Algoritmos

$$\frac{1280}{345} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Edición 2022

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

La utilidad mayor de una hoja de cálculo en el estudio de los números es la de implementación de algoritmos. Con ellos se logra automatismo y velocidad, liberando así nuestro tiempo para tareas más interesantes.

La programación de un algoritmo es una tarea altamente formativa y entretenida, aunque requiere algo de experiencia. En este documento usaremos el Basic para hojas de cálculo como codificación básica, pero podrán aparecer los algoritmos en pseudocódigo u organigramas, así como para otras herramientas.

Para dar más facilidades de comprensión, en algunos algoritmos incluiremos versiones para la calculadora WIRIS, el programa WxMaxima y el lenguaje PARI. Las tres herramientas son gratuitas y fácilmente descargables. En otras ocasiones usaremos nuestra calculadora StCalcu

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

TABLA DE CONTENIDO

ALGORITMOS GENERALES

PERIODO DE LA FRACCIÓN 77/23

Sacar decimales

Las hojas de cálculo están orientadas a los números decimales y se comportan mal en algunos problemas que necesitan operaciones con números enteros. Así, en la cuestión de obtener el periodo de una fracción, aunque es un problema propio de números racionales, los cálculos se efectúan mediante la división entera tradicional. Así se efectuaba en las aulas cuando no existían las calculadoras.

No es difícil implementar una división entera para obtener los periodos largos que se producen con denominadores que contengan como factores números primos grandes. La idea es usar las funciones COCIENTE y RESIDUO

Por ejemplo, para obtener muchas cifras decimales del cociente 77/23, podemos proceder así: El cociente entre ambos sería COCIENTE(77;23) = 3, que sería la parte entera. El resto se hallaría mediante RESIDUO(77;23)=8.

A continuación podemos imitar la división que efectuábamos en el colegio ("sacar decimales"). Podemos multiplicar el resto 8 por 10 y volver a repetir la operación: COCIENTE(80;23) = 3, que sería la primera cifra decimal. Volvemos a hallar el resto: RESIDUO(80;23) = 11. Y así reiteramos cuantas veces deseemos.

En la imagen puedes estudiar la forma de ordenar estos cálculos

Núm. cifras	Restos	Cifras del cociente	
0	8	3	Parte entera del cociente
1	11	3	
2	18	4	
3	19	7	
4	6	8	
5	14	2	
6	2	6	
7	20	0	
8	16	8	
9	22	6	
10	13	9	Cifras decimales
11	15	5	
12	12	6	
13	5	5	
14	4	2	
15	17	1	
16	9	7	
17	21	3	
18	3	9	
19	7	1	

Puedes estudiar este algoritmo en el archivo de dirección http:www.hojamat.es/aritmetica/teoria/hojas/granperiod.ods

Técnicas parecidas hemos usado para encontrar el periodo y anteperiodo en forma de cadena de caracteres. Se puede consultar en

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#periodo

Otras codificaciones

En PARI

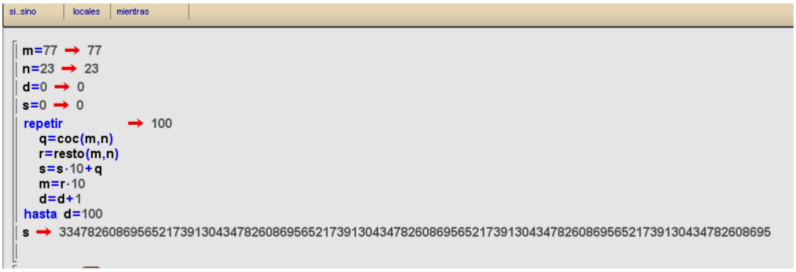
Este algoritmo tiene fácil implementación en PARI:

M=77;N=23;T=100;for(i=1,T,Q=M\N;R=M%N;print1(Q);M=R*10)

El código ha sido preparado para obtener 100 cifras del cociente 77/23

En Wiris

Se pueden cambiar los valores 77, 23 y 100 para adaptarlos a otros datos.



En wxMaxima

```
m:77$
n:23$
s:0$
for i:1 thru 100 do
(
q:floor(m/n),
r:m-q*n,
m:r*10,
s:s*10+q
)$
s;
```

3347826086956521739130434782608695652173913043478260869565217391304347826086956521739130434782608695

También se pueden cambiar los datos 77, 23 y 100

Función en Stcalcu

Admite como datos dos números escritos entre comillas o en una celda con formato de texto, así como el número de decimales escrito con formato numérico:

Function stdecimales$(a$, b$, num)

```
Dim p$, m$, q$
Dim i

p$ = stdivi(a$, b$)
p$ = p$ + "."
m$ = residuo$
For i = 1 To num
m$ = m$ + "0"
Next i
q$ = stdivi(m$, b$)
p$ = p$ + q$
stdecimales = p$
End Function
```

EL ALGORITMO DE MOESSNER

Presentamos en este apartado una curiosidad matemática a base de cribados: toma la lista de los primeros números naturales. Tacha después uno de cada cuatro, comenzando con el mismo 4:

1 2 3 5 6 7 9 10 11 13 14

Después escribe la lista de sus sumas parciales.

1 3 6 11 17 24 33 43 54 67 81

Y ahora tachas de tres en tres, sumando después de nuevo.

1 3 11 17 33 43 67 81

1 4 15 32 65 108 175 256

Después tachas de dos en dos

1 15 65 175

Y sumas

1 16 81 256

El resultado es la serie de las potencias cuartas de los naturales. Recuerda que hemos comenzando tachando de cuatro en cuatro. ¿Funcionará con el tres?

Lo escribimos sin explicaciones:

1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17

1 3 7 12 19 27 37 48 61 75 91 108

1 7 19 37 61 91

1 8 27 64 125 216

Resultan los cubos. Prueba de dos en dos y obtendrás los cuadrados. ¿Funcionará esto siempre? Este algoritmo lo propuso Alfred Moessner y fue demostrada su validez para cualquier valor natural por Oskar Perron en 1951 usando la inducción matemática.

Nuestro objetivo hoy es reproducir este algoritmo con hoja de cálculo, que por cierto no es nada fácil. Contiene una verdadera trampa, que es la posible confusión entre valores y posiciones. Lo vemos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	A. Roldán 2011												
2													
3							Algoritmo de Moessner						
4													
5													
6													
7		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8		0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
9	**4**	1	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
10		1	3	6	11	17	24	33	43	54	67	81	96
11		0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
12	**3**	1	3	11	17	33	43	67	81	113	131	171	193
13		1	4	15	32	65	108	175	256	369	500	671	864
14		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
15	**2**	1	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439	4600	5800
16		1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	14600	20400
17													
18	**1**												
19													
20													
21													

En la celda A9 escribimos la amplitud de los saltos. En la imagen está preparado para que resulten las cuartas potencias. La hoja se encarga de ir restando una unidad hacia abajo y dejar de escribir cuando se llegue a 1. El modelo está preparado para llegar a 5, pero si lo descargas puedes ampliarlo a tu gusto.

La fila 7 contiene la serie de números naturales. Después se van repitiendo hacia abajo tres filas:

Primera: Es un artificio, pues la hoja debe buscar el elemento a tachar cada vez más lejos, y dependiendo del valor de A9. Esto lo hemos resuelto con la fórmula (usamos la contenida en C8)

=SI(ESNUMERO($A12);SI(RESIDUO(C$7-1;$A12)=0;B8+1;B8);"")

En primer lugar verifica si aún quedan saltos por dar con **ESNUMERO($A12**). Después encuentra el residuo del número de arriba respecto al salto y hace avanzar el contador (B8) si ese número es múltiplo del salto. Así medimos el alejamiento del elemento que debemos tachar. Observa que van aumentando los valores cada tres (representan los tres supervivientes después de tachar)

Segunda: Aquí se eligen los números entre los de arriba, saltando los que ocupan un lugar múltiplo de 3. Después, con la función DESREF se dirigen a la celda adecuada para copiar el número:

=SI(ESNUMERO($A12);DESREF(C9;-2;C8);"")

DESREF se dirige a dos filas más arriba (-2) y salta según indica el valor de arriba (C8). Como esta contiene los saltos adecuados, cada vez que cambie su valor se tacha un número. Es lo que queríamos. No es fácil de entender y cuesta encontrar el procedimiento.

Tercera: Se limita a acumular sumas, y al llegar al nivel 1 produce las potencias deseadas.

Aunque esto no pasa de una curiosidad, la construcción del algoritmo es apasionante. Este que ofrecemos no usa macros, y lo puedes descargar en dos versiones desde

hojamat.es/blog/moessner.zip

EL PROBLEMA DE HAMMING

Reciben el nombre de números regulares o 5-lisos aquellos números naturales que son divisibles entre 2,3 y 5 y ningún otro factor primo. Presentan una factorización prima del tipo $2^n3^m5^p$. También puedes identificarlos como aquellos que son divisores de una potencia de 60 (¿por qué?)

Los tienes presentados en estas páginas

http://en.wikipedia.org/wiki/Regular_number

https://oeis.org/A051037

En esta última puedes consultar cuáles son

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48,…

Si se les añade el número 1 como primer elemento, forman la llamada sucesión de Hamming.

El mayor interés que presentan estos números es el estudio de la formación ordenada de la sucesión, formándola **a partir de los elementos ya descubiertos**. Esto último es importante, pues si no, bastaría con ir recorriendo los números naturales para quedarnos sólo con los del tipo $2^n3^m5^p$.

Los posibles algoritmos, como el de Dijkstra, se estudian frecuentemente en programación funcional, como puedes ver en esta página de José_A_Alonso.

Nosotros, como siempre en este blog, optaremos por un enfoque elemental, didáctico y ¡cómo no!, usando una hoja de cálculo.

Generación del siguiente número de Hamming

Una vez que tienes escritos los primeros números de la sucesión 1,2,3,4,5,6,8,…(veremos que en realidad sólo hay que escribir 1), para obtener el siguiente bastará multiplicar uno de ellos por 2,3 o 5, pero, ¿cuál? En la sucesión 1,2,3,4,5,6,8,… no me sirve multiplicar por 2 el número 3, porque me daría 6 que ya lo tengo. Sí me convendría multiplicar por 2 el 5, con lo que obtendría el 10, o al revés, multiplicar 5 por 2. Esto no tiene nada de sistemático, por lo que deberemos ordenarlo un poco:

Dada una sucesión de Hamming con varios elementos, para formar el siguiente nos basaremos en estos criterios:

(1) Multiplicamos por 2, 3 o 5 todos los elementos que ya tenemos, y nos quedamos con el resultado menor que aún no esté incorporado a la sucesión. En el caso del ejemplo, el 9.

(2) Para guiarnos en este proceso, escribimos todos los números del tipo 2H, 3H y 5H, (representando H los números de Hamming que ya tenemos) en tres columnas.

H	2H	3H	5H
1	2	3	5
2	4	6	10
3	6	9	15
4	8	12	20
5	10	15	25
6	12	18	30
8	16	24	40

(3) En cada columna señalamos aquel número que cumple que todos los de arriba no superan el número que ya tenemos (8) y él es el primero que sí lo sobrepasaría.

En la siguiente tabla los tienes señalados en este caso.

H	2H	3H	5H
1	2	3	5
2	4	6	**10**
3	6	**9**	15
4	8	12	20
5	**10**	15	25
6	12	18	30
8	16	24	40

(4) Por último, de los tres candidatos elegimos el menor, 9, y ese será el siguiente elemento de la sucesión de Hamming.

Reiteramos estas operaciones y los obtendremos todos de forma ordenada. Este procedimiento tiene la ventaja de que una vez elegido un número de la columna quedan desechados los anteriores, por lo que es posible mantener unos punteros que nos indiquen por dónde vamos.

El algoritmo con hoja de cálculo

Podemos traducirlo a hoja de cálculo. Lo hemos intentado sin usar macros, pero aparecían referencias circulares muy molestas, por lo que hemos acudido al uso de rutinas y botones. Se inicia el proceso con el botón Inicio, que escribe el primer término 1 y sus tres múltiplos 2,3 y 5.

	Inicio		Paso
Hamming			
1	2	3	5

Después, cada vez que pulsemos sobre el botón Paso se irán eligiendo los múltiplos adecuados desechando los anteriores y los iguales. En la imagen puedes ver el estado del proceso después de obtener el 9:

	Inicio		Paso
Hamming			
1			
2			10
3			15
4		12	20
5	10	15	25
6	12	18	30
8	16	24	40
9	18	27	45

Se han dejado en blanco los múltiplos usados. La hoja elige después el mínimo (sería 10), elimina sus iguales, lo incorpora a la lista, crea sus múltiplos y borra los innecesarios.

	Inicio		Paso
Hamming			
1			
2			
3			15
4		12	20
5		15	25
6	12	18	30
8	16	24	40
9	18	27	45
10	20	30	50

El cómo lo consigue lo podrás estudiar descargando la hoja en Excel desde http://hojamat.es/blog/hamming.xlsm

Estudio mediante funciones

Para ver si un número es regular o 5-liso bastaría con esta definición de función:

```
Public Function es_regular(n) As Boolean
Dim nn

nn = n
While nn = 2 * Int(nn / 2): nn = nn / 2: Wend
While nn = 3 * Int(nn / 3): nn = nn / 3: Wend
While nn = 5 * Int(nn / 5): nn = nn / 5: Wend
If nn = 1 Then es_regular = True Else es_regular = False
End Function
```

Observa cómo lo detecta: mientras el número sea par, lo va dividiendo entre 2, con lo que al final deja de serlo. Mientras sea múltiplo de 3 y de 5 también va dividiendo. Si el número es regular se agotarán todos los factores y quedará sólo un 1 y el valor de la función será VERDADERO. Si no es regular es porque o no se puede dividir entre 2,3 o 5, o al final del proceso queda un factor mayor que 1, y la función devuelve FALSO.

Con esta función puedes iniciar la sucesión de Hamming en el punto que desees. Basta ir recorriendo números y eligiendo los que sean regulares. También es muy sencillo usar la función ***proximo_regular***:

```
Public Function proximo_regular(n)
Dim p

p = n + 1
While Not es_regular(p): p = p + 1: Wend
proximo_regular = p
End Function
```

Con esta función puedes descubrir, por ejemplo, que el primer regular de siete cifras es 1012500.

ALGORITMO 196

En el blog “Espejo lúdico”, con fecha 9 de Diciembre de 2008, se ha publicado esta propuesta:

Si a un número se le suma su reverso (por ejemplo 75 + 57) y se hace lo mismo con el resultado, llega un momento en que el resultado es capicúa.

