)*2=2*(p+p+2),es decir el doble de la suma de los dos primos gemelos. Lo verás en esta tabla:

N	Primos gemelos	PHI	SIGMA	DIFERENCIA
15	[3,1][5,1]	8	24	16
35	[5,1][7,1]	24	48	24
143	[11,1][13,1]	120	168	48
323	[17,1][19,1]	288	360	72
899	[29,1][31,1]	840	960	120
1763	[41,1][43,1]	1680	1848	168
3599	[59,1][61,1]	3480	3720	240
5183	[71,1][73,1]	5040	5328	288

Resumiendo*:*

En un producto de primos gemelos, la diferencia entre su número de divisores y el de coprimos menores que él es la suma de los dos primos.

Con estas ideas ya puedes experimentar con otros valores de K, como 4, 9, -4, -9 y otros. Lo dejamos abierto

MENOR MÚLTIPLO OBLONGO

Para su uso en los cálculos diarios que publico en Twitter, visito casi a diario la página The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!, (OEIS), http://oeis.org, fundada por N. J. A. Sloane. En la primavera de 2022 me llevé la sorpresa de ver una sucesión suya, del año 2021, referente a divisores de números oblongos. El tema de estos números no es muy popular en OEIS, y por eso me sorprendió verlos tratados por el mismo fundador de la página. Esto me ha llevado a tratar el tema con la mayor amplitud posible, según las sucesiones A345988 y A344005.

Lo que plantea N. J. A. Sloane en sus sucesiones es encontrar el oblongo más pequeño que es divisible entre un número dado. Si llamamos **n** a ese número, es claro que tiene dos múltiplos oblongos con seguridad, **n(n+1)** y **(n-1)n**. Por eso, se puede plantear una búsqueda infinita, como figura en OEIS, con la certeza de que se detendrá:

(PARI) a(n) = for(m=1, oo, if((m*(m+1))%n==0, return(m))) \\ Felix Fröhlich, Jun 04 2021

Lo planteamos para hoja de cálculo en VBASIC. Como no podemos usar el símbolo de infinito, nos serviremos de un bucle WHILE sin fin:

Function menoroblongo(n)
Dim m, o

m = 1 ‘Comenzamos la búsqueda con 1
o = m * (m + 1) ‘Creamos el oblongo
While o Mod n <> 0 ‘Mientras no sea divisible, avanzamos el WHILE
m = m + 1
o = m * (m + 1)
Wend
menoroblongo = o
End Function

Se podía plantear con más eficiencia, pero funciona con rapidez y la hemos dejado así. Con esta función podemos encontrar las mismas soluciones de Sloane:

Valor de n	Mínimo múltiplo oblongo
1	2
2	2
3	6
4	12
5	20
6	6
7	42
8	56
9	72
10	20
11	110
12	12
13	156
14	42
15	30

Uso del Buscador de Naturales

Nuestra herramienta de búsqueda de números naturales permite encontrar el menor oblongo múltiplo de un número dado. Lo que no puede construir es un listado como el de la tabla anterior, pero para explicar el concepto, a nivel elemental, nos vale.

Se puede descargar desde

(http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#buscador)

En la captura de pantalla siguiente figura la búsqueda en el caso de 80. Hemos buscado entre 80 y 6480=80*81, con las condiciones de ser oblongo y múltiplo de 80. Vemos que la solución es 240 como mínimo oblongo:

Solución	Detalles
240	
4160	
6320	
6480	

Buscamos desde el número	80
Hasta el número	6480
Con estas propiedades:	
OBLONGO MULTIPLO DE 80	

Casos particulares

Potencia de un primo

Si **n** es una potencia de un primo **p**, es claro que cualquier oblongo **m(m+1)** múltiplo de **n** ha de contener el factor primo **p**, luego lo contendrá **m** o **m+1**, porque no se puede repartir entre ellos, luego el mínimo será **(n-1)n**

El mínimo oblongo múltiplo de $\boldsymbol{p^k}$ *(p primo) es* $\boldsymbol{(p^k-1)p^k}$

Así, el número 243=3^5 poseerá como menor oblongo múltiplo el 242*243=58806.

Es fácil comprobarlo con el Buscador:

Solución	Detalles
58806	2 3 3 3 3 3 11 11
59292	2 2 3 3 3 3 3 61

Buscamos desde el número	243
Hasta el número	59292

Con estas propiedades:

OBLONGO
MULTIPLO DE 243
EVALUAR FACTORES

Los dos únicos oblongos de la solución son 242*243 y 243*244. En las factorizaciones destaca el número 3 repetido cinco veces, luego son múltiplos de 243.

