MATRICES

Las hojas de cálculo poseen prestaciones interesantes la gestión de matrices de tipo matemático. Unas consisten en facilitar los cálculos matriciales y otras están orientadas a cálculos estadísticos.

CONTENIDO

Matrices 1
Contenido 1
Fórmulas matriciales 2
Operaciones con matrices 4
Suma y resta 4
Producto 5
Determinante 6
Inversa 6
Transponer 7
Matrices en Estadística 8
Frecuencia 8
Suma de productos 9
Tendencia y Estimación 10

Solver 13

Opciones de Solver.. 17

Sistemas de ecuaciones lineales.................................... 18

FÓRMULAS MATRICIALES

Las funciones de tipo matricial se distinguen de las demás por dos aspectos:

Argumento y/o resultado de tipo rango (matriz)

Las funciones de tipo matricial suelen actuar sobre un rango completo o matriz, y no sobre una sola celda. Así por ejemplo actúa MDETERM, que calcula el determinante de una matriz cuadrada. Ese detalle solo no las distingue de otras como COEF.DE.CORREL, que también actúa sobre todo un rango de datos. Veremos en los siguientes párrafos que se necesita algo más.

Otras funciones no sólo actúan sobre una matriz, sino que el resultado que producen es otra matriz. Así actúa MMULT, que multiplica dos matrices y el resultado se presenta como otra matriz.

La primera propiedad, pues, de estas funciones es que actúan sobre matrices y pueden producir como resultado otra matriz. También, como veremos más adelante, pueden devolver un solo resultado en una celda.

Gestión de la entrada de la función

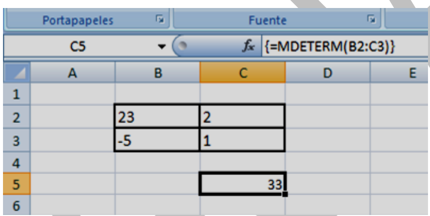
La propiedad más característica de estas funciones es que su fórmula está escrita entre llaves {}, y eso se logra usando, al terminar de escribirlas, la combinación de teclas **Ctrl+Mayúscula+Intro**, en lugar de usar sólo **Intro**, que es lo usual.

Haz la prueba:

Escribe una matriz cuadrada. Por ejemplo

23	2
-5	1

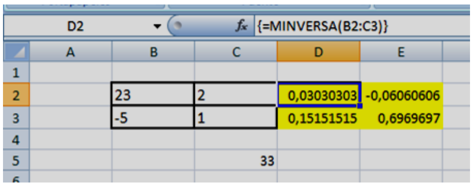
En otra celda escribe la fórmula **=MDERTM(rango de la matriz que has escrito)** y termina con **Ctrl+Mayúscula+Intro**. Observarás que su fórmula se ha escrito entre llaves y que el resultado es el determinante de la matriz. En la imagen lo tienes:



La fórmula {=MDETERM(B2:C3)} está escrita entre llaves (es de tipo matricial), actúa sobre el rango B2:C3, que es la matriz cuadrada, y produce el resultado de 33, que equivale al determinante de la matriz, 33=23*1-(-5)*2

Si la fórmula produce un rango, **hay que seleccionar ese rango antes de escribir la fórmula**. Esto es muy importante.

Lo vemos con un ejemplo. Supongamos que, ya que el determinante no es nulo, deseamos encontrar la matriz inversa de la dada. En ese caso debemos seleccionar antes de escribir un rango cuadrado de 2 por 2, por ejemplo el D2:E3 (en amarillo en la siguiente imagen), después escribir =MINVERSA(B2:C3) y terminar con Ctrl+Mayúscula+Intro



Resumimos los pasos:

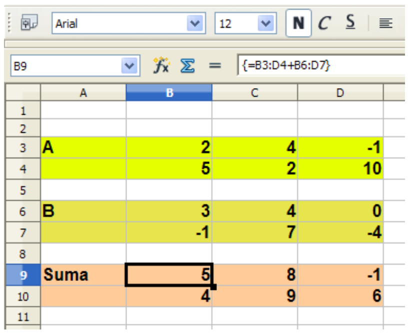
- Seleccionar rango de salida (puede ser una sola celda)
- Escribir la fórmula con funciones matriciales
- Terminar con Ctrl+Mayúscula+Intro

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA Y RESTA

Para sumar dos matrices estas deben tener el mismo número de filas y columnas (una con la otra. Cada una puede ser rectangular)

Para sumarlas basta con usar el signo de la suma entre sus dos rangos, como si sumaras números. En lugar de una fórmula del tipo =C5+D2, debes usar rangos, como en =A6:B10+H6:I10 y terminar de escribirla con **Ctrl+Mayúscula+Intro. No olvides seleccionar previamente un rango con el mismo número de**



filas y columnas que ambos sumandos.