Por ejemplo

75 + 57 =132; 132 +231 = 363

Se llama así el algoritmo porque para el número 196, en el momento de escribir este texto, aún no se sabe si el proceso para en un capicúa concreto o se prolonga indefinidamente. Se han llegado a organizar búsquedas que han durado años.

El 196 es el primero de los llamados números de Lychrel, de los que aún no se sabe si producen una parada en el algoritmo. Los siguientes son 295, 394, 493, 592, …(http://oeis.org/A023108). Todos están cerca de un número terminado en cero.

Para un cierto número de dos cifras es necesario repetir este proceso más de 10 veces. ¿Cuál es ese número?

El algoritmo propuesto tiene fácil ejecución para quien sepa sumar, pero no es tan simple para una hoja de cálculo. Hay que tener en cuenta que los números se almacenan en formato binario y la hoja "no sabe" la cifras que tiene un número en el sistema de numeración decimal. Por tanto, si no definimos nuevas funciones, no podrá invertir las cifras de un número ni tampoco averiguar si es capicúa o no. Así que necesitamos:

Función INVERTIR_CIFRAS: Debe de actuar sobre un número e invertir el orden de todas sus cifras, devolviéndonos el resultado.

```
Public Function cifrainver(n)
Dim l, i
Dim c
Dim auxi$, auxi2$, ci$

  ' invierte el orden de las cifras para dar otro número

auxi = Right(nn$, Len(nn$) - 1)
auxi2$ = ""
l = Len(auxi)
For i = l To 1 Step -1
ci$ = Mid(auxi, i, 1)
auxi2 = auxi2 + ci$
Next i
c = Val(auxi2$)
cifrainver = c
End Function
```

Función ESCAPICUA: Debe averiguar si un número es capicúa o no y devolver VERDADERO o FALSO

```
Public Function escapicua(n) As Boolean
Dim l, i, k
Dim c As Boolean
Dim auxi$

auxi = Right(nn$, Len(nn$) - 1)
```

```
l = Len(auxi)
If l < 2 Then
escapicua = False
Else
c = True
i = 1
k = Int(l / 2)
While i <= k And c
  If Mid(auxi, i, 1) <> Mid(auxi, l - i + 1, 1) Then c =
False
  i = i + 1
  Wend
End If
escapicua = c
End Function
```

Os invitamos a usar el algoritmo para averiguar (para números no muy grandes) cuántos pasos son necesarios hasta que un número desemboque en un capicúa sumando de forma reiterada su reverso.

Jugando un poco con este algoritmo se pueden descubrir hechos interesantes.

Llamaré meta al capicúa en el que termina un algoritmo aplicado a un número (semilla) y ruta al conjunto de números que se recorren hasta llegar desde la semilla hasta la meta.

Metas capicúas de dos cifras: Es evidente que los números semilla que desembocan en el mismo capicúa tienen todos la misma suma de cifras y esta es menor que 10. Por ejemplo, 70, 61, 52, 43, 34, 25, 16, 7 desembocan en 77=11*(a+b) con a+b<10

Llegan a 121 los de dos cifras que sumen 10 u 11 y alguno más de tres cifras ¿cuál? Y a 363 los de suma 12 y alguno más de tres cifras, con expresión N=11*(a+b) en el que se cumple a+b>10=11(10m+n)=110m+11n

Metas de tres cifras: Se puede demostrar que sólo son metas los capicúas en los que la cifra del centro es par, como 343, 929, 787,…y por tanto no lo son 232, 878 o 171. Intenta demostrarlo, que no es complicado.

Metas de cuatro cifras: Han de ser múltiplos de 11. ¿Por qué?

Números ilustres: Los números 495 y 1089, están ambos en la misma ruta que desemboca en el 79497. Además, tienen como meta el 1089 los múltiplos de 198 de tres cifras.

Otra curiosidad: Los 10 primeros múltiplos de 1089 llegan todos hasta el 79497.

Si no recuerdas el porqué de que les llame “ilustres” al 495 y al 1089, consulta esta dirección:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/propuestas/proparit.htm

Ahí te enterarás que 495 es la constante de Kaprekar para tres cifras. Si elegimos como semilla la constante para cuatro cifras 6174, también tiene como meta 79497, lo que nos confirma que ambos algoritmos están relacionados. Es curioso que 6174+4716 = 10890 = 1089+9801.

CONJUNTOS IDÉNTICOS

En algunas cuestiones resulta útil decidir de forma automática si dos conjuntos son idénticos o no. Por ejemplo, en las tablas de multiplicar de los cuerpos finitos, como Z/Z7, es interesante descubrir si

(a) No existen elementos repetidos en ninguna fila o columna

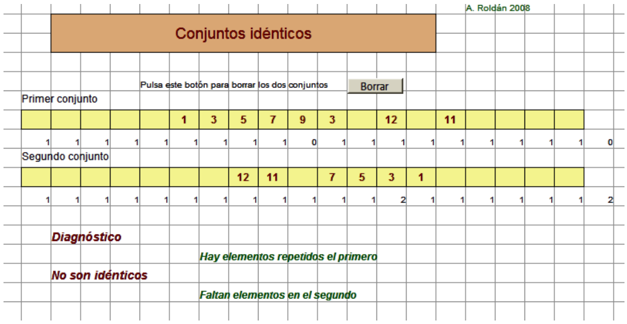
(b) Los elementos de las distintas filas son los mismos.

Si escribimos los dos conjuntos en una hoja de cálculo, en filas paralelas, deberemos comprobar cuatro hechos para decidir si los conjuntos son idénticos o no:

1. No existen elementos repetidos en el primer conjunto
2. Tampoco se repiten los del segundo
3. Todo elemento del primero ha de pertenecer al segundo
4. Todo elemento del segundo ha de pertenecer al primero.

Las cuatro cuestiones las resuelve la función CONTAR.SI. Recorremos todo el primer conjunto y mediante esta función contamos las veces que figuran en el segundo. Si esos valores son mayores que 1, es que existen repetidos en el segundo conjunto, y si es 0, es que falta alguno. Lo deseable, pues, es que todos los contadores presenten el valor 1.

Procedemos de la misma forma, contando las veces que los elementos del segundo conjunto figuran en el primero, y también han de valer 1. Para evitar problemas en las siguientes operaciones que explicaremos, a las celdas vacías también se le debe asignar un 1.



¿Cómo resumimos la situación? Multiplicamos todos los contadores del primer conjunto, y nos ha de resultar la unidad. Ocurrirá lo mismo con el producto de los del segundo, por lo que si multiplicamos ambos productos, obtendremos un criterio para decidir si los dos conjuntos son idénticos: el que el producto final tenga el valor de 1.

ALGORITMOS AYUDADOS

En un comentario publicado en nuestro blog,
Claudio (http://simplementenumeros.blogspot.com/)
nos proponía lo siguiente:

Te envío un problema que mandó Rodolfo Kurchan a la lista de Snark:

Este simpático acertijo me lo envió Michael Reid de EEUU: Colocar los dígitos 0, 1,..., 9, sin repetir en la

expresión a^b + c^d + e^f + g^h + i^j para obtener el año actual.

Pensé en aplicar esta idea al 2010. Como estábamos en días navideños, no me apetecía pensarlo mucho. Por otra parte, si intentaba un algoritmo sin preparación, me podía encontrar con 10^10 pasos, lo que era demasiado para cualquier hoja de cálculo.

Así que pensé en ayudar un poco al algoritmo, para ver si entre la máquina y yo lo encontrábamos sin gran esfuerzo. La primera idea fue la de un algoritmo voraz, pero también había que diseñar bastante, y mi cabeza estaba con los villancicos.

Después de cavilar se me ocurrió elaborar una lista de potencias desde 0^0 hasta 9^9 eliminando las mayores de 2010 y casi todas las triviales: 1^3, 1^4,...0^8…La lista estaba compuesta por 1296,1024, 729, 625, 512,…5, 4, 3, 2, 1, 0 (29 en total)

De esta forma, el algoritmo podía traducirse a "Descomponer 2010 en sumandos tomados de una lista". Aún así, los cálculos tardaban demasiado (29^5 pasos) y los compromisos sociales me esperaban. Lo dejé para otro día.

Reanudada la tarea, impuse la condición de que los sumandos fueran no crecientes, lo que simplificaba la búsqueda, y como 2010/5 = 402 debería haber algún sumando superior a esa cantidad. De esta forma puede seguir recortando pasos.

Al final obtuve una lista de sumandos que comenzaba con

1296	625	81	8	0
1296	625	81	7	1
1296	625	81	6	2

y terminaba con

625	625	625	128	7
625	625	512	243	5
625	625	512	216	32

Ya tenía algo con lo que trabajar. Añadí a cada sumando los dígitos que lo formaban como una potencia:

1296	6 y 4	625	5 y 4	81	9 y 2 3 y 4	8	8 y 1 2 y 3	0

1296	6 y 4	625	5 y 4	81	9 y 2 3 y 4	7	7 y 1	1
1296	6 y 4	625	5 y 4	81	9 y 2 3 y 4	6	6 y 1	2

Ya sólo quedaba elegir las posibilidades en las que no se repitieran los dígitos. Encontré cuatro:

4^5+2^8+9^3+1^7+0^6=2010
4^5+2^8+9^3+1^6+0^7=2010
4^5+2^8+3^6+1^8+0^7=2010
4^5+2^8+3^6+1^7+0^9=2010

De esta forma la hoja de cálculo aportó una base para soslayar mi pereza mental, y yo le ayudé con mi sentido común.

SUMA DE TRES NÚMEROS TRIANGULARES

En 1796, Gauss descubrió que todo entero positivo puede representarse como la suma de tres números triangulares (o menos). Estos pueden ser iguales, y si consideráramos el 0 como triangular, podríamos afirmar que todo número natural es suma exactamente de tres triangulares.

Un ejercicio interesante es el de descubrir un algoritmo que los encuentre. Para hacerlo más formativo podemos basarnos en dos funciones, una para descubrir si un número es triangular y otra que nos devuelve el mayor triangular mayor o igual que un número dado.

Función estriangular

Si un número N es triangular verificará igualdad N=x(x+1)/2, con x y N ambos enteros, lo que obliga a que 8*N+1 sea cuadrado perfecto ¿por qué? Esto nos lleva a este código:

```
Public function estriangular(n) as boolean
dim a
a = Int(sqr(8*n+1))
if a*a=8*n+1 then estriangular = true else
estriangular = false
end function
```

Función mayortriang

Para encontrar el mayor triangular contenido en un número N bastará resolver la ecuación N=x(x+1)/2 truncando el resultado a un número entero. Así que quedará:

Public Function mayortriang(n)
dim a
a = Int((sqr(8*n+1)-1)/2)
mayortriang=a*(a+1)/2
end function

Con esto ya tenemos preparado un algoritmo para OpenOffice.org Calc (fácilmente adaptable a Excel) que encuentre todas las descomposiciones en tres triangulares (incluido el cero):

Sub sumatriangulares
Dim i,j,k
dim a,b
i=StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(3,3).value
(se supone que el número se escribe en la celda D4)
a=mayortriang(i)
for j=0 to a (se recorren los valores posibles del primer sumando)
if estriangular(j) then
b=mayortriang(i-j)
for k=j to b (se recorren los valores posibles del segundo sumando)
if estriangular(k) then

if estriangular(i-j-k) and i-j-k>=k then (el tercer sumando ha de ser triangular)
msgbox(j) (se presenta el resultado)
msgbox(k)
msgbox(i-j-k)
end if
end if
next k
end if
next j
End Sub

Pues ánimo y a implementarlo. Puedes añadir una variable que cuente todas las formas de descomposición que tiene un número. Por ejemplo, entre los de tres cifras hay uno que admite 24 sumas distintas de triangulares ¿Cuál?

Otras codificaciones

En PARI

isinteger(n)=(n==truncate(n))

```
isquare(n)= { local(f,m,p=0); if(n==1,p=1,f=factor(n);
m=gcd(f[, 2]); if(isinteger(m/2),p=1));return(p) }
istriang(n)=isquare(8*n+1)
{n=95;for(i=0,n,if(istriang(i),for(j=i,n,if(istriang(j),for(
k=j,n,if(istriang(k)&&i+j+k==n,print(i," ",j," ",k)))))))}
```

En primer lugar se definen ***isinteger***, para ver si un número es entero, ***isquare***, para cuadrado e ***istriang*** para triangular.

Después se recorren ciclos para encontrar tres sumandos triangulares crecientes en sentido amplio. Si se cambia el valor 95 por otro número, dispondremos de un algoritmo que resuelve el problema para ese número.

En WxMAXIMA

```
m:92$
esent(x):=if x=floor(x) then true else false;
escuad(x):=(y:sqrt(x),if esent(y) then true else false);
estriang(x):=if escuad(8*x+1) then true else false;
for i:0 thru m do
(
if estriang(i) then for j:i thru m do
```

```
    (if estriang(j) then for k:j thru m do
        (if estriang(k) and i+j+k=m then display(i,j,k)
        )
    )
)$
```

Como en el anterior, se definen las funciones previamente y después se construyen tres bucles. El número se escribe en la primera línea.

FACTORIZACIÓN DE FERMAT

Algoritmo a paso de tortuga

La factorización de Fermat siempre se ha presentado como una técnica para representar un número impar como producto de dos de sus factores **sin usar la lista de números primos**. No es el único algoritmo de factorización con esa propiedad. Si extraemos progresivamente el factor más pequeño (mayor que 1) de N aseguraremos que hemos encontrado un número primo sin tener que memorizar la lista de primos

En efecto, la factorización de Fermat no se basa en los factores primos, sino en representar un número impar N como una diferencia de dos cuadrados y después expresar la misma como el producto de una suma por una diferencia, con lo que se logra la factorización:

$N=y^2-x^2=(x+y)(y-x),\ y>x$

En el caso impar esta operación siempre es posible, porque $N=(N+1)^2/4-(N-1)^2/4$, que da lugar a la factorización N=N.1

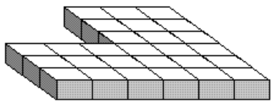
Desde el punto de vista algorítmico, la búsqueda de los valores de x e y adecuados presenta también otra originalidad, y es que se puede organizar de forma bastante eficiente sólo con sumas y comparaciones. En realidad, todos los algoritmos se pueden organizar así, y en caso último mediante la máquina de Turing, pero tampoco hay que llegar tan lejos, y con tantas operaciones se lentifica mucho el proceso. En el caso de la factorización de Fermat se logran resultados bastante aceptables. Es una tortuga, pero algo veloz.

La creación del algoritmo se basa en estos hechos que te pedimos intentes justificar:

(1) El valor de **y**, y por tanto el de **x**, están acotados, y su cota no está excesivamente alejada de n ¿Cuál es y cómo se demuestra?