Números que solo poseen dos factores primos

Si un número presenta la factorización $N=p^a * q^b$ con **p** y **q** primos, es claro que en un oblongo m(m+1) m será múltiplo de uno de los primos, y m+1 lo será del otro. Esto nos lleva a una ecuación diofántica: $p^a x - q^b y = \pm 1$

Esta ecuación siempre tendrá solución, al ser los coeficientes primos entre sí, y la duda será si el segundo miembro deberá valer 1 o -1 y si las soluciones serán positivas.

Por ejemplo, el número $N=3^2*5^3=1125$ poseerá un oblongo múltiplo si $3^2x - 5^3y = \pm 1$

Si tomamos el valor 1, será x=(1+125y)/9, con lo que habrá que buscar múltiplos de 125 que al sumarles 1 sean múltiplos de 9

Creamos una tabla con esos cocientes:

1	14
2	27,888889
3	41,777778
4	55,666667
5	69,555556
6	83,444444
7	97,333333
8	111,22222
9	125,11111
10	139
11	152,88889
12	166,77778
13	180,66667

Observamos que (1, 14) es una solución y, en efecto, 14*9=126 y 1*125=125, luego m=125 y m+1=126, con lo que su producto será un oblongo múltiplo de 1125, 15750. Pero la cuestión es que no sabemos si es el mínimo, porque más abajo hay otra solución, 10, 139, en la que 139*9=1251 y 10*125=1250, con lo que el oblongo sería 1250*1251, claramente mayor que 15750.

A esto hay que añadir que habrá que repetir todo con el caso -1.

En nuestro ejemplo aparecería la solución 8, 111, es decir 8*125=1000 y 111*9=999, que también sería válida.

Vemos que la resolución es posible, pero que no nos garantiza el carácter de mínimo múltiplo.

Estudio diofántico

Podemos plantear

125x-9y=1 o bien 12x-9y=-1

Usamos WolframAlpha:

Caso +1

Entrada

$$125x - 9y = 1$$

Paramétricas:

Solución entera

$$x = 9n + 8, \quad y = 125n + 111, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Caso -1

Entrada

$$125x - 9y = -1$$

Paramétricas:

$$x = 9n + 1, \quad y = 125n + 14, \quad n \in \mathbb{Z}$$

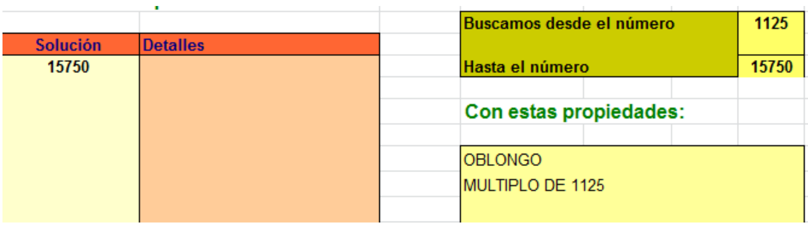
Se observa que en las dos paramétricas el mínimo valor positivo se alcanza si n=0.

En la primera tendríamos x=8, y=111, con lo que m=999 y m+1=1000, resultando el oblongo 999000.

En la segunda, x=1 y=14, m=125, m+1=126 y el oblongo el ya conocido

En la práctica es más rápido usar el Buscador ya que sabemos que existen soluciones.

En la siguiente captura de pantalla observamos que se ha buscado un oblongo múltiplo menor que 15750 y no se ha encontrado, luego este es el mínimo:



Caso general

Para un número con más de dos factores primos, bastará agruparlos en dos productos cuyos factores sean primos entre sí, y aplicar la misma técnica de ecuación diofántica, además de las técnicas de búsqueda ya estudiadas. Para encontrar el mínimo deberemos recorrer todos los pares de factores unitarios. Puedes leer la propuesta de Sloane en la sucesión A344005.

Una extensión de la definición de la función TAU, que es la que cuenta los divisores de un número, puede ser la que resuma las descomposiciones en dos factores, N=x*y, o, ya puestos, las de tres factores N=x*y*z, o cuatro. Así podríamos definir TAU_1, TAU_2, TAU_3,…según el número de esos factores.

En este blog hemos aludido alguna vez a la descomposición de un número en tres factores, pero sin tener en cuenta el orden de los mismos, que elegíamos ordenados en orden creciente.

Por ejemplo, se tratan en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2018/04/productos-de-tres-divisores-13.html y siguientes

En este estudio dedicaremos una pequeña referencia a TAU_2, que en realidad es la función TAU tradicional, para después dedicarnos a TAU_3 y TAU_4. A partir de ellas no es difícil estudiar las siguientes.

Función TAU_2(n)

Si buscamos todos los pares ordenados de divisores de N cuyo producto es N, en realidad estamos contando los divisores simples, porque cada divisor posee un complementario (N/d) respecto a N que también es divisor de N, lo que duplica su presencia en los productos.