Puedes estudiar este procedimiento en la hoja de la imagen, en la que verás la fórmula sugerida escrita entre llaves y cómo se han sumado celda a celda.

Resta

La diferencia entre dos matrices se organiza de la misma forma que la suma, pero cambiando el signo + por el signo –

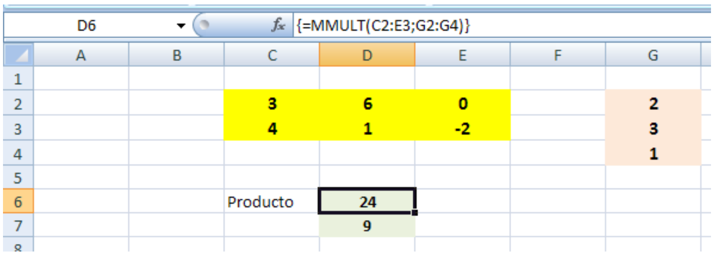
PRODUCTO

Aquí no nos sirve la misma estructura. Si escribes A2:B5*C2:D5 no obtienes el producto de matrices en su sentido algebraico, sino el producto de cada elemento en una matriz por su homólogo en la otra, que puede ser interesante, pero no pertenece al cálculo matricial.

Recuerda que para poder multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera ha de ser igual al de filas en la segunda. Es condición imprescindible. Recuerda también que deberás reservar un rango que posea el mismo número de filas que la primera matriz y el de columnas igual al de la segunda.

Una vez seleccionado ese rango usa la función MMULT seguida de los dos rangos separados por punto y coma y encerrados entre paréntesis. Como siempre, no olvides terminar con **Ctrl+Mayúscula+Intro.**

Observa bien el siguiente ejemplo:



La primera matriz posee tres columnas y la segunda tres filas, luego se pueden multiplicar. Hemos reservado dos filas (como la primera matriz) y una sola columna (como la otra). Después se ha escrito como fórmula {=MMULT(C2:E3;G2:G4)} para obtener el producto.

DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada se obtiene con la función MDETERM. El resultado ocupa sólo una celda, ya que se trata de un número real. Esto hace que no sea necesario terminar la escritura de una fórmula con **Ctrl+Mayúscula+Intro.**

Si la matriz no es cuadrada, se nos devolverá un mensaje de error.

INVERSA

Para que una matriz posea inversa ha de ser cuadrada y de determinante no nulo. Cumplidas estas condiciones se obtendrá la inversa con la función matricial MINVERSA, que actúa sobre un rango cuadrado y se construye sobre otro rango similar. Hay que cuidar bien estas condiciones.

Los errores de truncamiento y redondeo pueden producir que el producto de una matriz por la inversa obtenida con MINVERSA no equivalga exactamente a la matriz unidad.

Puedes verlo en el cálculo de la imagen:

Matriz A				Producto		
2	2	1		1	2,2204E-16	-3,33067E-16
3	2	4		0	1	-2,22045E-16
1	1	4		0	1,1102E-16	1
Inversa de A						
-0,57142857	1	-0,85714286				
1,14285714	-1	0,71428571				
-0,14285714	0	0,28571429				

TRANSPONER

Con la función trasponer cambiamos entre sí las filas y columnas de una matriz. Para conseguirlo daremos estos pasos:

Seleccionamos un rango con tantas filas como columnas tenga la matriz que deseamos transponer, y tantas columnas como filas tenga.
Usamos la función TRANSPONER(rango de la matriz estudiada)
Terminamos con **Ctrl+Mayúscula+Intro**

					2	1
					3	0
2	3	4	5		4	8
1	0	8	7		5	7

MATRICES EN ESTADÍSTICA

Recopilamos a continuación algunas funciones útiles en Estadística. Unas son de tipo matricial y otras actúan sobre matrices, pero su gestión coincide con la de la funciones normales. Las primeras se escriben terminando con **Ctrl+Mayúscula+Intro** y las segundas solo con **Intro**

FRECUENCIA

Esta función lee todos los datos de un rango y los clasifica en frecuencias según los límites marcados en otro rango. Los límites se interpretan como extremos superiores de intervalos e incluidos en ellos. Así, si escribimos un 9, se recogerá la frecuencia de los datos inferiores o iguales a 9.