(2) Para demostrar que un número es cuadrado perfecto, no es necesario dividir ni extraer la raíz cuadrada ¿Cómo se hace?

(3) En realidad, la factorización de Fermat consiste en darle al número impar la figura de escuadra simétrica (gnomon) de varias formas posibles. Observando la imagen puedes resolver las dos primeras cuestiones.



(4) Podemos encontrar la raíz cuadrada entera de un número haciendo crecer de forma simultánea dos sucesiones, una linealmente y otra de forma cuadrática. Esto parece obvio, pero ¿cómo se organiza?

Podemos representar el algoritmo como una carrera, liebre y tortuga, entre $a=x^2$ y $b=y^2$, en la que la tortuga sale con ventaja porque se suma al número N, ya ha de ser $y^2=x^2+N$. Todo esto suena a metáfora, pero funciona.

Daremos a continuación un desarrollo en el que se ocultarán algunos detalles para hacer pensar un poco a quien lo siga.

Obtención de un primer valor de $a=y^2$

Tomamos tres variables, y, a, i

Las iniciamos a

y=1; a=1; i=1

Mientras a no sobrepase a N hacemos crecer estas variables así:

y=y+1; i=i+2; a=a+i

con lo que lograremos el primer cuadrado que es mayor o igual que N

Sólo hemos usado sumas y una comparación. Razona por qué se da este resultado.

Obtención de valores adecuados de $a=y^2$ y de $b=x^2$

Una vez obtenido y^2 iniciamos el crecimiento de la misma forma para x^2

x=1; b=1; j=1

Mientras N+b no sobrepase a y^2, hacemos crecer las variables:

x=x+1; j=j+2; b=b+j

para formar el cuadrado x^2

Si ocurre que N+b=a hemos conseguido una factorización, pues $N=y^2-x^2$

Obtenemos todas las coincidencias

Ya sólo queda hacer crecer **a** y **b** de la misma forma y comprobar si se da la igualdad N+b=a en más ocasiones, y así hasta la cota.

No hemos querido usar el lenguaje algorítmico, y se han ocultado algunos detalles, como qué hacer si N es un cuadrado perfecto. Lo importante de lo explicado es que sólo hemos sumado y comparado. No se ha recurrido a multiplicar, dividir o extraer la raíz cuadrada.

Puedes estudiar más a fondo el algoritmo en el Anexo. Si recorres el código de la macro usada, sólo verás operaciones de sumar. El proceso no es un prodigio de velocidad, pero esto es un divertimiento. La idea de hoy no era correr, sino demostrar una posibilidad. Tampoco corrió Fermat y hay que ver lo que logró.

REPRODUCIR RESULTADOS

Somos muchos en el mundo. Estudiamos en una Facultad de Matemáticas, llevamos años y años enseñándolas, seguimos estudiando distintos temas y leyendo libros de divulgación, entretenimientos o curiosidades, pero nunca hemos publicado un resultado matemático apreciable. Sólo nos queda disfrutar con desarrollos ajenos, resolver placenteramente problemas de más o menos dificultad y… reproducir resultados.

Lo de obtener lo que ya han descubierto otros puede ser formativo y entretenido si lo intentamos con herramientas distintas a las del primero que lo logró. En este blog usamos las hojas de cálculo, lo que nos exige la construcción de tablas en las que se llevan al límite las posibilidades de las funciones que traen implementadas, o bien, que es una tarea más apasionante, implementar algoritmos adecuados mediante macros.

Proponemos una reproducción:

He leído por ahí, en la Wikipedia, Wolfram Mathworld o una página similar, que el número 2011 es estrictamente no palindrómico. Se llaman así los números N que no son palindrómicos (capicúas) para bases comprendidas entre 2 y N-2. No se consideran bases mayores porque todos los números se expresan en ellas como capicúas (se admite que lo son los de una cifra) para bases mayores que N-2. ¿Sabrías razonarlo?

Alguien se ha tomado la molestia de ir probando el 2011, imagino que de forma automática, para todas las bases comprendidas entre 2 y 2010.

¿Puedes reproducir ese resultado con hoja de cálculo?

Para averiguar si un número es estrictamente no palindrómico necesitaremos una función que nos diga si es palindrómico o no en una base dada, y después recorrer todas las bases entre 2 y N-2 para descubrir si hay o no resultados negativos.

Diseñaremos la función ESCAPICUA(n,b), donde n será el número a probar y b la base del sistema de numeración. Esta función nos devolverá un 1 si el número es palindrómico y 0 si no lo es. Usamos 1 y 0 porque son más cómodos que True y False.

Necesitaremos organizar dos fases de cálculo

a) Extracción de las cifras de n en base b y almacenamiento de las mismas en una matriz c

b) Emparejamiento de las cifras de forma simétrica para averiguar si son todas iguales por parejas (caso palindrómico) o bien existe una que no es igual a su simétrica.

Primera fase: extracción de las cifras

Usaremos un algoritmo voraz, en el que **n** va disminuyendo de valor, con lo que la velocidad se acelera. Dividimos en cada paso n entre b, quedando el cociente como nuevo valor de n y el resto como cifra nueva. Cuando el cociente sea cero, paramos.

Puedes estudiarlo en Basic

En el listado hemos copiado n en m para preservar su valor

' extraer cifras
nopara=true Esta variable determina si se para o no el proceso
nc=0 Contador de cifras
while nopara
q=int(m/b):r=m-q*b Se halla el cociente y el resto de m entre la base
if q=0 then nopara=false Si el cociente es cero, se para
nc=nc+1:c(nc)=r:m=q Se incrementa el contador de cifras y se almacena la nueva
wend

Segunda fase: Comparación entre cifras

Una vez almacenadas las cifras, si sólo hay una, se declara el número como palindrómico. En caso contrario, si se detecta una desigualdad entre cifras simétricas, se declara como no palindrómico.

En Basic

esca=1 Admitimos que es capicúa
if nc>1 then Si hay más de una cifra, analizamos
for q=1 to int(nc/2)
if c(q)<>c(nc-q+1) then esca=0 En caso de desigualdad, no es capicúa
next q
escapicua=esca
end if

Si deseas implementar esta función en tu hoja de cálculo, copia el código completo:

Public function escapicua(n,b)
dim c(50)
dim m,q,r,nc,esca
dim nopara as boolean
m=n
' extraer cifras

```
nopara=true
nc=0
while nopara
q=int(m/b):r=m-q*b
if q=0 then nopara=false
nc=nc+1:c(nc)=r:m=q
wend
esca=1
if nc>1 then
for q=1 to int(nc/2)
if c(q)<>c(nc-q+1) then esca=0
next q
escapicua=esca
end if
end function
```

Con esta función se puede rellenar una columna que actúe sobre las bases comprendidas entre 2 y N-2. Por ejemplo, en la imagen puedes comprobar que el número 19 es estrictamente no palindrómico:

¿Es N palindrómico?

Escribe el número 19

Base	Es capicúa
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0

Los primeros números estrictamente no palindrómicos son:

1, 2, 3, 4, 6, 11, 19, 47, 53, 79, 103… (http://oeis.org/A016038) En esta página de OEIS descubrirás que **son todos primos a partir del 6**. La justificación de esto proviene de que a*b=a(b-1)+a siendo a<b, lo que lo convierte en palindrómico en base b-1 (se expresa como 11). En el caso del cuadrado $a*a=(a-1)^2+2(a-1)+1$, lo que lo convierte en palindrómico en base a-1, expresado como 121. Luego los compuestos serán paindrómicos en ciertas bases. Puedes leer más detalles en la dirección citada.

Hemos aplicado la prueba a 2011 y, efectivamente, no es palindrómico para ninguna base comprendida entre 2 y 2010.

Con ello hemos reproducido un resultado, con la consiguiente diversión e incremento de nuestra confianza en la comunidad matemática.

Si te atreves, codifica una función ESTRICTCAP, que decida si un número es estrictamente no palindrómico. Bastará programar en Basic lo que en la imagen hemos efectuado con columnas.

APRENDER COMPROBANDO

Tanto Internet como los libros de divulgación matemática están llenos de listas de números que se caracterizan por ser los únicos que cumplen algún requisito.

La página http://oeis.org/A084687 nos presenta la siguiente lista como la de los números enteros positivos que son múltiplos de los números formados por sus mismas cifras ordenadas en orden creciente:

9513, 81816, 93513, 94143, 95193, 816816, 888216, 933513, 934143, 935193, 941493, 951993, 2491578, 8166816, 8868216, 9333513, 9334143, 9335193, 9341493, 9351993, 9414993, 9519993, 24915798, 49827156, 81666816, 87127446, 88668216, 93333513

Este requisito ha de cumplirse en sentido estricto:

- No pueden contener cifras nulas.
- No pueden poseer ellos mismos las cifras ya ordenadas.

El primer ejemplo de la lista es el número 9513, que no contiene cifras nulas y es múltiplo de 1359, formado por las cifras 9, 5, 1 y 3 ordenadas de forma creciente.

Los cocientes que se forman son “casi todos” iguales a 7. Investiga este hecho si quieres.

Un ejercicio muy formativo es el de obtener esa misma lista con nuestros propios instrumentos, que aquí será la hoja de cálculo. Para ello debemos organizar muy bien el proceso, y en esta tarea aprenderemos de Matemáticas y de programación mucho más de lo que nos creemos.

Presentamos una organización del proceso de obtención de la lista presentada, aunque sería deseable que nuestros lectores no siguieran leyendo y pasaran a su propia organización. Así también ellos, como nosotros, aprenderían probando.

Un posible esquema sería el siguiente:

Obtención de la lista de números

- *Se recorren todos los números A desde un inicio hasta un número final.*
- *Para cada uno se realizan estas operaciones:*
- *Calcular el número de cifras de A*
- *Extraer todas las cifras de A. Si alguna es cero se rechaza el número.*
- *Ordenar las cifras*
- *Formar con esas cifras un nuevo número B*
- *Si A=B se rechaza el número.*

- *Si A es múltiplo de B se incorpora A a la lista.*
- *Se pasa al siguiente número*

Si te interesa la programación en Basic, puedes estudiar el siguiente código comentado para OpenOffice.org Calc:

Funciones auxiliares

Para saber si m es múltiplo de n. Devuelve 1 si lo es, y 0 si no lo es

```
Public function esmultiplo(m,n)
if m=int(m/n)*n then esmultiplo=1 else esmultiplo=0
end function
```

Para contar el número de cifras

```
Public function numcifras(n)
numcifras=int(log(n)/log(10))+1
end function
```

Extrae la cifra de orden n de un número m

```
Public function cifra(m,n)
dim a,b
a=10^(n-1)
b=int(m/a)-10*int(m/a/10)
```

cifra=b
end function

Algoritmo de búsqueda

Sub busquedas
dim n,m,i,j,k,l,a,b,fila,p,q
dim ci(12) ‘Lee el inicio (celda G7) y el final (celda H7)
n=StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(6,6).value
m=StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(7,6).value
fila=8 ‘Recorre los numeros
for i=n to m

‘Extrae cifras y las ordena
‘Extrae cifras

k=numcifras(i)
for l=1 to k
ci(l)=cifra(i,l):if ci(l)=0 then exit sub 'no se admiten cifras nulas
next l

‘Las ordena

if k>=1 then

for j=1 to k-1
for p=2 to k
if ci(p-1)<ci(p) then b=ci(p-1):ci(p-1)=ci(p):ci(p)=b
next p
next j
end if

'Construye el número con cifras ordenadas

q=0
for j=1 to k
q=q+ci(j)*10^(j-1)
next j

'si es múltiplo, lo presenta en columna

if esmultiplo(i,q)=1 and i<>q then
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(6,fila).value=i
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(7,fila).value=q
fila=fila+1
end if
next i

end sub

Ánimo y a estudiarlo, que contiene bastante información valiosa.

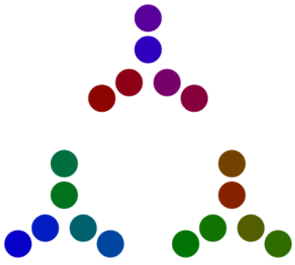
UNA HUMILDE IMITACIÓN

Desde hace unas semanas circula por la red un atractivo vídeo en el que se visualiza la factorización de los números como conjuntos de puntos en forma de árboles poligonales circulares muy cercanos a los conjuntos fractales

http://miscuriosidadesmatematicas.blogspot.com.es/2012/11/diagrama-animado-sobre-factorizacion-de.html

http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

http://mathlesstraveled.com/2012/10/05/factorization-diagrams/



En la imagen se puede ver el desarrollo para el número 18, en el que los niveles están definidos por los factores 3, 3 y 2.

Como en este blog no nos salimos de los números y de la hoja de cálculo nos planteamos un reto:

¿Hasta dónde podíamos imitar estos esquemas usando tan sólo la programación de una hoja de cálculo?

Es evidente que el resultado obtenido ha de ser muy inferior al original, y que el interés de esta tarea está en la adaptación a una herramienta menos potente. Por tanto, quien no esté interesado en esta programación es mejor que disfrute del vídeo original sin embarcarse en el proceso que aquí hemos seguido.

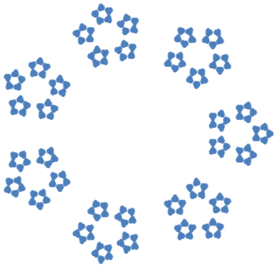
El resultado lo tienes en
http://hojamat.es/blog/arbofactor.xlsm

Ideas previas

Para imitar lejanamente el vídeo necesitaremos concretar aspectos del problema en sí mismo (representar cada factor como un polígono) y después superar las carencias de la hoja de cálculo (en esta ocasión, dado el distinto comportamiento de las mismas en los gráficos, lo hemos desarrollado sólo en Excel)

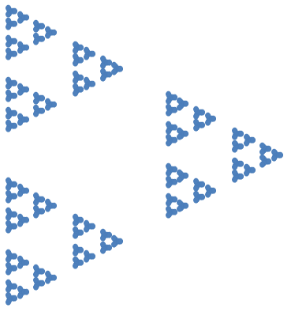
El gráfico

La única posibilidad que nos ofrece Excel para estas representaciones es el gráfico de dispersión. Tiene la ventaja de no depender del orden de los datos y adaptarse muy bien al uso de coordenadas cartesianas (X,Y). También permite dejar la zona en blanco y ocultar los ejes. Por contra, presenta gran dificultad en cambiar el tamaño de los distintos puntos según el número de factores. Todos los esquemas, pues, presentarán el mismo tamaño en los puntos



Aquí puedes ver el esquema para 1050. Se puede observar que los últimos triángulos de puntos parecen confundirse, por no haber controlado el tamaño.