En síntesis: **TAU_2(N) = TAU(N)**

Es lo único que estudiaremos de esta función, muy conocida y también muy usada en este blog.

Según el razonamiento anterior, contar divisores de un número N equivale a contar soluciones ordenadas de la ecuación **N=x*y** con **x** e **y** positivos.

Lo podemos comprender mejor con un ejemplo concreto. Hemos elegido el número 84:

El número de divisores de 84, o TAU(84), se calcula a partir de la descomposición factorial: $84=2^2*3*7$, aplicando la conocida fórmula del producto de exponentes incrementados en una unidad:

TAU(84)=(1+2)(1+1)(1+1)=12.

Los doce divisores son: 84, 42, 28, 21, 14, 12, 7, 6, 4, 3, 2 y 1

Viene bien recordar que el valor de TAU sólo depende de la signatura prima, que es el conjunto de exponentes, y no de los factores primos.

Por otra parte, las soluciones de 84=x*y se pueden encontrar con nuestra herramienta Cartesius (http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius)

Con ella podemos usar el siguiente planteo:

xtotal=2
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

Se sigue fácilmente: Combinar dos números, entre 1 y 84, que sean ambos divisores de 84, y que su producto sea también 84. Resultan las soluciones:

X1	X2
1	84
2	42
3	28
4	21
6	14
7	12
12	7
14	6
21	4
28	3
42	2
84	1

Como cada divisor **d** posee un único complementario **N/d** para conseguir el 84, es evidente que resultarán también 12 soluciones, con lo que comprobamos que esta forma de definir TAU es válida.

Función TAU_3(n)

Ya se indicó más arriba que la descomposición en tres factores ya se ha abordado en este blog, pero ahora consideraremos todas las ordenaciones posibles de las tres soluciones de la ecuación **N=x*y*z**. No es difícil razonar cómo encontrar el número de soluciones. Basta considerar que **z** ha de tomar todos los valores posibles de divisores de **N**, y que **x*y** serían entonces todos los productos posibles del complementario de z, **N/z**. Por tanto, cada valor de z se combinará con las soluciones de **N/z=x*y**, que vimos más arriba que coinciden con el número de divisores de N/z. Por tanto TAU_3(N) se encuentra sumando ***los números de divisores de cada divisor de N***.

Lekraj Beedassy lo expresa muy bien en OEIS: *“Number of divisors of n's divisors”*.

Lo comprobaremos de varias formas con el mismo ejemplo del 84. Comenzaremos con Cartesius:

xtotal=3
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

El mismo plantamiento que con dos factores, adaptándolo a tres. Resultan entonces 54 soluciones.

Total
54

Ahora lo resolveremos con una función para Excel o Calc:

Public Function tau_3(n)
Dim i, j, s

s = 0 ‘Inicio del contador
For i = 1 To n
If n / i = n \ i Then ‘Recorre los divisores de N
For j = 1 To i
If i / j = i \ j Then s = s + 1 ’Aumenta el contador con “divisores de divisores”
Next j
End If
Next i
tau_3 = s
End Function

Si lo aplicamos al número 84, se confirma que TAU_3(84)=54

En https://oeis.org/A007425 están publicados los valores para los primeros números:

A007425 d_3(n), or tau_3(n), the number of ordered factorizations of n as n = r s t.

1, 3, 3, 6, 3, 9, 3, 10, 6, 9, 3, 18, 3, 9, 9, 15, 3, 18, 3, 18, 9, 9, 3, 30, 6, 9, 10, 18, 3, 27, 3, 21, 9, 9, 9, 36, 3, 9, 9, 30, 3, 27, 3, 18, 18, 9, 3, 45, 6, 18, 9, 18, 3, 30, 9, 30, 9, 9, 3, 54, 3, 9, 18, 28, 9, 27, 3, 18, 9, 27, 3, 60, 3, 9, 18, 18, 9, 27, 3, 45, 15, 9, 3, 54, 9, 9, 9, 30,…

Puedes comprobar valores con Cartesius o nuestra función.