Su formato es

{=FRECUENCIA(Rango de datos; Rango de límites)}

Con la observación de la imagen se comprende bien su funcionamiento:

	Datos	
	1	9
	3	9
	4	8
	5	7
	4	7
	5	6
	6	5
	7	3
	8	4
	7	10
	8	2
	7	3
Contar	24	

Límites	
0	0
2	2
4	6
6	5
8	8
10	3
Suma	24

Así, para el límite 6 la frecuencia es 5. Esto significa que existen 5 datos entre el límite anterior 4 sin incluir y el 6 incluido. Por tanto habrá contado las veces que aparecen el 5 y el 6.

SUMA DE PRODUCTOS

Multiplica cada término de una matriz por su homólogo en la otra y suma posteriormente todos los resultados. Basta estudiar la siguiente imagen para comprenderlo:

1	3		3	1
2	4		2	2
		18		

El resultado 18 se ha obtenido mediante la fórmula =SUMAPRODUCTO(G8:H9;J8:K9)

Esta función es muy útil en Estadística para calcular el promedio de una distribución de frecuencias. Basta dividir la suma de productos de cada cantidad por su frecuencia y dividir posteriormente entre la suma de frecuencias. Intenta reproducir este ejemplo:

	A	B	C
1			
2			
3		X	F
4		1	2
5		2	12
6		3	18
7		4	17
8		5	11
9		6	6
10			
11		Promedio	3,62121212
12			

La fórmula usada ha sido =SUMAPRODUCTO(B4:B9;C4:C9)/SUMA(C4:C9)

Existen otras funciones similares, que dejamos para investigación del lector: SUMA.CUADRADOS, SUMAX2MASY2, SUMAX2MENOSY2 Y SUMAXMENOSY2

TENDENCIA Y ESTIMACIÓN

Ambas funciones resuelven el problema de ajuste lineal por mínimos cuadrados. La primera devuelve los valores estimados en una relación entre variables si se le aplica un ajuste lineal y la segunda construye una matriz con todos los parámetros de esta operación estadística.

Tendencia

Por ejemplo, supongamos que a la vista de esta tabla

X1	X2	Y
2	5	13
2	5	14
3	4	12
4	3	9
3	4	11
4	2	8
3	2	7
2	1	5

sospechamos que existe una relación lineal del tipo Y=AX1+BX2+C. Podríamos intentar un ajuste por mínimos cuadrados para la estimación de los valores de A,B y C y de los de Y resultantes del cálculo con estos valores (Es el llamado problema de la regresión lineal)

Los valores de Y estimados se obtienen con la función TENDENCIA. Se selecciona una columna paralela a las tres de la tabla y se rellenan dos argumentos (puede haber más pero no los explicamos aquí. Se puede consultar la

ayuda del programa): El rango de los valores de Y, que aquí es la tercera columna y después los de X, que son dobles y abarcan las dos primeras columnas. Podría ser algo similar a esto:
={TENDENCIA(D5:D12;B5:C12)} (con llaves, por ser matricial)

X1	X2	Y	Estimación		Estadísticas		
2	5	13	13,4393382		2,10477941	0,13602941	2,64338235
2	5	14	13,4393382		0,15580386	0,27781568	1,09205287
3	4	12	11,4705882		0,97541902	0,58189599	#N/A
4	3	9	9,50183824		99,2046688	5	#N/A
3	4	11	11,4705882		67,1819853	1,69301471	#N/A
4	2	8	7,39705882		#N/A	#N/A	#N/A
3	2	7	7,26102941				
2	1	5	5,02022059				

Se puede observar que las estimaciones están muy cercanas a los verdaderos valores de Y.

Estimación

Las estadísticas de la derecha se obtienen con la función ESTIMACION.LINEAL

Para usar esta función deberemos seleccionar un rango suficiente, de al menos cinco filas y tres columnas (si hay más variables X necesitaremos más). Después escribiremos la fórmula matricial

={ESTIMACION.LINEAL(Rango de Y;Rango de X;1;1)}
El primer 1 significa que el coeficiente C no tiene que ser nulo y el segundo 1 se interpreta como que sí deseamos estadísticas completas.

No vamos a explicar todos los elementos que aparecen: errores típicos, grados de libertad, coeficiente de determinación,…que son más propios de un tema de Estadística, pero todos ellos están explicados en la ayuda de Excel. Aquí sólo destacaremos que la primera fila

contiene los valores de A,B y C, pero ordenados en orden decreciente de las variables X. Aquí serían
B=2,10477941 , A=0,13602941 y C=2,64338235 y la fórmula del plano de regresión sería

Y=0,13602941X1+2,10477941X2+2,64338235

Otras funciones

Similares a estas son CRECIMIENTO y ESTIMACION.LOGARITMICA que adaptan este tipo de ajuste al caso de crecimiento exponencial. En realidad, tomando logaritmos se pueden abordar otros tipos de ajuste, como el logarítmico y el potencial.