Salvo este inconveniente, las figuras resultan atractivas. Las hemos orientado circularmente en lugar de buscar siempre la vertical. En la siguiente imagen puedes observar la estructura casi fractal que presentan los números que como el 486 contienen potencias altas de primos.



Lo único que hay que explicar del gráfico es que su área de datos está formada por las columnas B y C en las que volcaremos las coordenadas adecuadas.

El algoritmo

Sacar los primos

Necesitamos, en primer lugar, la lista de factores primos del número, con repetición y en orden decreciente. Hemos aludido bastante en este blog a estas técnicas, por lo que a nuestros seguidores les resultará familiar. Normalmente se comienzan a buscar los factores pequeños, pero en este trabajo, por razones estéticas, se comienza por los mayores. Por eso al final de la rutina se invierte el orden.

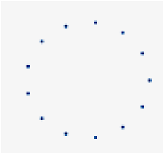
```
Sub sacaprimos(n)
Dim f, a, indi

a = n
f = 2: nprimos = 0
indi = 0

While f * f <= a
While a / f = Int(a / f)
  indi = indi + 1
 ff(indi) = f  'La variable ff va recogiendo los primos
a = a / f
Wend

If f = 2 Then f = 3 Else f = f + 2
Wend
If a > 1 Then  'Último factor
indi = indi + 1
ff(indi) = a
End If

' se ordenan al revés

nprimos = indi
For indi = 1 To nprimos
xx(indi) = ff(nprimos - indi + 1)
```

Next indi
For indi = 1 To nprimos
ff(indi) = xx(indi)
Next indi
End Sub

Después de esta rutina tendremos el número de factores primos en la variable **nprimos** y sus valores en **ff(i)**. En este caso no nos interesan los exponentes.

Recorrido en cada factor

Una vez obtenidos los factores primos necesitamos convertirlos en polígonos. Para cada uno harán falta las coordenadas del centro (xx(i),yy(i)), su radio rr(i) y un contador de puntos ii(i) que nos evite el problema de los decimales al final de cada polígono. En cada paso incrementaremos el ángulo de giro necesario para que se forme el polígono y el contador de lados



En la imagen hemos comenzado con ff(1)=13, por lo que los elementos se incrementarán así:

ii(i) = ii(i) + 1
aa(i) = aa(i) + dospi / 13

Marcado el ángulo que va girando el punto pasamos de coordenadas polares a cartesianas y volcamos el punto en la columnas B y C, donde lo capturará el gráfico y aparecerá un punto nuevo.

```
fila = fila + 1
px = xx(i) + rr(i) * Cos(aa(i))
py = yy(i) + rr(i) * Sin(aa(i))
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 2).Value = px
ActiveWorkbook.Sheets(1).Cells(fila, 3).Value = py
```

Esto se repite tantas veces como indique el factor y se formará el polígono básico

Algoritmo de cambio de nivel

Aquí reside el nudo de esta programación. Es un caso claro de procedimiento recursivo, pero como hay que gestionar bastantes parámetros lo hemos dejado para una posible extensión y se ha usado en su lugar un esquema muy sencillo que ya se ha publicado en este blog: la subida y bajada de nivel.

Procedimientos iniciales: definir primer radio, sacar los primos…

Mientras haya un nivel activo (nivel>0)

Incrementamos el ángulo y el contador para avanzar en el polígono
Si se llega al final del polígono
Hemos terminado y bajamos de nivel (nivel=nivel-1)
En caso contrario pueden ocurrir dos cosas:

Si hemos llegado al último factor hay que imprimir el punto volcándolo en las columnas B y C

Si no hemos llegado hay que subir de nivel(nivel=nivel+1)

Esto significa que hay que determinar nuevos centro y radio

Fin del Mientras

Fin de la rutina

No incluimos el código y preferimos que las personas interesadas lo estudien en el archivo de Excel.

Animación

Para conseguir la animación basta con una estructura repetitiva tipo FOR-NEXT y la creación de pausas para conseguir el efecto de transición continua. El problema radica en que cualquier operación aparentemente sencilla puede borrar el gráfico y perderse su persistencia en nuestra retina. Hemos tenido que acudir al recálculo para refrescarlo y que no desaparezca.

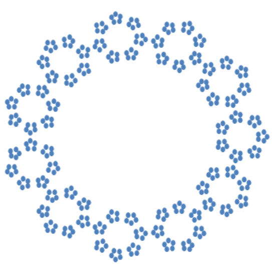
La pausa se consigue leyendo el reloj e introduciendo a la hoja en un bucle continuo hasta que transcurra la pausa. Queda así:

Call arbol ‘se construye el árbol de factores
t1 = Timer ‘ leemos el reloj y tomamos nota en t1 y t2
t2 = t1
While t2 - t1 < pausa: t2 = Timer: Calculate: Wend ‘bucle continuo de recálculo
Call borrar ’terminada la pausa se borra el gráfico

Controles

Nos gusta tener todo el poder posible sobre la hoja de cálculo. Por eso se han añadido los controles de **Reducción**, que se puede cambiar (no en la animación) para mejorar la estética del gráfico y **Pausa**, que ralentiza o acelera la animación.

A quienes hayan llegado hasta aquí les recomendamos el estudio de los detalles del código y les invitamos a intentar mejorarlo.



ALGORITMO DE EUCLIDES BINARIO

En este blog nos motiva mucho el construir un esquema en hoja de cálculo que explique de la mejor forma posible el funcionamiento de un proceso o un algoritmo. Lo haremos hoy con la variante binaria del Algoritmo de Euclides.

Restar en lugar de dividir

Ya se sabe que el algoritmo de Euclides por divisiones se puede sustituir por otro efectuado a base de restar los dos números. Parece más lento, pero al ahorrar divisiones puede resultar más eficiente. Hace sesenta años lo usábamos los alumnos de Bachillerato (con once añitos) para comprobar si dos segmentos eran inconmensurables o no. Llevábamos uno sobre otro y nos quedábamos con la diferencia. Si al reiterar llegábamos al segmento nulo, es que tenían una medida común. Aquello era Geometría de Euclides pura.

Si el algoritmo clásico se organizaba a partir de la división euclídea, en esta variante se usa la resta. Así, para encontrar MCD(96,36) por divisiones sería: 96=2*36+24; 36=1*24+12; 24=2*12+0, luego el

MCD(96,36)=12. Por restas formaríamos estas parejas: (96,36), (60,36), (36,24), (24,12), (12,12), (12,0), llegando al mismo resultado.

Eliminar el factor 2 siempre que se pueda.

Ya sabemos que en computación con sistema de numeración binario la división y la multiplicación por 2 se reducen a trasladar un lugar a la derecha o izquierda del dígito que se multiplica. Por eso, es interesante dar protagonismo al número 2 en los cálculos. Una primera idea es que si expresamos los dos números A y B de la forma $A=2^m*p$, $B=2^n*q$, con p y q los mayores divisores impares, el M.C.D se puede encontrar con dos cálculos por separado. Por una parte quedándonos con el menor exponente del 2 y por otra hallando MCD(p,q).

En el algoritmo que estamos presentando, se elimina en primer lugar la potencia de 2 común a ambos números, y se toma nota de ella. Una vez eliminada, el factor 2 no va a influir en el resultado, y cuando aparezca en alguno de los dos números se podrá igualmente suprimir. En términos binarios suprimir un 2 es trasladar los dígitos una posición hacia la derecha.

En Wikipedia y otras páginas que hemos consultado expresan lo anterior en forma de tres reglas.

http://en.wikipedia.org/wiki/Binary_GCD_algorithm. No son difíciles de razonar.

(1) Si A y B son ambos pares se cumple MCD(A,B)=2*MCD(A/2,B/2)

Esto justifica que el primer paso que demos sea el de separar las potencias de 2.

(2) Si A es par y B impar se tiene
MCD(A;B)=MCD(A/2,B)

Igualmente se aplicaría si B es par y A impar. En virtud de esta regla eliminaremos todos los factores 2 una vez que se ha separado la potencia común.

(3) Si ambos A y B son impares y A<B,
MCD(A,B)=MCD(B-A,A). Si es B<A,
MCD(A,B)=MCD(A-B,B)

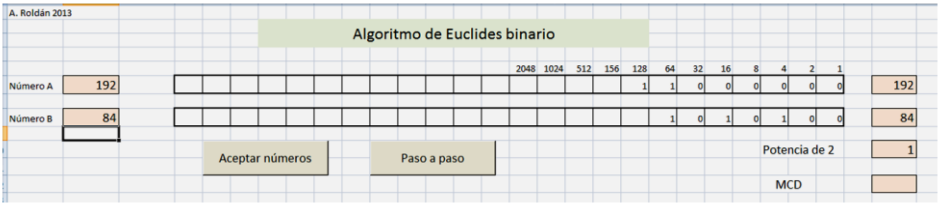
Esta es la esencia del algoritmo de Euclides, restar ambos números.

Eliminar la potencia de 2 común (Regla 1)

Hemos creado una demo en hoja de cálculo para seguir visualmente los pasos del algoritmo binario. Lo puedes descargar desde la dirección

http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm#euclibin

Como nuestro objetivo es visual, desarrollaremos ahora los pasos sugeridos pero en forma de esquema. En una hoja de cálculo se escribirán los dos números y con un botón iterativo se irán avanzando pasos hasta llegar al

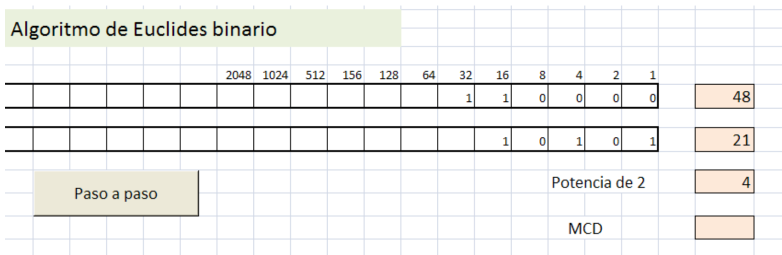


MCD. Esta primera fase de eliminar el factor común lo puedes ver en las imágenes siguientes:

En primer lugar hemos escrito los números 192 y 84. Al pulsar sobre el botón ***Aceptar números*** se han convertido ambos en binario y se han reconstruido a la derecha. La potencia de 2 común figura al principio con el valor 1.

Observamos que ambos números terminan en dos ceros (en binario), luego compartirán el factor $2^2=4$.

Según estamos explicando, el primer paso del algoritmo binario es eliminar el factor 2 común. Si ahora usamos el botón ***Paso a paso*** dos veces veremos que los dígitos de ambos números se mueven dos posiciones a la derecha y que la potencia de 2 se convierte en 4.



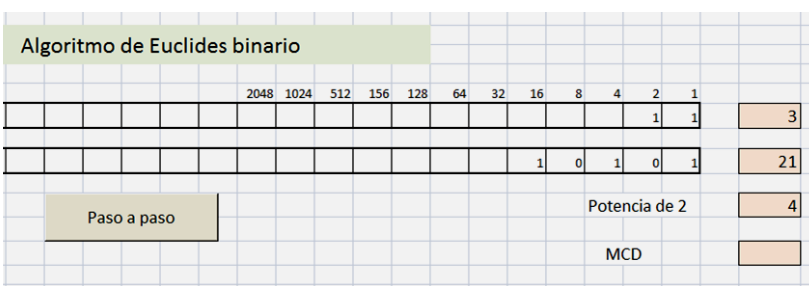
A la derecha figuran los números ya simplificados, 48 y 21, y la potencia de 2, que nos servirá al final.

Resto de pasos

Ahora la estrategia es triple:

(1) Si el primer número contiene aún potencias de 2, se eliminan (Regla 2)

Observa que en nuestro ejemplo el número 48 termina en cuatro ceros, luego al cabo de cuatro toques del botón ***Paso a paso*** desaparecerán.



(2) Se opera igual con el segundo: se le elimina el factor 2 (Regla 2)

En nuestro ejemplo ya no quedan factores 2 (por ahora)

(3) Si ambos son impares, se sustituye el mayor de ellos por la diferencia entre ambos.

Este es el núcleo del algoritmo de Euclides por diferencias. En la práctica quizás haya que intercambiar los valores de A y B, pero no entraremos en esos detalles.

Al restar dos impares se **producirán nuevos factores 2**, por lo que en la siguiente pasada del algoritmo los eliminará. Lo ves en las siguientes dos imágenes:

512	156	128	64	32	16	8	4	2	1	
								1	1	3
					1	0	0	1	0	18
							Potencia de 2			4
							MCD			

512	156	128	64	32	16	8	4	2	1	
								1	1	3
						1	0	0	1	9
							Potencia de 2			4
							MCD			

Reiteramos estas tres reglas hasta que lleguemos al valor 0. En ese momento el algoritmo construye el M.C.D. multiplicando el resultado por la potencia de 2 que tenía almacenada.

Aquí lo tienes:

Visto así, en hoja de cálculo, no parece ser nada del otro mundo, pero todas las operaciones que realiza son altamente eficientes en el sistema de numeración binario. Por algo lo introdujo el programador israelí Stein en 1967. Aquí sólo se nos queda como un tema de cultura matemática, pero es divertido implementarlo.

Versión recursiva

Lo que hemos desarrollado, con un botón que en cada paso reacciona según lo que se encuentra, nos permite sospechar que todo esto se resuelve también mediante una función recursiva. Es cierto, y está publicado. Lo que haremos aquí es adaptarlo al Basic de Excel y Calc:

Public Function mcdbin(m, n)
Dim mb

'Si son iguales, hemos llegado al MCD
If m = n Then

mb = m

'Si ambos son divisibles entre 2, se saca ese factor
ElseIf m / 2 = m \ 2 And n / 2 = n \ 2 Then
mb = 2 * mcdbin(m / 2, n / 2)

'El primero contiene un 2. Se elimina
ElseIf m / 2 = m \ 2 Then
mb = mcdbin(m / 2, n)

'Operamos de igual forma con el segundo
ElseIf n / 2 = n \ 2 Then
mb = mcdbin(m, n / 2)

'Ambos son impares. Se restan
Else
If m > n Then mb = mcdbin(m - n, n)
If n > m Then mb = mcdbin(m, n - m)
End If

'La función recoge el valor de mb
mcdbin = mb
End Function

Tiene toda la elegancia de las funciones recursivas

(ver
http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/03/funciones-recursivas-en-las-hojas-de.html)

En este caso resulta un poco complicada, pero funciona muy bien. Si te apetece, estudia la versión clásica y recursiva:

```
Public Function mcdeuclid(m, n)
Dim mb

'Si uno es múltiplo de otro, obtenemos el MCD
If m / n = m \ n Then
mb = n
ElseIf n / m = n \ m Then
mb = m
Else
'En caso contrario, se restan
If m > n Then mb = mcdeuclid(m - n, n)
If n > m Then mb = mcdeuclid(m, n - m)
End If
'La función recoge el valor de mb
mcdeuclid = mb
End Function
```

Ambas están implementadas en la herramienta que ofrecemos.