Los códigos PARI publicados en esta página son tan ingeniosos, que es prferible copiar alguno. Por ejemplo:

a(n)=sumdiv(n, x, sumdiv(x, y, 1)) \\ Joerg Arndt, Oct 07 2012

Pide sumar, para cada divisor de N, un 1 por cada uno de sus divisores, lo que equivale a contarlos. Lo probamos en la página web de PARI:

for(i=1, 200, print1(sumdiv(i, x, sumdiv(x, y, 1)),", "))

```
? for(i=1, 200, print1(sumdiv(i, x, sumdiv(x, y, 1 )),", "))
1, 3, 3, 6, 3, 9, 3, 10, 6, 9, 3, 18, 3, 9, 9, 15, 3, 18, 3, 18, 9, 9, 3, 30, 6, 9,
10, 18, 3, 27, 3, 21, 9, 9, 9, 36, 3, 9, 9, 30, 3, 27, 3, 18, 18, 9, 3, 45, 6, 18,
9, 18, 3, 30, 9, 30, 9, 9, 3, 54, 3, 9, 18, 28, 9, 27, 3, 18, 9, 27, 3, 60, 3, 9, 1
8, 18, 9, 27, 3, 45, 15, 9, 3, 54, 9, 9, 9, 30, 3, 54, 9, 18, 9, 9, 9, 63, 3, 18, 1
8, 36, 3, 27, 3, 30, 27, 9, 3, 60, 3, 27, 9, 45, 3, 27, 9, 18, 18, 9, 9, 90, 6, 9,
9, 18, 10, 54, 3, 36, 9, 27, 3, 54, 9, 9, 30, 30, 3, 27, 3, 54, 9, 9, 9, 90, 9, 9,
18, 18, 3, 54, 3, 30, 18, 27, 9, 54, 3, 9, 9, 63, 9, 45, 3, 18, 27, 9, 3, 90, 6, 2
7, 18, 18, 3, 27, 18, 45, 9, 9, 3, 108, 3, 27, 9, 30, 9, 27, 9, 18, 30, 27, 3, 84,
3, 9, 27, 36, 3, 54, 3, 60,
```

Coincide, como era de esperar, con los publicados.

Intervienen los números triangulares

Todos los resultados son productos de números triangulares y dependen de la signatura prima de N, y no de los valores de los factores primos.

Introducimos el tema con algunos ejemplos:

N es primo

En ese caso Tau_3(N)=3, porque los productos *xyz* posibles serían 11p,1p1, y p11, es decir T(1+1)=3, representando por T el triangular correspondiente. También podemos acudir a una partición plana que represente la segunda definición que hemos dado (https://en.wikipedia.org/wiki/Plane_partition)

1 p

1

Es un esquema triangular de lado 2

*N es semiprimo N=p*q con factores primos diferentes*

Los productos xyz serían

N11, 1N1, N11, 1pq, 1qp, qp1, q1p, pq1, p1q son nueve, que coincide con T(1+1)T(1+1)=3*3=9

Como partición plana:

N p q 1
p 1
q 1
1
Resulta TAU_3(pq)=9

Para un semiprimo cuadrado

Los productos serían 11n,1n1, n11, 1pp, p1p, pp1 son seis: T(2+1)=T(3)=6

En representación de dos dimensiones:

N p 1
p 1
1
TAU_3(p^2)=6

Para exponentes 2 y 1, como el 12:

Los productos serían 1(12)1, 11(12), (12)11, 143, 134, 413, 431, 314, 341, 223, 232, 322, 126, 162, 216, 261, 612, 621 son 18, T(2+1)T(1+1)=6*3=18

En un esquema de partición plana se organizarían así:

12 6 4 3 2 1
6 3 2 1
4 2 1
3 1
2 1
1
TAU_3(p^2q)=18

Los divisores de los divisores resultan ser 18, ordenados.

Aquí nos detenemos. Hemos comprobado que para un factor el TAU_3(N) es un triangular, y para dos factores, un producto de triangulares. Pues bien, ese esquema se conserva, y si un número posee varios factores primos con diferentes exponentes, bastará sustituir en la fórmula de la función TAU los paréntesis por números triangulares

$$\mathbf{D(N) = (1 + a_1) * (1 + a_2) \ldots (1 + a_k)}$$

$$\mathbf{TAU_{3(N)} = T(1 + a_1)T(1 + a_2)T(1 + a_3) \ldots T(1 + a_k)}$$

Lo podemos razonar descomponiendo la partición plana en diversas zonas cuando se añade un factor nuevo. Tomaremos el 12 como ejemplo y realizaremos un producto cartesiano entre los datos del 4 con los del 3

			TAU_3(3)		
		1	1	3	
	4	4	4	12	
TAU_3(4)	2	2	2	6	Divisores de 12
	1	1	1	3	
	2	2	2	6	Divisores de 6
	1	1	1	3	
	1	1	1	3	Divisores de 3
		TAU_3(12)			

Hemos representado en colores distintos las zonas en las que se divide el producto cartesiano de seis filas y tres columnas:

En rojo figuran los elementos de TAU_3(4), los que había antes de incorporar el 3. En la tercera columna figuran los divisores en los que interviene el nuevo factor 3. Las zonas horizontales de distinto color representan los “divisores de divisores”, que son fundamentales en este estudio.