Existen también otras funciones aplicadas a la Inferencia Estadística, que no incluimos aquí, como PRUEBA.Z, PRUEBA.T, PRUEBA.F y otras.

SOLVER

La herramienta **Solver** nos permite optimizar el valor de una celda, a la que llamaremos **Objetivo,** que depende de las celdas de un rango determinado, el cual puede estar sometido a **restricciones**. Si la dependencia es lineal, es en realidad el problema matemático de Programación Lineal.

Su funcionamiento se puede estudiar con un ejemplo:

Después de vender una casa, a una persona le quedan 170.000 € para invertir. Desea una inversión conservadora, por lo que duda entre varias inversiones

- Depósito en banca de Internet, que está dando el 4,2% TAE, pero es un producto novedoso que no le termina de convencer.
- Su banco de toda la vida le ofrece plazo fijo con interés de 3,75% TAE, y que ella considera seguros.
- Un producto vinculado a un fondo, con rendimientos del 6% pero sujeto a volatilidad.

En vista de la situación, decide invertir en B) al menos la mitad del capital, y en C) menos de 15.000 €

¿Qué cesta de inversiones le daría el máximo rendimiento?

Volcamos los datos en la tabla siguiente:

Capital	Rendimiento	Interés anual
68000	4,20%	2856
90000	3,75%	3375
120000	6%	7200
278000	Total	13431

En la columna C hemos concretado unos capitales inventados, pero cercanos a la posible solución y con suma 170000. Sobre esta tabla podemos concretar los parámetros del problema:

Celda objetivo: E8, que es el rendimiento total.

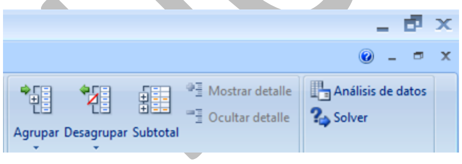
Celdas que cambian: C5 a C7, la composición de la cesta.

Restricciones: C6 ha de valer, como mínimo, 170000/2 = 85000 €, la celda C7 no debe llegar a 15000 €, y la C8 ha de contener 170000 €

Objetivo que se pretende: Maximizar

Todo esto se puede concretar en la herramienta **Solver**.

Abre la ficha de **Datos** y busca la entrada a Solver en el extremo derecho:



Obtendrás esta ventana para concretar tus opciones. Estudia bien la forma de hacerlo:

Hemos rellenado estos datos:

Celda objetivo: E8 (ganancia total)

Valor de la celda objetivo: Máximo

Restricciones: Las ya comentadas: C6>=85000; C7<=15000; C8=170000

Pulsamos **Resolver**, y en este caso existe la solución, 7027,50 €. Elegimos **Utilizar la solución de Solver** y y podemos ver que la solución es:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4			*Capital*	*Rendimiento*	*Interés anual*	
5			70000	4,20%	2940	
6			85000	3,75%	3187,5	
7			15000	6%	900	
8			170000	Total	7027,5	
9						
10						
11						

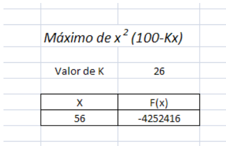
Invertir 70000 € en A, 85000 € en B y 15000 € en C, con una ganancia de 7027 €

Puedes también lograr que la inversión rinda una cantidad determinada, por ejemplo 6800 €. Para ello elige **Valor de** e iguálalo a **6800**. Obtendrás esta solución:

Capital	Rendimiento	Interés anual
74.503,48 €	0,04 €	3.129,15 €
91.508,33 €	0,04 €	3.431,56 €
3.988,19 €	0,06 €	239,29 €
170.000,00 €	Total	6.800,00 €

En muchas ocasiones es imposible encontrar la solución, porque el proceso de acercamiento al objetivo no converge.

La herramienta Solver de Excel también resuelve casos no lineales, e incluso con el uso de logaritmos, exponenciales o funciones trigonométricas. En el siguiente ejemplo buscaremos el máximo de una fórmula polinómica. Supongamos que deseamos estudiar la función $x^2(100\text{-}Kx)$ en el intervalo de 0 a 100, en el que sospechamos que existe un máximo. Deseamos localizarlo según los valores de la constante K.