	Versión recursiva	
Variante binaria	Función MCDBIN	22
Variante clásica	Función MCDEUCLID	22

USO DE LA FUERZA BRUTA

El día 29/12/19 descubrí este tweet de @d_r_o_n_e:

DRONE
@d_r_o_n_e

Had a weird dream last night about
a+b+c=a*b*c/1000=d+e+f=d*e*f/1000
Had to brute force it this morning and found 444

Traducir Tweet

$$50+370+24=\frac{50\cdot 370\cdot 24}{1000}=444$$

$$32+375+37=\frac{32\cdot 375\cdot 37}{1000}=444$$

4:04 p. m. · 29 dic. 2019 · Twitter Web Client

En él podemos ver un ejemplo que puede reproducirse mediante el uso de la "fuerza bruta. Consiste en recorrer todas las variantes de un problema sin usar razonamientos ni condiciones complementarias. Es una buena estrategia comenzar con esta forma de buscar para después ir afinando resultados, explicarlos y, si es posible, justificarlos.

Uso de la herramienta Cartesius

Nuestra herramienta Cartesius también ayuda a combinar variables de todas las formas posibles, pero se hace lenta cuando nos acercamos al rango de los números de cuatro cifras. La puedes descargar desde

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#cartesius

Con ella hemos intentado este planteo:

XTOTAL=3
XT=1..200
ES X1*X2*X3/1000=X1+X2+X3
CRECIENTE

Es fácil entender su significado: combinaremos tres variables, todas entre 1 y 200, de forma que se cumpla la condición pedida y después nos quedamos con las crecientes. Al cabo de más de media hora se obtuvo esta tabla, completada en sus dos últimas columnas con las dos expresiones que deben coincidir.

X1	X2	X3	X4	SUMA	PRODUCTO/1000
12	170	175		357	357
15	125	160		300	300
15	132	150		297	297
16	125	141		282	282
20	75	190		285	285
20	78	175		273	273
20	85	150		255	255
20	100	120		240	240
21	100	110		231	231
22	84	125		231	231
25	60	170		255	255
25	65	144		234	234
25	66	140		231	231
25	80	105		210	210
25	90	92		207	207
27	64	125		216	216
28	50	195		273	273
30	46	200		276	276
30	50	160		240	240
30	65	100		195	195

Observamos, y lo confirmaremos un poco más abajo, que aparecen repetidas algunas soluciones menores que 444, como son 231 o 240. Con el planteo propuesto se encontraron 32 soluciones, de las que solo hemos reproducido las primeras. Aparecen en orden inverso al natural porque cuando unos factores tienen igual suma, su producto crece cuando sus diferencias son menores. Con este intento descubrimos ya que la técnica de la "fuerza bruta" es muy lenta en producir resultados.

Analizando la búsqueda descubrimos que Cartesius ha tenido que analizar 200*200*200 =8*10^6 números, y en cada uno calcular si una igualdad se verifica o no. Eso es mucho para un portátil normal. Ahí es donde falla la fuerza bruta, en la multiplicación de casos que produce la Combinatoria.

Algoritmos

La “fuerza bruta” se caracteriza casi siempre por el uso de bucles del tipo FOR_NEXT, WHILE o REPEAT, casi siempre anidados en tres o cuatro niveles.

Lo normal, en ejemplos similares al que nos ocupa, es disponer de tres bucles anidados, con la propiedad deseada en el interior de los tres. Comenzaremos exigiendo solo una condición de las propuestas por @d_r_o_n_e

En este caso podíamos comenzar por este código:

```
Sub fuerzabuta()
Dim i, j, k, a, b, fila

fila = 10   ‘La fila determina la construcción de una tabla
en Excel
For i = 1 To 1000  ‘Bucle triple
For j = 1 To i
For k = 1 To j
a = i + j + k  ‘Cálculos previos
b = i * j * k / 1000
If a = b Then  ‘Condición pedida
fila = fila + 1: ‘Construcción de la tabla
ActiveWorkbook.ActiveSheet.Cells(fila, 2).Value = b
ActiveWorkbook.ActiveSheet.Cells(fila, 3).Value = i
ActiveWorkbook.ActiveSheet.Cells(fila, 4).Value = j
```

ActiveWorkbook.ActiveSheet.Cells(fila, 5).Value = k
End If
Next k
Next j
Next i
End Sub

Hemos ejecutado esta macro de Excel y nos han resultado muchas soluciones. Lo que nos interesa es que salgan repetidas. Por la forma de plantear el problema, aparecerán desordenadas. Las primeras han sido:

Número	i	j	k
165	60	55	50
168	70	50	48
171	76	50	45
186	80	75	31
189	84	75	30
180	90	50	40
207	92	90	25
189	100	54	35
192	100	60	32
195	100	65	30
210	105	80	25
231	110	100	21
204	120	50	34

Coinciden con las obtenidas en Cartesius. Observamos su falta de orden y la existencia de un repetido, el 189. Según la tabla:

189=84+75+30=84*75*30/1000

189=100+54+35=100*54*35/1000

Es una solución también más pequeña que la propuesta de 444.

Para verlas todas ordenaremos la columna y así se verán mejor los repetidos. Con este método hemos descubierto los siguientes: 189, 207, 231, 240, 255, 273, 297, 420, 444, 480, 504, 741, 759, 768, 810, 891,… De ellos presentan soluciones triples 231, 504 y 891.

Más fuerza bruta (o menos)

Podíamos intentar descubrir tan solo los números en los que se da más de una solución. El problema es que para esto se necesitaría un bucle más, con el consiguiente aumento de tiempo de proceso. Es el coste de utilización de bucles múltiples sin apenas condicionamientos. Hay una forma de evitar un nuevo bucle, y es considerar que en el algoritmo anterior hemos hecho variar el valor de **k** cuando en realidad está condicionado por la igualdad que se pide ***a=i+j+k.*** Considerándolo así, lo único que ha de cumplir k es que su valor sea ***a-i-j*** y, por cuestión de unicidad, que no sea mayor que **j**. Esto es lo que hemos implementado en PARI:

```
for(n=1,500,m=0;b=0;for(i=1,n,for(j=1,i,c=i+j;if(c<=n&&n-c<=j,b=i*j*(n-c)/1000;if(b==n,m+=1))));if(m>1,print1(n,", ")))
```

Mantenemos los bucles con las variables i y j. Eliminamos el bucle de k sustituyéndolo por la expresión ***b=i*j*(n-c)/1000*** y concretamos las condiciones que ha de cumplir. Con la variable **m** exigimos que haya repetición de casos. Hemos añadido un nuevo bucle, pero con los cambios apenas se resiente la velocidad del proceso. De todas formas, para rangos de números de 1000 más o menos, puede tardar muchos minutos o incluso más de una hora. Cosas de la fuerza bruta.

Los primeros resultados son:

189, 207, 231, 240, 255, 273, 297, 420, 444, 480, 504, 741, 759, 768, 810, 891, 1221, 1320, 2418,…

Con esto damos por terminada la búsqueda, porque la fuerza bruta cansa y no se aprende mucho con ella.

Rebajamos pretensiones

Podíamos exigir productos similares, pero con solo dos variables, es decir, N=i+j=i*j/100. Esto simplifica el problema, y solo lo incluimos como repaso de las técnicas empleadas anteriormente. Las explicaciones para el caso anterior valen también para este.

Con Cartesius

Plantearíamos, por ejemplo:

xtotal=2

xt=1..700

es x1+x2=x1*x2/100

creciente

Obtendríamos:

X1	X2	X3	X4	X5
120	600		720	720
125	500		625	625
140	350		490	490
150	300		450	450
180	225		405	405
200	200		400	400

Las primeras columnas corresponden a los valores de i, j y las siguientes el valor repetido de N.

Así, 120+600=120*600/100=720

125+500=125*500/100=625

En principio, no parece que existan soluciones dobles.

Con una función de Excel:

```
Function esmultiple2(n)
Dim i, j, k, a, b, m

m = 0
For i = 1 To n
For j = 1 To i
a = i + j
b = i * j / 100
If a = b And a = n Then m = m + 1
Next j
Next i
esmultiple2 = m
End Function
```

Esta función cuenta las veces en las que se da la igualdad ***i+j=i*j/100***. Organizando una búsqueda nos resulta:

400
405
450
490
625
720
841
1210
1458

Tampoco se aprecian repetidos

Con PARI

Traducimos la función anterior a PARI y la integramos en un bucle de búsqueda:

for(n=1,10000,m=0;b=0;for(i=1,n/2,b=i*(n-i)/100;if(b==n,m+=1));if(m>0,print1(n,", ")))

Volvemos a obtener los mismos resultados:

400, 405, 450, 490, 625, 720, 841, 1210, 1458, 2205, 2704, 5202,…

Tampoco aquí se detectan repetidos. Lo dejamos como complemento.

LAS OLVIDADAS FRACCIONES CONTINUAS

PRESENTACIÓN

¿Sabes qué significa este desarrollo y cómo obtenerlo?

$$\frac{1280}{345} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Si no conoces la teoría inténtalo según tus conocimientos.

Puedes comenzar así:

1280/345 = 3 + 245/345 = 3 + 1/(345/245) =3 + 1/(1+100/245) =

3 + 1/(1 + 1/(245/100)) =…

DESARROLLO

Llamamos fracción continua a la expresada de esta forma:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\ldots}}}$$

donde **a** es entero y **b, c**…son enteros positivos llamados **cocientes**. Toda fracción ordinaria se puede expresar de esta forma, y todo número irracional admite aproximaciones mediante desarrollos de este tipo. Las fracciones continuas se usan cuando se desea manejar un representación de los números reales independiente del sistema de numeración (salvo en la expresión de los cocientes).

No es este libro el espacio más adecuado para estudiar todo su desarrollo teórico. Nuestro interés aquí será la implementación de los algoritmos necesarios en hoja de cálculo para desarrollar un número en fracciones continuas y las aplicaciones que derivan de ello.

Dos líneas podemos seguir en la obtención de los cocientes. Una está esbozada en la página anterior y la desarrollaremos más adelante. La otra se basa en el algoritmo de Euclides.

Método del algoritmo de Euclides

Si consultas la teoría descubrirás que los cocientes a, b, c,… son los que aparecen en el algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d. de dos números. Así, por ejemplo, para encontrar el m.c.d. de 345 y 1280 en el algoritmo se obtienen los siguientes cocientes:

	3	1	2	2	4	2	0	0	0
1280	345	245	100	45	10	5	0	0	0
245	100	45	10	5	0	0	0	0	0

En el desarrollo mediante fracciones continuas de 1280/345 vuelven a aparecer los mismos cocientes 3, 1, 2, 2,… ¡porque se trata del mismo algoritmo orientado de forma diferente! En la siguiente imagen, capturada de una hoja de cálculo

Numerador	1280	Fracción continua:	3	1	2	2	4	2
			3	4	11	26	115	256
Denominador	345		1	1	3	7	31	69

puedes comprobar la evidente igualdad de la serie de cocientes. Comprueba que, efectivamente, es válido este desarrollo:

$$\frac{1280}{345}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}$$

El algoritmo de Euclides lo puedes encontrar implementado en varios sitios, por ejemplo, en nuestra página *Hojamat.es*

http://hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/herrdiv.htm

Como el algoritmo de Euclides tiene siempre un final en un número finito de pasos, las fracciones continuas de cualquier número racional poseerán también un número finito de cocientes.

Método de la parte entera

En la primera página de este tema comenzamos a desarrollar otro método: consiste en ir encontrando la parte entera de las fracciones e invirtiendo el resto R = 1/1/R. Este método es recomendable para desarrollar un número expresado en el sistema decimal, pero con las hojas de cálculo **no es exacto**, pues se van acumulando errores de redondeo y truncamiento.

¿Cómo se pueden organizar los datos?

Escribe aquí el número deseado								
3,71014493		1,41	2,45	2,22	4,5	2	0	0
	Fracción continua:	3	1	2	2	4	2	0

En la imagen vemos que en la fila inferior se van situando las partes enteras del número propuesto y de los que van apareciendo en la fila superior. Estos números, que en la imagen son 3, 1, 2,2,…son los cocientes del desarrollo.

Los números de la fila superior son los inversos de los restos que se producen al restar las partes enteras. No es difícil de organizar en una hoja de cálculo, porque basta ir copiando las dos fórmulas de parte entera del cociente e inverso del resto para conseguir el desarrollo, sujeto, como hemos dicho a errores de truncamiento y redondeo.

REDUCIDAS

Para construir una pieza, un tornero ha de ajustar unos engranajes de forma que mientras uno gire 2009 vueltas, el otro sólo recorra 2000. En este caprichoso encargo, los números son primos entre sí, por lo que no *se pueden simplificar, y el tornero carece de engranajes de 2000 ó de 2009 dientes.*

Le pide consejo al oficial. Éste hace unos cálculos y le ofrece la solución: "Usa un engranaje de 222 dientes y otro de 223, que nadie lo va a notar"

¿Qué operación hizo el oficial? ¿Por qué estaba seguro de que la pieza saldría bien fabricada?

Hemos desarrollado 2009/2000 en forma de fracción continua, formada por los cocientes [1, 222, 4,2]

7	Escribe aquí la fracción deseada											
8												
9	Numerador	2009										
10	Denominador	2000		Fracción continua:				1	222	4	2	0
11					Algoritmo de Euclides		2009	2000	9	2	1	0
12							9	2	1	0	0	0
13	Equivalente decimal				Reducidas	0	1	1	223	893	2009	
14	1,00450000					1	0	1	222	889	2000	
15												
16								1,00000000	1,00450450	1,00449944	1,00450000	
17												

Puedes reproducir los resultados con las hojas de cálculo **fraccont.xls** y **fraccont.ods** contenidas en la dirección

http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

Debajo de los cocientes aparecen una serie de fracciones, llamadas **reducidas o convergentes**, 1/1, 223/222, 893/889, que se van aproximando a 2009/200. Entre ellas figura 223/222, la solución propuesta por el oficial. Puedes ver esta aproximación en los desarrollos decimales que figuran debajo.