Es fácil comprender que obtendríamos un esquema similar si el nuevo factor estuviera elevado a un exponente mayor que 1. Ahí lo dejamos y nos creemos sin desarrollarlo que también se obtendría un producto de triangulares.

Sólo comprobaremos la fórmula con nuestras funciones. Por ejemplo, $72=2^3*3^2$, luego según la fórmula sugerida, tendríamos TAU_3(72)=T(1+3)T(1+2)=10*6=60

Con nuestra función

N	72
TAU_3(N)	60

Con el código PARI de Joerg Arndt

print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1)))

```
? print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1 )))
60
```

```
print(sumdiv(72, x, sumdiv(x, y, 1 )))
```

Función TAU_4(n)

El estudio de TAU_3 nos ha abierto caminos y los hemos aprovechado con calma. Ahora sólo resumiremos algunos de ellos en los demás casos.

Si definimos TAU_4(N) como como el número de productos *xyzu* de cuatro factores (con ordenación) cuyo producto es N, podremos comenzar como en el caso de 3, con nuestra herramienta Cartesius. Sería así en nuestro ejemplo del 84:

xtotal=4
xt=1..84
xt=filtro(divisor(84))
producto=84

Al combinar cuatro factores, el proceso es más lento, pero no excesivamente, y nos da un resultado de 160:

Total
160

Algunas ideas sobre TAU_3(N) se pueden ampliar a TAU_4(N). La primera es que la frase “divisores de divisores” habrá que cambiarla por “Valores de TAU en divisores”, ya que, al añadir un factor nuevo en el producto xyzv, este no se combina con divisores, sino con productos que vimos al principio que representaban a TAU. Así, el esquema bidimensional no se rellenará con divisores, sino con su número de divisores. Recordemos que en TAU_3 usábamos este esquema

12 6 4 3 2 1
6 3 2 1
4 2 1
3 1
2 1
1

Ahora deberíamos sustituir cada divisor por el valor de TAU (número de divisores) en cada uno. Lo hemos efectuado en Excel relacionando los dos esquemas:

Cuenta los divisores de divisores

12	6	4	3	2	1
6	3	2	1		
4	2	1			
3	1				
2	1				
1					
TAU_3		Cuenta			18

Suma el número de divisores de todos los divisores

6	4	3	2	2	1
4	2	2	1		
3	2	1			
2	1				
2	1				
1					
TAU_4		SUMA			40

Como podemos observar, TAU_4(12)=40.

Podíamos añadir un bucle a nuestra función en VBasic para TAU_3, pero resultaría algo lenta. Por otra parte, no es difícil la comprobación con Cartesius, cambiando datos en las condiciones que usamos para el 84. Sin embargo, parece más útil comprobar el cálculo recordando la fórmula para TAU_3 que usa números triangulares

$$\mathbf{TAU_{3(N)} = T(1+a_1)T(1+a_2)T(1+a_3)\dots T(1+a_k)}$$

En efecto, para TAU_4 se pueden sustituir por tetraedros, pirámides triangulares, ya que las posibilidades dependen de tres dimensiones. Esta idea es correcta y se puede aplicar en este caso. Hay que recordar que la fórmula del tetraedro de orden n es ***TE(n)=n(n+1)(n+2)/6*** (ver nuestra publicación Números piramidales:

http://www.hojamat.es/publicaciones/piramidal.pdf)

En el caso de 12 quedaría:

$12=2^2*3$

TAU4_(12)=TE(1+2)*TE(1+1)=3*4*5/6*2*3*4/6=10*4=4
0

Con ello queda comprobada esta técnica, que se amplía a TAU_5, TAU_6,…aumentando dimensiones a las pirámides.

Puedes repasar todo en la sucesión https://oeis.org/A007426, en la que están publicados los primeros valores de TAU(N):

1, 4, 4, 10, 4, 16, 4, 20, 10, 16, 4, 40, 4, 16, 16, 35, 4, 40, 4, 40, 16, 16, 4, 80, 10, 16, 20, 40, 4, 64, 4, 56, 16, 16, 16, 100, 4, 16, 16, 80, 4,…

Con esto, podemos seguir ampliando productos, pero con lo que tenemos ya se comprende la esencia de estas funciones TAU.

GENERACIÓN DE PRIMOS CON CUADRADOS Y OTROS

En mis exploraciones por la página OEIS me he encontrado con una sucesión de primos en la que a cada término le sigue el menor primo cuya diferencia con el anterior es un cuadrado (https://oeis.org/A073609). He pensado en ampliar el tema a diferencias de otro tipo, no cuadrados, para descubrir algunas posibles propiedades.