Escribimos el valor de x en la celda D9 y la fórmula en la celda E9 y añadimos las restricciones x>=0 y x<=100. Como Valor elegimos Máximo, con lo que se nos devuelve el valor de x en el que se llega al máximo según el valor de K. En la imagen hemos fijado K=26, obteniendo el valor máximo x=2,56 y=216,15

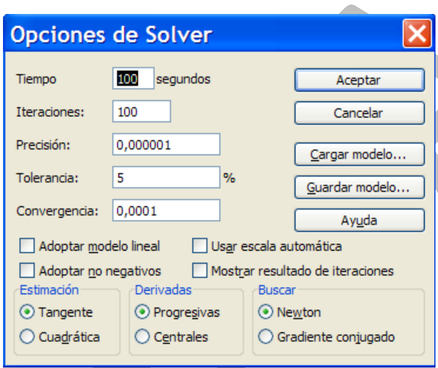
Intenta, por ejemplo, averiguar el valor mínimo que toma la expresión y=sen(x)+cos(2x)en el intervalo (π/2, π). La solución es x=3,016, y=2,0625

OPCIONES DE SOLVER

A veces Solver no puede encontrar la solución. Este se puede deber a tres causas:

- El problema es de tipo indefinido. Existen muchas soluciones.
- Las soluciones tienden a infinito (especialmente en problemas de máximos) y se produce un desbordamiento.
- No hay convergencia. Las soluciones no se acercan lo suficiente al objetivo

Esta última posibilidad se puede a veces corregir con el botón de Opciones. Observa la ventana:



El **tiempo** y el **número** de iteraciones no suele ser necesario modificarlos, sin suficientes, aunque puedes llegar a 32367. La **precisión** se refiere a las restricciones y el valor que te aparece es el más adecuado. La **tolerancia** afina más o menos la exactitud de la consecución del objetivo. Puedes aumentarla si ves que el proceso no converge.

La **convergencia** fija con qué diferencia se detendrá el proceso de iteraciones que se acercan al objetivo. No es útil modificarla en el modelo lineal, pero en el no lineal puede lograr que converja el proceso, pero de forma menos exacta.

Adoptar modelo lineal acelera los cálculos de Programación Lineal. En casos sencillos no es necesario. El **adoptar no negativos** te hace referir todas las restricciones al cero.

Usar escala automática permite simplificar las cantidades si las magnitudes son muy grandes. En uso docente o doméstico no es necesario acudir a esta opción.

Las opciones de la parte inferior son algo técnicas, propias del Análisis Numérico. Lo mejor es jugar con ellas si el proceso no converge, por si acertamos con la mejor.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Con un poco de habilidad, la herramienta Solver puede resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Imagina que deseas resolver este sistema

2X+Y+Z+W=10
4X+7Y+2U+2W=30
2X+Y-3Z-2U+W=-2
2X-Y+Z+U+2W=10
4X+Z+U+W=14

Bastará reflejar cuatro de las ecuaciones como restricciones, y la última como la celda a optimizar. Tanto en unas como en otra, deberemos usar el signo =

Puedes organizar el sistema de forma matricial, como en la imagen.

Sistema de ecuaciones

		Coeficientes				
X	1	2	4	2	2	4
Y	3	1	7	1	-1	0
Z	6	1	0	-3	1	1
U	5	0	2	-2	1	1
W	2	1	2	1	2	1
	Ecuaciones	13	39	-21	14	17

Los valores contenidos en la columna B te los puedes inventar
Los coeficientes son los del sistema que deseas resolver
No rellenes de valores la fila 12

En la zona azul de variables X, Y,…escribes valores elegidos aleatoriamente (columna B) y en la zona amarilla los coeficientes. La fila de abajo (celdas C12 a G12, o más si el sistema tiene un número mayor de ecuaciones) puede contener los segundos miembros de las ecuaciones, que se habrán obtenido multiplicando cada coeficiente por su variable y después sumando todo. Esta operación la puedes efectuar con la función SUMAPRODUCTO.

Ahora el truco está en tratar las primeras ecuaciones como restricciones. Observa las celdas C12 a F12 y los valores asignados: 10, 30, -2 y 10, que son los segundos miembros de esas ecuaciones.

La quinta ecuación se ha tratado como celda a optimizar con una asignación de valor de 14, que es el último término independiente.

El rango a cambiar es el que contiene los valores de las incógnitas. En la imagen puedes comprobar todos los datos que habría que concretar.

Pulsa en **Resolver** y obtendrás

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		Sistema de ecuaciones					
4							
5							
6			Coeficientes				
7	X	2,000	2	4	2	2	4
8	Y	2,000	1	7	1	-1	0
9	Z	2,000	1	0	-3	1	1
10	U	2,000	0	2	-2	1	1
11	W	2,000	1	2	1	2	1
12		Ecuaciones	10	30	-2	10	14

que es la solución del sistema: X=Y=Z=U=W=2.