Estas reducidas se forman calculando fracciones parciales de izquierda a derecha:

1=1;   1+1/222=223/222;   1+1/(222+1/4) = 1+1/(889/4) =

1+4/889 = 893/889

La hoja de cálculo **fraccont.ods** (en su hoja dedicada a números fraccionarios) logra estas reducidas mediante un algoritmo clásico llamado de “los cumulantes”. Consiste en construir dos sucesiones recurrentes del tipo

$P_n = P_{n-1}*a_n+p_{n-2}$

siendo a_n la sucesión de cocientes de la fracción continua, precedidos en la primera fila por 0 y 1 y en la segunda por 1 y 0. Como ejemplo, si se aplican los cumulantes a la sucesión 1, 1, 1, 1,1…. Resulta la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5,8…

Puedes seguir estos cumulantes en las filas que contienen los numeradores y denominadores de las reducidas en el caso de la fracción que usamos al principio, 1280/345. Cada número de las filas de reducidas se ha formado multiplicando el anterior por el cociente de la primera fila y sumando el penúltimo elemento

		3	1	2	2	4	2
0	1	3	4	11	26	115	256
1	0	1	1	3	7	31	69

11 = 2*4+2, 115=26*4+11, 31=7*4+3, y así con todos. No es difícil organizar esto con hoja de cálculo.

Las reducidas permiten la aproximación a una fracción con numerador y denominador grandes mediante otras que están construidas con números más pequeños. Esta utilidad la usaban los torneros cuando carecían de ruedas de determinado número de dientes y debían sustituirlas, con un pequeño error, por otras ruedas más pequeñas.

Por ejemplo, 2009/2000 se puede sustituir por 223/222 con un error inferior a 0,000005.

La reducidas son alternativamente mayores y menores que la fracción dada, y se acercan a ella, pues la diferencia entre dos reducidas es siempre igual a la unidad dividida entre el producto de sus denominadores.

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

¿Cómo se pueden repartir 5957 objetos en lotes de 161 y de 182 objetos respectivamente, sin que sobre ni falte ninguno?

Puedes usar la fuerza bruta de las hojas de cálculo (tabla de doble entrada, multiplicaciones y sumas hasta ver el total 5957).

También dispones de la herramienta Solver. Aquí tienes una imagen de su planteamiento:

Con estas herramientas obtendrías las soluciones X=11 Y=23

¿Cómo lo resolverías sin ordenador?

Otra aplicación importante de las fracciones continuas y sus reducidas es la de resolver ecuaciones diofánticas lineales del tipo Ax+By=C, en las que C es múltiplo del MCD de A y B (que son las únicas que poseen solución). Quiere esto decir que A, B y C se pueden simplificar hasta conseguir que MCD(A,B)=1. En lo que sigue supondremos que esto se cumple.

Efectivamente, en un apartado anterior se vio que la diferencia entre dos reducidas consecutivas equivalía a una fracción de numerador la unidad y de denominador el producto de sus denominadores. Esta propiedad también se cumple entre la última reducida y la fracción dada.

Vemos cómo se aprovecha esta propiedad para resolver la ecuación.

Sea, por ejemplo, la ecuación 244X+108Y=112.

Simplificamos: 61X+27Y=28, con MCD(61,27)=1

Buscamos las reducidas de la fracción 61/27 y elegimos la última 9/4

Fracción continua:				**2**	**3**	**1**	**6**
	Algoritmo de Euclides		61	27	7	6	1
			7	6	1	0	0
	Reducidas	**0**	**1**	**2**	**7**	**9**	**61**
		1	**0**	**1**	**3**	**4**	**27**

Y se cumplirá, según la propiedad citada, que 61*4-27*9=1, luego 4 y -9 serán las soluciones de 61X+27Y=1. Bastará multiplicar por el término independiente 28 para obtener una solución: X=4*28 = 112 e Y=-9*28 = -252

Las demás soluciones se obtienen mediante las paramétricas.

X=112-27t
Y=-252+61t

Si se desean soluciones positivas deberemos ajustar el parámetro t

En el ejemplo propuesto en la entrada anterior hay que resolver la ecuación diofántica 182X+161Y= 5957. Si usas la hoja de cálculo **diofant1.ods** (OpenOffice) o la **diofant1.xls** (Excel) contenidas en la dirección

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm

verás que las soluciones dadas en primer lugar son X=6808 Y=-7659. Para conseguir dos soluciones positivas hay que jugar bastante con el parámetro T. Intenta conseguirlo, que no es inmediato. Una solución sería X=23 Y=11.

APROXIMACIÓN DIOFÁNTICA

*¿Sabías que la fracción **3650401/2107560** es una muy buena aproximación de la raíz cuadrada de 3 (coinciden*

en los trece primeros decimales)? ¿Cómo se ha obtenido?

Cualquier número expresado en forma decimal puede representarse mediante una fracción continua. Si el número es racional, ésta será finita, pero si es irracional no podrá serlo, y tendríamos que prolongar el desarrollo de la fracción continua hasta el infinito. En los siguientes párrafos veremos cómo.

Un caso muy interesante es el de los irracionales cuadráticos, que, como demostró Lagrange, presentan desarrollos periódicos.

¿Cómo desarrollar un decimal cualquiera en fracción continua exacta (caso racional) o aproximada (si es irracional)?

La idea es: separamos la parte entera y la parte decimal del número N=e+d, y la decimal la expresamos así: N=e+1/(1/d). Volvemos a separar parte entera y decimal de 1/d y reiteramos, con lo que irán apareciendo los cocientes enteros de una fracción continua.

Probamos con la raíz cuadrada de 3. Los cálculos serían:

1,73205080757 = 1+ (1/(1/1,73205080757) =

1+ 1/1,36602540378 = 1+ 1/(1+1/2,73205080760) =

1+1/(1+1/(2+1/1,36602540378) =…

Al salir este último número se descubre la periodicidad, luego 1,73205080757 equivale a la fracción continua

[1, 1, 2, 1, 2, 1,2,….] que es periódica por tratarse de un irracional cuadrático.

Para evitar los errores de truncamiento y redondeo deberás organizar los cálculos sin acudir a su expresión decimal, manteniendo el radical cuadrático en todos ellos. En este caso habrá que acudir en cada paso a la racionalización de los denominadores mediante el producto por el radical conjugado.

Incluimos a continuación el desarrollo para √8, en el que se van destacando los cocientes obtenidos:

$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1/\left(\sqrt{8}-2\right)} = 2 + \frac{1}{\left(\sqrt{8}+2\right)/4}$ luego $a_1 = 2$

$\frac{\sqrt{8}+2}{4} = 1 + \frac{1}{1/\left(\sqrt{8}-2/4\right)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{8}+2}$ luego $a_2=1$

$\frac{\sqrt{8}+2}{1} = 4 + \frac{1}{1/\left(\sqrt{8}-2\right)} = 4 + \frac{1}{\left(\sqrt{8}+2/4\right)}$ luego $a_3 = 4$

Se observa que llegamos a la misma expresión que cuando obtuvimos $a_1 = 2$, luego hemos llegado a la periodicidad, y

$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4,\ldots]$

A continuación destacamos algunos desarrollos importantes:

$$\sqrt{2} = [1,2,2,2,2\ldots]$$

Números metálicos

Número de oro

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1,1,1,1,1\ldots]$$

Número de plata

$$\varphi = 1 + \sqrt{2} = [2,2,2,2\ldots]$$

Número de bronce

$$\psi = \frac{\sqrt{13}+3}{2} = [3,3,3,3\ldots]$$

Las hojas de cálculo

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/fraccont.xls

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/fraccont.ods automatizan el proceso. Si las descargas recuerda que 3están compuestas de dos hojas, una para números fraccionarios y otra para racionales. Si en la primera escribes =RAIZ(3) obtendrás las aproximaciones (leyendo las reducidas) a la raíz cuadrada de 3.

El carácter aproximado de los cálculos produce que se rompan las posibles periodicidades después de muchos pasos.

ECUACIÓN DE PELL

Se llama ecuación de Pell (por error, porque Pell no la estudió) a la ecuación diofántica cuadrática $X^2 - DY^2 = 1$, con X e Y variables enteras y D número entero positivo no cuadrado perfecto. Existe una variante con el segundo miembro -1 que se resuelve de forma similar, con algunas restricciones, y también se consideran los casos en los que se trate de cualquier número entero.

En su resolución hay que distinguir dos problemas:

Primera solución

Una primera solución no es difícil de encontrar en general.

(a) Puedes acudir a un simple tanteo entre cuadrados perfectos. Por ejemplo, una solución de $X^2- 6Y^2= 1$ es $X_0=5$ $Y_0=2$. Con una hoja de cálculo no es tarea muy complicada.

(b) Las fracciones continuas también son útiles en la resolución de esta ecuación. Basta para ello desarrollar la raíz cuadrada de D mediante ellas y, según vimos en una entrada anterior, aprovechar la periodicidad del desarrollo. En el caso de la ecuación de Pell basta tomar las reducidas anteriores a la finalización del primer periodo.

2	2	4	2	4	2	4	2
2	5	22	49	218	485	2158	4801
1	2	9	20	89	198	881	1960
-2	1	-2	1	-2	1	-2	1
	Solución		Solución		Solución		Solución

En la imagen observarás que la solución $X_0=5,Y_0=2$ aparece antes del final del primer periodo [2,4] en el desarrollo por fracciones continuas. Después siguen otras: X=49, Y=20, X=485, Y=198, etc.

En nuestro modelo de hoja de cálculo que recomendamos más abajo basta escribir el valor de D y el segundo miembro +1 ó -1 y la hoja se encarga de desarrollar la raíz cuadrada de D mediante fracciones continuas:

Resolución de la ecuación de Pell $X^2-Dy^2=1$ (-1)

	Escribe el valor de D (entero y no cuadrado perfecto)						6
	Escribe el valor del segundo miembro, +1 ó -1						1
Raíz de D							
2,4494897428							
	Fracciones continuas			2	2	4	2
	X	0	1	2	5	22	49
	Y	1	0	1	2	9	20

Siguientes soluciones

Según la teoría del anillo Q(√D), que no podemos desarrollar aquí, las primeras soluciones, escritas como $X_0+Y_0\sqrt{D}$ constituyen una unidad del anillo, y también lo serán todas sus potencias, por lo que las siguientes soluciones provendrán de los desarrollos de las expresiones

$$(X_0+Y_0\sqrt{D})^n$$

agrupando después los términos que no contienen el radical como valor de Y y los que sí lo contienen como valor de X. Este método puede ser fatigoso, por lo que es mejor ir obteniendo las distintas soluciones por recurrencia. En efecto, de la anterior consideración se deduce que

$$X_n+Y_n\sqrt{D} = (X_{n-1}+Y_{n-1}\sqrt{D})\ (X_0+Y_0\sqrt{D})$$

O bien, separando términos:

$X_n = X_{n-1}X_0+Y_{n-1}Y_0D$

$Y_n = X_{n-1}Y_0+Y_{n-1}X_0$

Estas son las fórmulas que hemos usado en la hoja de cálculo.

Puedes consultar la búsqueda de la primera solución por fracciones continuas y la recurrencia para las siguientes en las hojas de cálculo

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/pell.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/hoja/pell.xls

Por ejemplo, intenta resolver esta cuestión: ¿Qué cuadrado perfecto de diez cifras, al quitarle una unidad se puede descomponer en cinco cuadrados perfectos idénticos?

PROLONGACIÓN DE UNA RECURRENCIA

En la confección de sucesiones, que es una de las tareas más frecuentes en este blog, aparecen con cierta frecuencia algunas de las que se sabe o sospecha que pueden generarse mediante una fórmula de recurrencia respecto a sus primeros términos. Así ocurre, por ejemplo, con los números poligonales, que ocupan una buena parte de nuestros estudios, o con aquellas cuestiones que se resuelven con la ecuación de Pell o similares (ecuaciones Pell-like).

Las ecuaciones de recurrencia más frecuentes en estos temas son las lineales, en las que existe una relación de este tipo entre un elemento y varios de sus anteriores. Las llamaremos homogéneas si no intervienen términos independientes. Comenzaremos por ellas.

Sistema de ecuaciones de una recurrencia

Si cada elemento depende de los anteriores, pongamos por ejemplo, de cuatro, y de forma lineal, se dará la siguiente situación:

$a(n)=c_1a(n-1)+c_2a(n-2)+c_3a(n-3)+c_4a(n-4)$

Si elegimos los ocho primeros términos de la sucesión podremos plantear (en el caso homogéneo)

$a(8)=c_1a(7)+c_2a(6)+c_3a(5)+c_4a(4)$

$a(7)=c_1a(6)+c_2a(5)+c_3a(4)+c_4a(3)$

$a(6)=c_1a(5)+c_2a(4)+c_3a(3)+c_4a(2)$

$a(5)=c_1a(4)+c_2a(3)+c_3a(2)+c_4a(1)$

Esto constituye un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas c_1, c_2, c_3, c_4, que, al resolverse, nos descubre la ecuación de recurrencia. Con los instrumentos de cálculo disponibles en la actualidad es una tarea fácil de sobrellevar.

Pongamos un ejemplo. Los números hexagonales se generan con una ecuación de recurrencia de orden 3. Para encontrarla, ya lo habrás descubierto, necesitamos el doble de elementos, en este caso 6. Buscamos cualquier listado de ellos y seleccionamos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66. Por comodidad, llamamos a los coeficientes A, B, C, y queda

$66=45A+28B+15C$

$45=28A+15B+6C$

$28=15A+6B+C$

Resolvemos el sistema y obtenemos A=3, B=-3, C=1, luego los números hexagonales se generan mediante H(n)=3H(n-1)-3H(n-2)+H(n-3). Puedes comprobarlo en la entrada correspondiente en este blog (https://hojaynumeros.blogspot.com/2021/02/numeros-hexagonales-1.html)

Automatización del proceso

Desde hace años ofrezco en mi página web una calculadora matricial para Excel y Calc (http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#matrices)

Esta herramienta es de propósito general, con varias opciones y posibilidad de programar operaciones. Para no confundir con excesivo material, la he adaptado al problema que nos ocupa, y he situado esa versión en la carpeta propia de este blog.

http://www.hojamat.es/blog/ecurrecurre.xlsm

En el caso de los hexagonales marcamos como orden 3, y escribimos en la fila correspondiente los primeros términos 1 , 6 , 15 , 28 , 45 , 66.