La sucesión es claramente dependiente de su inicio, que en este caso es el 2, pero para cualquier primo con que iniciemos, producirá un siguiente primo único, diferente a estos o coincidente. Los términos publicados son los siguientes, con inicio en 2:

2, 3, 7, 11, 47, 83, 227, 263, 587, 911, 947, 983, 1019, 1163, 1307, 1451, 1487, 1523, 1559, 2459, 3359, 4259, 4583, 5483, 5519, 5843, 5879, 6203, 6779, 7103, 7247, 7283, 7607, 7643, 8219, 8363, 10667, 11243, 11279, 11423, 12323, 12647, 12791, 13367,...

No es difícil, dado un número primo, encontrar otro primo, el menor posible, que se diferencie del primero en un cuadrado. La función en VBA de Excel puede ser la siguiente:

Function primsalto(a) As Long
Dim p, prim,d As Long
Dim sale As Boolean

if not esprimo(a) then primsalto=0:exit function ‘No es primo y se asigna un cero

p = primprox(a): sale = False: prim = 0 ‘Se van buscando los siguientes primos

While Not sale

d=p-a ‘Se calcula la diferencia

if escuad(d) then prim=p:sale=true ‘Si la diferencia es cuadrada, tenemos la solución

p=primprox(p) ‘Se sigue con el siguiente primo

wend

primsalto=prim ‘Se encontró

End Function

Hay que usar las funciones ESCUAD y PRIMPROX, que se pueden buscar en nuestro blog.

Con ella, comenzando, por ejemplo en el 7, se construye fácilmente un conjunto dentro de la sucesión:

Primos	Diferencias cuadradas
7	
11	4
47	36
83	36
227	144
263	36
587	324
911	324
947	36
983	36
1019	36
1163	144
1307	144
1451	144
1487	36

Si elegimos un primo que no figure en la sucesión, como el 13, construiremos otra similar, que, en este caso sería:

Primos	Diferencias cuadradas
13	
17	4
53	36
89	36
233	144
269	36
593	324
1493	900
1637	144
2213	576
2357	144
2393	36
2969	576
4733	1764
4877	144

En este caso nos devuelve otra sucesión cuyos primeros términos no coinciden con los anteriores. Podía haber un elemento común, con lo que ambas sucesiones coincidirían totalmente a partir de él. Volveremos a ese tema.

En la sucesión de OEIS citada se organiza la búsqueda con un orden distinto, pues para cada primo se le van sumando cuadrados hasta llegar a otro primo. El código PARI es muy sintético y lo copiamos aquí.

print1(a=2, ", "); for(n=1, 43, k=1; while(!isprime(b=a+k^2), k++); print1(a=b, ", "))

Usa la instrucción *print* para asignar también valores a las variables. No lo habíamos visto hasta ahora, y es ingenioso.

Cuestiones diversas

Naturaleza de los cuadrados

Para primos mayores que 6, en cada inicio de sucesión, si se llega a un tipo **36k+p**, siendo p primo del tipo **6q+5**, todos los cuadrados que se añadan en este proceso serán múltiplos de 36, con lo que el tipo inicial **36k+p** se mantendrá.

Efectivamente, si le sumo otro cuadrado, deberá ser par, para que la suma siga siendo impar, y también ha de ser múltiplo de 3, pues, en caso contrario, sería uno de los tipos 6m+2 o 6m+4, y resultaría:

$36k+p+(6m+2)^2 =36(k+m^2)+24m+4+p$

$36k+p+(6m+4)^2 =36(k+m^2)+48m+16+p$

Si p=6k+5 no valen estos casos, pues 4+p y 16+p serían múltiplos de 3, con lo que el resultado final no sería primo. Por tanto, el cuadrado ha de ser múltiplo de 36.

Si p=6k+1, puede no ser el salto de 36k, sino otro cualquiera par, como 4, 16, 64 o 100.

Observamos algunos inicios:

Inicio 37

Este primo es del tipo 6k+1, por lo que el cuadrado que se suma no ha de ser múltiplo de 36, pero el siguiente, 41, es del tipo 6k+5, y a partir de él, todos son del mismo tipo. A esta situación se llegará siempre. Es fácil razonarlo.

$36k+6q+1+(6m+2)^2 =36(k+m^2)+24m+4+6q+1=6h+5$

$36k+6q+1+(6m+4)^2 =36(k+m^2)+48m+16+6q+1=6h+5$

Lo vemos en la imagen:

Primos	Diferencias cuadradas
37	
41	4
617	576
653	36
797	144
941	144
977	36
1013	36
1049	36
1193	144
1229	36
1373	144
1409	36
1553	144
1697	144

Todos los restos módulo 6 valen 5, y todas las diferencias múltiplos de 36 a partir del 41.

Inicio 47

Este primo es del tipo 6k+5, luego todos los cuadrados serán múltiplos de 36

Primos	Diferencias cuadradas	
47		
83	36	
227	144	
263	36	
587	324	
911	324	
947	36	
983	36	
1019	36	
1163	144	
1307	144	
1451	144	
1487	36	
1523	36	
1559	36	

Primos consecutivos

Hemos visto que el primo 37, con un cuadrado se ha convertido en su consecutivo. En este caso, con cuadrado igual a 4. Esto será frecuente, pero habrá otros ejemplos. En un primer intento, todos los casos hasta el valor de 1000 presentan una diferencia de 4. El siguiente cuadrado par, 16, se alcanza por primera vez en el par 1831, 1847. La siguiente diferencia de 64 no se alcanza para valores inferiores a 25000. Con el siguiente código, adaptado de OEIS, hemos encontrado dos pares de primos consecutivos con diferencia 64.

```
primosalto(n)={my(k=1,b);while(!isprime(b=n+k^2),
k++);b}
forprime(i=2,2000,p=nextprime(i+1)
;q=primosalto(i);if(p==q&&p-i==16,print(i," ",p)))
```

Son estos: (89689, 89753) y (107377, 107441)

Los primeros casos para cada cuadrado están publicados en https://oeis.org/A138198:

2, 7, 1831, 9551, 89689, 396733, 11981443, 70396393, 1872851947, 10958687879, 47203303159, 767644374817, 8817792098461, 78610833115261, 497687231721157, 2069461000669981, 22790428875364879, 78944802602538877....

Primos comunes a dos sucesiones

Se podría preguntar si estas sucesiones son disjuntas o existen elementos comunes, y la respuesta es que sí los hay. Hemos usado la siguiente función para detectar si un número primo pertenece a la sucesión iniciada con otro primo menor, al que llamaremos *antecedente*.

function numsaltos$(n)
dim s$
dim i,k
k=0 ‘Contador de soluciones
i=2 ‘Primer inicio primo
while i<=n and k<2
if n=primsalto(i) then k=k+1:s=s+str$(i)+", "’Nueva solución
i=primprox(i)’Siguiente primo posible
wend

if k>=2 then numsaltos=str$(ajusta(k))+". "+s else numsaltos="NO"
end function ‘Devuelve un par de soluciones o un “NO”

Los primeros elementos comunes, seguidos por dos antecedentes son:

41 5, 37
47 11, 31
83 47, 79
89 53, 73
107 71, 103
167 131, 151
173 29, 137
197 181, 193

Por ejemplo, 167 pertenece a las sucesiones

131, 167, 311, 347, 383

151, 167, 311, 347, 383

Es evidente que, a partir de un elemento común, todos lo son.

Primos sin antecedentes

Si modificamos la función ***numsaltos*** para que devuelva sólo el número de antecedentes, obtendremos otras soluciones interesantes:

Estos serían inicio de sucesión pero no pertenecerían a ninguna otra. Basta buscar aquellos primos p en los que numsaltos(p)=0. Los primeros son estos:

2, 5, 13, 19, 29, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 103, 109, 127, 139, 151, 157, 163, 179, 181, 191, 193, 199, 211, 223, 229, 241, 271, 277, 283, 313, 331, 337, 349, 359, 367, 373, 379, 397, 409, 421, 431, 433,...

Están publicados en https://oeis.org/A073770

Otros tipos

En anteriores párrafos generamos sucesiones de primos en la que cada término era el menor primo con diferencia cuadrada respecto al anterior. De forma más breve realizaremos un recorrido con otros casos que tengan otro carácter.

Triangulares

En el caso de cuadrados usábamos la función PRIMSALTO.

Ahora sustituimos en la función PRIMSALTO la función ESCUAD por la función ESTRIANGULAR, y elegimos el 2 como primo de inicio. Con ello encontraremos los primeros primos que posean una diferencia triangular con el anterior, siendo cada uno el mínimo con esa propiedad.

Obtenemos:

Primos	Diferencias	Orden triangular
2		
3	1	1
13	10	4
19	6	3
29	10	4
107	78	12
113	6	3
149	36	8
227	78	12
233	6	3
239	6	3
317	78	12
353	36	8
359	6	3
479	120	15

Aquí lo interesante es que todas las diferencias, salvo la primera, han de ser pares, por lo que los órdenes de las mismas han de pertenecer a uno de los tipos 4k o 4k-1. Es fácil razonarlo a partir de la expresión n(n+1)/2.