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	6	15	28	45	66
1,703125	-2,34375	0,890625				1
-2,34375	2,8125	-0,96875				-3

Después pulsamos en el botón “Homogénea” y se construirá el sistema de ecuaciones correspondiente:

Sucesión	1	6	15	28	45	66
1	6	15				28
6	15	28				45
15	28	45				66

Finalmente, pulsamos el botón “Resolver” y obtendremos los coeficientes:

No homogénea	Resolver	
45	66	91
	1	
	-3	
	3	

Como es una adaptación de otra herramienta, **se aconseja no tocar nada más de la hoja**. Si todo se viene abajo, volveremos a iniciar Excel.

Caso no homogéneo

Hay recurrencias lineales que poseen un término independiente. Estos mismos números hexagonales del ejemplo admiten otra recursión de tercer orden con término independiente 4.

a(3)=K+c_1a(1)+c_2a(2)
a(4)=K+c_1a(2)+c_2a(3)
a(5)=K+c_1a(3)+c_2a(4)

Resolvemos y nos resultan los coeficientes como en el caso homogéneo.

En nuestra hoja de cálculo basta pulsar sobre el botón “No homogéneo” y después sobre “Resolver”. En el caso de los hexagonales:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	**6**	**15**	**28**	**45**	**66**
1	**1**	**6**				**15**
1	**6**	**15**				**28**
1	**15**	**28**				**45**

No se debe olvidar rellenar el Orden, en este caso, 3. La solución, después de resolver, queda:

4
-1
2

La interpretamos como a(n)=2a(n-1)-a(n-2)+4. En efecto:

15=2*6-1+4

28=2*15-6+4

45=2*28-15+4

Otros ejemplos

La recurrencia homogénea que hemos descubierto para los números hexagonales es una propiedad general de todos los poligonales, en los que P(n)=3P(n-1)-P(n-2)+P(n-3). Lo vemos en los octogonales: 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936,…

Aquí se inserta la captura de pantalla en la que comprobamos que los coeficientes:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	8	21	40	65	96
1,087963	-1,481481	0,560185				1
-1,481481	1,740741	-0,592593				-3
0,560185	-0,592593	0,199074				3

Puedes probar con otros tipos de poligonales, como estos cuadrados centrados, 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145,…y te resultarán los mismos coeficientes 3, -3 y 1.

Triangulares cuadrados

Los triangulares que también son cuadrados (los hemos estudiado en

https://hojaynumeros.blogspot.com/2015/10/damos-vueltas-los-triangulares.html) también admiten una recurrencia homogénea de tercer orden. Tomamos su listado y lo volcamos en nuestra hoja de cálculo: 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881, 55420693056, 1882672131025, 63955431761796,

2172602007770041,…y resulta:

		Orden	3	Homogénea	No homogénea	
Sucesión	1	36	1225	41616	1413721	48024900
1155,986	-1189,5	34,01389				1
-1189,5	1207	-34,5				-35
34,01389	-34,5	0,986111				35

Efectivamente, TC(n)=35TC(n-1)-35TC(n-2)+TC(n-3), tal como hemos comprobado con los siguientes términos.

Así podríamos recorrer más ejemplos. Como esto es una presentación de una herramienta, con lo explicado basta.

DETECCIÓN DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Es bastante frecuente que tres elementos de una misma sucesión o del mismo tipo presenten una progresión aritmética, es decir, que tengan la forma (n-k, n, n+k). Un ejemplo de esto son las ternas de números primos en progresión:

3 5 7
3 7 11
5 11 17
7 13 19
11 17 23
7 19 31
17 23 29
17 29 41
19 31 43
31 37 43
29 41 53

En mis sucesiones http://oeis.org/A292313, http://oeis.org/A292309, http://oeis.org/A292314 y otras se hace referencia a este tipo de ternas, que son admitidas por casi todos los tipos de números más populares.

La detección de estas ternas no ofrece problemas de diseño de un algoritmo. Si fijamos la atención en el término central **n**, es claro que **n-k** pertenecerá al rango **(1, n-1)**. Por tanto, bastará recorrerlo y, para cada número del mismo tipo que n, buscar si **n+k** también coincide con ellos en la misma característica o propiedad, que en el caso anterior era la de ser primos.

Las ternas anteriores de primos se pueden detectar con la siguiente función de Excel y Calc:

function hayprog$(n) ‘Devuelve un string con la terna, o bien una cadena vacía

dim i,k

dim s$

if not esprimo(n) then hayprog="":exit function ‘Si el número no es primo, salimos.

s=""

k=0

for i=1 to n-1 ‘La variable i recorre el rango (1,n)

if esprimo(i) then ‘Si es primo, seguimos

k=n-i ‘Si n+k también es primo, hemos llegado a una terna

if esprimo(n+k) then s=s+” # “+str$(n-k)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)

end if

next i

hayprog=s

end function

Con PARI se puede usar este mismo algoritmo. Al ser un lenguaje más orientado a números, usaremos como respuesta de la función ESPROG el término central.

esprog(n)={my(s=0,k=0,i);if(isprime(n),for(i=1,n-1,if(isprime(i),k=n-i;if(isprime(n+k),s=1))));s}

for(i=1,100,if(esprog(i),print(i)))

Si lo ejecutas en https://pari.math.u-bordeaux.fr/gp.html, te devolverá los términos primos centrales:

```
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
```

El uso del bucle FOR-NEXT se justifica porque, en otros casos que veremos más adelante, pueden existir dos soluciones. Si no, usaríamos WHILE, que se puede detener antes.

Ternas de cuadrados

Las ideas anteriores las podemos aplicar a muchos tipos de números. Comenzamos por los cuadrados. Para ello, sustituimos la función ESPRIMO por ESCUAD en Excel y Calc, y en PARI, i*sprime* por *issquare*. Puedes buscar la función ESCUAD en este mismo blog. El resultado sería el siguiente:

1 25 49

4 100 196

49 169 289
9 225 441
49 289 529
16 400 784
25 625 1225 # 289 625 961
196 676 1156
1 841 1681
36 900 1764
196 1156 2116
49 1225 2401
529 1369 2209
441 1521 2601
64 1600 3136
961 1681 2401

Vemos que el 625 es centro de dos ternas distintas. Comprueba que todas las ternas presentan una progresión aritmética.

Los términos centrales están publicados en OEIS:

A198385 Second of a triple of squares in arithmetic progression.

25, 100, 169, 225, 289, 400, 625, 676, 625, 841, 900, 1156, 1369, 1225, 1681, 1521, 1600, 2500, 2025, 2704, 2601, 2500, 3721, 2809, 3025, 4225, 3364, 3600, 4225, 4225, 4225, 4624, 5625, 5476, 7225, 4900, 6724, 6084, 5329, 5625, 6400, 7225, 7225, 7225, 7921

Las primeras diferencias de estas progresiones son: 24, 96, 120, 216, 240, 384, 336, 480, 840, 864, 960, 1176 y 840, y todas son múltiplos de 24.

Las sumas de los tres componentes de la terna las publiqué en http://oeis.org/A292313. Coinciden, como es evidente con el triple del término central.

A292313 Numbers that are the sum of three squares in arithmetic progression.

75, 300, 507, 675, 867, 1200, 1875, 2028, 2523, 2700, 3468, 3675, 4107, 4563, 4800, 5043, 6075, 7500, 7803, 8112, 8427, 9075, 10092, 10800, 11163, 12675, 13872, 14700, 15987, 16428, 16875, 18252, 19200, 20172, 21675, 22707, 23763, 24300, 24843, 27075, 28227, 30000, 30603

Relación entre bases

Una búsqueda se debe enriquecer siempre con ideas teóricas o algebraicas. En este caso, no es difícil relacionar las bases.

Podemos representar la terna como $(n-r)^2$, n^2 y $(n+s)^2$. Con ello, la igualdad de diferencias será:

$$\mathbf{n^2-(n-r)^2=(n+s)^2-n^2}$$

Simplificando:

$s^2+2ns+r^2-2nr=0$

Es una ecuación de segundo grado en la variable **s** en la que el discriminante es **n^2-r^2+2nr** y ha de ser cuadrado. Esto nos da una posibilidad de crear otra función en la que los resultados sean las bases de los cuadrados. Puede ser esta:

```
function hayprog2$(n)
dim i,k,q
dim s$

s=""
k=0
for i=1 to n-1
q=n^2-i^2+2*n*i 'Se exige que el discriminante sea cuadrado
if escuad(q) then
k=sqr(q)-n 'Las diferencias serán i y k
s=s+" # "+str$(n-i)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)
end if
next i
hayprog2=s
end function
```

Efectivamente, los números que producen resultados válidos en esta función son las raíces cuadradas de los que obtuvimos más arriba,

1 5 7
2 10 14
7 13 17
3 15 21
7 17 23
4 20 28
17 25 31 # 5 25 35
14 26 34
1 29 41
6 30 42
14 34 46
7 35 49
23 37 47
21 39 51
8 40 56

Protagonismo para las diferencias

Podemos despejar **n** en la expresión $s^2+2ns+r^2-2nr=0$:

$\mathbf{n=(s^2+r^2)/(2(r-s))}$

Si **n** es entero, el par **r, s** será válido para cumplir la condición de progresión. Este punto de vista ha resultado muy eficaz, porque para cada valor de **r** (que será par por ser igual a una diferencia de cuadrados y mayor que s) se obtienen varios valores posibles de n. Son los mismos términos centrales en las ternas de bases, pero agrupados por conjuntos. Hemos usado la función:

```
function hayprog3$(n)
dim i,q
dim s$

s=""
for i=1 to n-1
q=(n^2+i^2)/(2*(n-i)) ‘La variable q representa la base central
if q=int(q) then s=s+" "+str$(q) ‘Se añaden todas las soluciones para una diferencia dada
next i
hayprog3=s
end function
```

Si se organiza una búsqueda con esta función, obtendremos los valores de la base central para cada diferencia:

6	5 13
8	10 25
10	17 41
12	10 15 26 61
14	37 85
16	20 50 113
18	15 39 65 145
20	13 25 34 82 181
22	101 221
24	17 20 30 52 75 122 265
26	145 313
28	29 35 74 170 365
30	25 29 51 65 123 197 421
32	40 100 226 481

Equivalencia entre dos sumas de impares

Si recordamos que un cuadrado es una suma de los primeros impares, la diferencia entre dos de ellos también será una suma, aunque no comenzará con el 1. Entonces, las ternas que estamos investigando se traducirán en equivalencia entre dos sumas de impares consecutivos. Así, la terna 1, 25, 49 se puede representar como

3+5+7+9=11+13

Ternas de triangulares en progresión

Si sustituimos la función ESCUAD por ESTRIANGULAR (está publicada en el blog, y basta exigir que 8n+1 sea cuadrado), obtendremos ternas del mismo tipo, pero para triangulares. Aquí tenemos una pequeña dificultad si consultamos OEIS, y es que se considera el 0 como triangular, siguiendo la política de esa página. Así, en el siguiente listado publicado, no entrarían, por ejemplo, 3 y 105 si no admitiéramos 0 como triangular. En los cuadrados no existe ese problema, porque uno de ellos no puede ser el doble de otro, pero en los triangulares sí (ver http://oeis.org/A075528).

3 .... # 0 3 6
21 .... # 6 21 36
28 .... # 1 28 55

36 .... # 6 36 66
78 .... # 3 78 153 # 36 78 120
105 .... # 0 105 210
153 .... # 6 153 300
171 .... # 66 171 276
190 .... # 55 190 325
210 .... # 120 210 300
253 .... # 10 253 496
325 .... # 55 325 595
351 .... # 36 351 666
378 .... # 15 378 741

A292310

Triangular numbers that are equidistant from two other triangular numbers.

3, 21, 28, 36, 78, 105, 153, 171, 190, 210, 253, 325, 351, 378, 465, 528, 666, 703, 903, 946, 990, 1035, 1128, 1176, 1275, 1378, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1891, 1953, 2278, 2346, 2556, 2628, 2775, 2926, 3003, 3081, 3160, 3403, 3570, 3741, 3828, 4095, 4186, 4278, 4371, 4656

Relación entre órdenes

Repitiendo los pasos de los cuadrados, tendremos:

$(n+s)(n+s+1)+(n-r)(n-r+1)=2n(n+1)$

$ns+n+ns+s^2+s-rn+n-rn+r^2-r=2n$

$2ns+s^2+s-2rn+r^2-r=0$

$s^2+(2n+1)s-(2n+1)r+r^2=0$

El discriminante para s en esa ecuación será

$(2n+1)^2+4(2n+1)r-4r^2$

Si es un cuadrado se tendrá:

$q^2=(2n+1+2r)^2-8r^2$

$s=(q-2n-1)/2$

Por tanto, en *hayprog2* habrá que introducir este nuevo discriminante:

```
function hayprog2$(n)
dim i,k,q
dim s$

s=""
k=0
for i=0 to n-1
q=(2*n+1+2*i)^2-8*i^2
if escuad(q) then
k=(sqr(q)-2*n-1)/2
```

if k>0 then s=s+" # "+str$(n-i)+" "+str$(n)+" "+str$(n+k)
end if
next i
hayprog2=s
end function

El resultado de los primeros órdenes de los triángulos es:

6 .... # 3 6 8
7 .... # 1 7 10
8 .... # 3 8 11
12 .... # 8 12 15 # 2 12 17
17 .... # 3 17 24
18 .... # 11 18 23
19 .... # 10 19 25
20 .... # 15 20 24
22 .... # 4 22 31
25 .... # 10 25 34
26 .... # 8 26 36
27 .... # 5 27 38
30 .... # 24 30 35
32 .. # 23 32 39 # 17 32 42 # 11 32 44 # 6 32 45
36 .... # 3 36 51

Aparecen varios casos múltiples para un mismo orden central. Sin tenerlos en cuenta, con ellos se reconstruyen las ternas de más arriba:

N-r	n	n+s	T1	T2	T3
3	6	8	6	21	36
1	7	10	1	28	55
3	8	11	6	36	66
8	12	15	36	78	120
3	17	24	6	153	300
11	18	23	66	171	276
10	19	25	55	190	325
15	20	24	120	210	300
4	22	31	10	253	496
10	25	34	55	325	595
8	26	36	36	351	666
5	27	38	15	378	741
24	30	35	300	465	630
23	32	39	276	528	780

Equivalencia entre sumas de consecutivos

Al igual que nos ocurrió con los cuadrados, al ser los triangulares suma de números consecutivos, cada progresión aritmética de triangulares se traducirá en una equivalencia de sumas de ese tipo. Por ejemplo, la terna 6, 36, 66 se traduce en 4+5+6+7+8=9+10+11, ya que ambos suman 30, que es la diferencia.

Ternas de oblongos

Cada terna de triangulares se convierte en otra de oblongos, ya que estos son el doble de los primeros. Cada triangular n(n+1)/2 dará lugar al oblongo n(n+1). No tiene mayor interés.

Semiprimos

Todos los semiprimos, salvo 4 y 6, pueden ser términos centrales en ternas de semiprimos en progresión aritmética. Hay estudios sobre esto en Xianmeng Meng, On sums of three integers with a fixed number of prime factors
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X0500106X?via%3Dihub

Aquí figuran las ternas que admiten los primeros semiprimos:

9 .... 1 : # 4, 9, 14
10 .... 1 : # 6, 10, 14
14 .... 1 : # 6, 14, 22
15 .... 2 : # 4, 15, 26 # 9, 15, 21
21 .... 2 : # 4, 21, 38 # 9, 21, 33

22 .... 3 : # 6, 22, 38 # 9, 22, 35 # 10, 22, 34
25 .... 2 : # 4, 25, 46 # 15, 25, 35
26 .... 2 : # 6, 26, 46 # 14, 26, 38
33 .... 3 : # 4, 33, 62 # 9, 33, 57 # 15, 33, 51
34 4 : # 6, 34, 62 # 10, 34, 58 # 22, 34, 46 # 33, 34, 35
35 .... 2 : # 15, 35, 55 # 21, 35, 49
38 ...... 3 : # 14, 38, 62 # 21, 38, 55 # 25, 38, 51
39 .... 3 : # 4, 39, 74 # 9, 39, 69 # 21, 39, 57
46 5 : # 6, 46, 86 # 10, 46, 82 # 15, 46, 77 # 34, 46, 58 # 35, 46, 57
49 .... 3 : # 4, 49, 94 # 21, 49, 77 # 33, 49, 65

Vemos que faltan 4 y 6, y que el resto admite una o más ternas de las pedidas. Por ejemplo, 46 admite 5 soluciones.

Podemos modificar las funciones para que solo nos ofrezcan el número de soluciones. Si exigimos dos, además del 4 y 6, hay otros semiprimos que no admiten soluciones dobles. En el listado se identifican 9, 10 y 14, y no hemos encontrado más. Los siguientes admiten al menos dos soluciones.

Si exigimos que al menos presenten tres soluciones, las excepciones se extienden a esta lista:

4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 25, 26, 35 y 57

Para cuatro sigue el tope de 57 (sólo hemos investigado hasta el 500), pero se incorporan 22, 33, 38, 39, y 49. Con exigencia de cinco llegaríamos a 87. Lo dejamos ahí sin formular ninguna conjetura. El autor, a punto de cumplir 80 años, no se ve con ánimo para estudiar documentos como el reseñado de Meng.

Con estas consideraciones, se pueden emprender otras búsquedas, que dejamos a quienes nos siguen.

ALTERNATIVA A FAULHABER

En muchas ocasiones puede interesar sumar las primeras potencias de los números naturales. Están publicados todos los casos populares, como sumas de cuadrados o de cubos, y existe una fórmula, atribuida a Faulhaber, que nos da el resultado para cualquier exponente. En el siguiente recorte de Wikipedia puedes estudiarla.

En Matemáticas, la **fórmula de Faulhaber**, en honor de Johann Faulhaber, expresa la suma de las potencias de los primeros *n* números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

como un polinomio en *n* de grado $(p+1)$ cuyos coeficientes se construyen a partir de los números de Bernoulli: B_j.

La fórmula es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \qquad \left(\text{con } B_1 = +\frac{1}{2} \text{ en vez de } -\frac{1}{2}\right)$$

Faulhaber no conoció nunca esta fórmula general; lo que sí conoció fueron al menos los primeros 17 casos y el hecho de que, si el exponente es impar, entonces la suma es una función polinomial de la suma en el caso especial en el que el exponente sea 1. También hizo algunas generalizaciones (véase Knuth).

https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Faulhaber

El problema que tiene esta fórmula para un uso elemental es que requiere conocer los números de Bernouilli.

El procedimiento que explicaremos a continuación es una alternativa para encontrar el valor de la suma de una sucesión de potencias o expresiones polinómicas con Excel o Calc. Se debe tomar como un simple entretenimiento, aunque en algunas situaciones puede resultar útil.

Un ejemplo: Cuadrados de oblongos:

Explicamos el procedimiento con un ejemplo, como sería encontrar una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros oblongos, es decir de la expresión $n^2(n+1)^2$.

A) Creamos la sucesión:

Con las hojas de cálculo es muy fácil encontrar las primeras sumas de cualquier sucesión. En este caso hemos ido creando columnas para N(N+1), que son los oblongos, sus cuadrados $N^2(N+1)^2$ y sus sumas sucesivas.

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS
1	2	4	4
2	6	36	40
3	12	144	184
4	20	400	584
5	30	900	1484
6	42	1764	3248
7	56	3136	6384
8	72	5184	11568
9	90	8100	19668
10	110	12100	31768
11	132	17424	49192
12	156	24336	73528
13	182	33124	106652

Con esto ya sabemos que la sucesión 4, 40, 184, 584, 1484, 3248, 6384,…es la que requiere una fórmula similar a las de Faulhaber. Para continuar debemos basarnos en dos conjeturas:

1) La fórmula buscada creemos que será de tipo polinómico.

2) Intuiremos de alguna forma qué grado puede tener ese polinomio. Esta segunda no es tan importante, pero nos ayudará en el siguiente paso.

B) Aplicamos la interpolación de Newton:

La búsqueda de una fórmula polinómica que resuma un conjunto de valores es una interpolación. Disponemos de una hoja de cálculo que encuentra esa fórmula para los valores 1, 2, 3, 4,…mediante la interpolación de Newton:

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#newton

(Ver https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica_de_Newton)

Este método se adapta bien a la estructura de Excel y Calc. En nuestra hoja basta escribir los primeros términos y observar las diferencias que se producen. Conviene usar todos los que entren en el esquema (máximo 7). Si se conoce el grado del polinomio, se pueden usar menos. Esta sería la situación para el caso de cuadrados de oblongos:

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	4	40	184	584	1484	3248	6384
Dif1		36	144	400	900	1764	3136
Dif2			108	256	500	864	1372
Dif3				148	244	364	508
Dif4					96	120	144
Dif5						24	24
Dif6							0
Coeficientes (en forma de fracción)	0	24	96	148	108	36	4
	720	120	24	6	2	1	1

Observamos que la diferencia sexta ya es 0, con lo que el grado del polinomio será cinco, como se ve en los coeficientes de abajo, que son seis.

Estos coeficientes actúan sobre los polinomios 1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3),…y esa es la mayor dificultad de esta interpolación, porque el resultado en este caso sería

4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)

(Ya se han simplificado los coeficientes)

C) Desarrollamos el polinomio interpolador:

Este resultado podría ser descorazonador, pero para su simplificación contamos con los programas CAS ((Computer Algebra System) En este blog se suele usar la Calculadora Wiris, gratuita y extendida en la enseñanza.

https://calcme.com/a

Copiamos nuestra monstruosa fórmula en ella y pulsamos sobre el signo =

$$4+36*(x-1)+54*(x-1)*(x-2)+74/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+4*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5) =$$

$$\frac{1}{5}\cdot x^5+x^4+\frac{5}{3}\cdot x^3+x^2+\frac{2}{15}\cdot x$$ Calc

Ya hemos conseguido el objetivo: la suma de los cuadrados de los oblongos sigue la fórmula $x^5/5+x^4+5/3x^3+x^2+2/15x$

Sustituimos el polinomio en la tabla para comprobar

N	N(N+1)	N^2(N+1)^2	SUMAS	Polinomio
1	2	4	4	4
2	6	36	40	40
3	12	144	184	184
4	20	400	584	584
5	30	900	1484	1484
6	42	1764	3248	3248
7	56	3136	6384	6384
8	72	5184	11568	11568
9	90	8100	19668	19668
10	110	12100	31768	31768
11	132	17424	49192	49192
12	156	24336	73528	73528
13	182	33124	106652	106652

Luego la fórmula queda:

$$S(n)=\frac{n^5}{5}+n^4+\frac{5n^3}{3}+n^2+\frac{2n}{15}$$

La podemos factorizar con Wiris:

$$\frac{1}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\left(n+\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)\cdot\left(n-\frac{\sqrt{6}}{3}+1\right)$$ Calc

Estas son las etapas del proceso. Nos basamos en Excel y Calc, en nuestra hoja de interpolación y en un CAS. En la mayoría de los casos obtendremos el polinomio adecuado. Puede que el grado requerido sea mayor, con lo que habría que ampliar el esquema de cálculo, pero ese trabajo es algo complejo.

Repetimos el trabajo con oblongos, Lo dejamos con redacción escueta:

Sumas de oblongos

N	N(N+1)	SUMAS
1	2	2
2	6	8
3	12	20
4	20	40
5	30	70
6	42	112
7	56	168
8	72	240
9	90	330
10	110	440
11	132	572
12	156	728
13	182	910

Debemos buscar una fórmula para 2, 8, 20, 40, 70, 112, …

Interpolamos

Valor natural inicial	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	2	8	20	40	70	112	
Dif1		6	12	20	30	42	
Dif2			6	8	10	12	
Dif3				2	2	2	
Dif4					0	0	
Dif5						0	
Dif6							
ntes (en fracción)		0	0	2	6	6	2
	720	120	24	6	2	1	1

Observamos que son nulas las diferencias a partir de la cuarta, luego obtendremos un polinomio de tercer grado. Sería este

2+6*(x-1)+3*(x-1)*(x-2)+1/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)

Con wiris

$$\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + \frac{2}{3} \cdot x$$ Calc

Factorizando con la misma calculadora:

$$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2 \cdot x}{3}\right) \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$$ Calc

Luego es el doble del combinatorio C(x+2,3), como puede verse en http://oeis.org/A007290

En este caso nos hemos limitado a comprobar, porque esta suma ya está resuelta.

Como un ejemplo del uso de esta fórmula puedes distraerte con mi entrada

http://hojaynumeros.blogspot.com/2018/09/suma-de-numeros-oblongos-consecutivos.html

Suma de potencias cuartas

Por último, reproduciremos una de las fórmulas más conocidas de Faulhaber, la que suma potencias cuartas.

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

(Fuente: Wikipedia)

Seguimos los pasos sugeridos.

Construimos la sucesión:

N	N^4	SUMAS
1	1	1
2	16	17
3	81	98
4	256	354
5	625	979
6	1296	2275
7	2401	4676
8	4096	8772
9	6561	15333
10	10000	25333
11	14641	39974
12	20736	60710
13	28561	89271

Como sabemos que el grado de la fórmula de Faulhaber es 5, interpolaremos con al menos seis elementos.

Interpolación

Valor natural	1	2	3	4	5	6	7
Valores función	1	17	98	354	979	2275	4676
Dif1		16	81	256	625	1296	2401
Dif2			65	175	369	671	1105
Dif3				110	194	302	434
Dif4					84	108	132
Dif5						24	24
Dif6							0
ientes (en	0	24	84	110	65	16	1
e fracción)	720	120	24	6	2	1	1

A partir de los coeficientes de abajo construimos el polinomio:

1+16*(x-1)+65/2*(x-1)*(x-2)+55/3*(x-1)*(x-2)*(x-3)+7/2*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)+1/5*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5)

Simplificamos con Wiris

$$\frac{1}{5}\cdot x^5+\frac{1}{2}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{30}\cdot x$$ Calc

Si reducimos todo a denominador 30, coincidirá con la fórmula de Faulhaber correspondiente.

Algoritmo 196

El número 98 necesita 24 iteraciones para desembocar en capicúa.

El número 110 desemboca en el 121

Es fácil razonar que la segunda cifra de un capicúa de tres cifras que sea meta ha de ser par.

En efecto, si proviene de un número de dos cifras ha de ser múltiplo de 11, y los únicos capicúas son 121, 242, 363 y 484, todos con las decenas pares.

Si proviene de un número de tres cifras 100a+10b+c, tendrá la forma 101(a+c)+20b, con a+c<=9 y b<6, con lo que sus cifras serán a+c, 2b, a+c, y por tanto la cifra de las decenas será par.

Las metas de cuatro cifras han de ser múltiplos de 11.
Es evidente por ser capicúas
N=1000a+100b+100b+a=1001a+110b

Suma de tres números triangulares

La solución es el número 952, que admite estas 24 descomposiciones en triangulares:

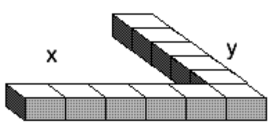
0	6	946
0	91	861
1	171	780
1	210	741
3	3	946
6	351	595
10	276	666
21	28	903
21	190	741
21	435	496
36	55	861
36	136	780
55	231	666
66	66	820
66	325	561
78	171	703
78	378	496
91	120	741
91	231	630
91	300	561
105	351	496
136	351	465
171	253	528
276	325	351

Factorización de Fermat

(1) La variable **y** ha de estar acotada, porque tanto **x+y** como **y-x** son menores que N (al menos uno de ellos), luego su suma cumplirá **2y<2N** y por tanto N es una cota para y.

(2) Para saber si un número es un cuadrado sin usar la raíz cuadrada basta ir sumando los números impares consecutivos. Si una de las sumas coincide con ese número, será cuadrado perfecto. Si las sumas lo sobrepasan sin igualarse a él, no lo será.

(3) Si representamos N como un gnomon cuyo lado mayor es **y** mientras el lado de su hueco es **x**, vemos que en el caso extremo en el que **y-x** valga 1, **y** ha de ser menor o igual que (N+1)/2, lo que nos da una mejor cota para **y**. Lo podemos ver en la imagen, que corresponde a N=11.



APÉNDICE

FACTORIZACIÓN DE FERMAT

Entrada: Un número entero n

Operación: Descompone n en dos factores según la descomposición factorial sugerida por Fermat

Código en Basic

```
Sub factorfermat(n)

dim y,a,m,x,j,s,b,p as long

'Se hace crecer la variable "a" hasta que sobrepase a "n"

a=1:y=1:i=1

while a<n
i=i+2:a=a+i:y=y+1'la variable  es suma de impares consecutivos y por tanto cuadrado perfecto
wend

' Aquí se resuelve el caso en el "n" sea cuadrado perfecto
```

```
if a=n then
msgbox(y)
msgbox(y)
i=i+2:a=a+i:y=y+1
end if

' Se hacen crecer "x" e "y"


x=1:j=1:b=1

while y+y<=n+1
while n+b<a
j=j+2
b=b+j
x=x+1
wend

'Se ha descubierto una coincidencia

if a=n+b then
m=x+y
p=y-x
msgbox(m)
msgbox(p)
```

```
end if

i=i+2:a=a+i:y=y+1

wend
End Sub
```

FRACCIONES CONTINUAS

Ecuación de Pell

Soluciones: 2687489281