Con este inicio del primo 2, están publicados en

https://oeis.org/A275030

Ocurre con estos primos algo similar a lo que se observaba en el caso de cuadrados, y es que si se alcanza un primo del tipo 6n+5, todos sus consecutivos comparten ese mismo tipo. Lo puedes comprobar en el caso de 97, que hemos elegido al azar:

Primo	Diferencia triang.	Resto mód 6
97		
103	6	1
109	6	1
137	28	5
173	36	5
179	6	5
257	78	5
263	6	5
269	6	5
347	78	5
353	6	5
359	6	5
479	120	5
557	78	5
563	6	5
569	6	5
647	78	5
653	6	5
659	6	5

A partir del 137 todos son del tipo 6n+5. Se puede razonar estudiando seis casos. En primer lugar distinguiremos entre triangulares de orden 4k o de orden 4k-1 (ver párrafos anteriores) y dentro de ellos, que k sea del tipo 3m, 3m+1 o 3m-1. Lo desarrollamos suponiendo que partimos de un primo del tipo 6n+5 y llamamos T al triangular que se suma:

Primer caso $T=2k(4k+1)=8k^2+2k$

$6n+5+T=6n+5+8k^2+2k$

Si **k=3m** T es múltiplo de 6, luego sigue la forma 6n+5

Si **k=3m+1**. $T=8(3m+1)^2+2(3m+1)=72m^2+48m+8+6m+2$ que da resto 4 módulo 6, luego pasa al tipo 6n+3, que no es primo. No nos vale.

Si **k=3m-1** $T=8(3m-1)^2+2(3m-1)=72m^2-48m+8+6m-2$ múltiplo de 6, luego respeta el 6n+5

Segundo caso $T=2k(4k-1)=8k^2-2k$

Si **k=3m** es T múltiplo de 6 y respeta el 6n+5

Si **k=3m+1** $8(3m+1)^2-2(3m+1)=72m^2+48m+8-6m-2$, múltiplo de 6 y respeta el tipo 6n+5

Si **k=3m-1** $8(3m-1)^2-2(3m-1)=72m^2-48m+8-6m+2$ resto 4 y no resulta primo

O no son válidos los triangulares, porque den resto 4 y convertirían 6n+5 en 6n'+9, no primo o bien se suma un múltiplo de 6 y sigue 6n+5.

Queda, pues, comprobado que al llegar a un primo de ese tipo, se conserva ese carácter.

Primos iniciales, sin antecedentes

Procediendo de forma similar al caso de los cuadrados, descubrimos que estos primos no tienen antecedentes:

3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 97, 101, 103, 109, 113, 127, 131, 139, 151, 157, 163, 167, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 229, 241, 251, 263, 269, 271

No debemos confundirnos. En el listado parece que 11 es antecedente de 17, pues su diferencia es el triangular 6, pero la existencia del intermedio 13 invalida la idea.

Primos consecutivos

También en el caso de saltos triangulares se observan primos consecutivos. Estos son los primeros:

23, 29
31, 37
47, 53
53, 59
61, 67
73, 79
83, 89
131, 137
139, 149
151, 157
157, 163
167, 173
173, 179
181, 191

Con cubos

Procediendo de igual forma que en los tipos anteriores obtenemos:

Primo	Diferencia cúbica
2	
3	1
11	8
19	8
83	64
1811	1728
2027	216
2243	216
2251	8
2467	216
2531	64
2539	8
3539	1000
3547	8
4547	1000
5059	512

Están publicados en https://oeis.org/A076201, y no presentan, aparentemente, propiedades de interés.

Con oblongos

Al ser los oblongos números pares que son doble de un triangular (son del tipo n(n+1)), se merecen un repaso. Con ellos no se puede iniciar con el primo 2. Estos son los primeros conseguidos con inicio 3:

Primos	Salto oblongo	Resto módulo 6
3		
5	2	5
7	2	1
13	6	1
19	6	1
31	12	1
37	6	1
43	6	1
73	30	1
79	6	1
109	30	1
139	30	1
151	12	1
157	6	1
163	6	1
193	30	1
199	6	1
211	12	1
223	12	1
229	6	1
241	12	1

Con oblongos, el tipo de primo que perdura es el **6n+1**. En la tabla comprobamos que este hecho comienza en el 7.

Si llamo O al oblongo (da igual su orden, porque siempre es par) tendremos:

6n+1+O = 6n+1+k(k+1)

Si **k=3m**, 6n+1+(3m)(3m+1) sigue el tipo 6n+1 pues el producto es múltiplo de 6

Si **k=3m+1**. 6n+1+k(k+1)=6n+1+(3m+1)(3m+2) sería no válido, por ser la suma múltiplo de 3

Si **k=3m-1**, 6n+1+k(k+1)=6n+1+(3m-1)(3m) sería idéntico al primer caso.

Así que los saltos válidos respetan el tipo **6n+1**

Siguiendo un proceder de este blog, cuando se tratan varios tipos de números, al avanzar se prescinde de algunos detalles, para no cansar y también para dar oportunidad a los lectores que deseen explorar por su cuenta. Así que aquí dejamos el tema.